

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
19. 9. 2025

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
 - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
 - *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
 - *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
 - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
 - *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
 - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*
-

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x) = \exp(x) - (x + 1)^2$, kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci, též značenou e^x .
 - (a) [3 b.] Najděte limity funkce $f(x)$ v $+\infty$ a v $-\infty$.
 - (b) [3 b.] Najděte maximální otevřené intervaly, na nichž je funkce f konvexní, a maximální otevřené intervaly, na nichž je konkávní.
 - (c) [4 b.] Kolik existuje hodnot $x \in \mathbb{R}$, v nichž platí $f(x) = 0$? (Nemusíte zjišťovat, o jaké hodnoty se jedná, stačí jen určit jejich počet. Všimněte si, že jedna taková hodnota je například $x = 0$.)
2.
 - (a) [3 b.] Napište definici pojmu *hromadný bod* a pojmu *limes superior* posloupnosti čísel (a_n) .
 - (b) [4 b.] Najděte příklad posloupnosti čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která má všechny tři následující vlastnosti:
 - $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
 - $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.
 - Pro posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou vztahem $b_n = (-1)^n a_n$ platí $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
 - (c) [3 b.] Definujme posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem $c_n = n \cdot \exp((-1)^n \cdot n)$. Rozhodněte, zda má tato posloupnost limitu, a pokud ano, čemu se tato limita rovná.
3.
 - (a) [3 b.] Napište formálně, co to znamená, že funkce f má v bodě A limitu L , a co to znamená, že funkce f je spojitá v bodě A . Stačí, když se omezíte na případ, kdy A a L jsou reálná čísla.
 - (b) [3 b.] Zformulujte tvrzení známé jako ‘věta o dvou polícajtech’ pro limity funkcí. Nemusíte ho dokazovat.
 - (c) [4 b.] Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňuje nerovnosti $0 \leq f(x) \leq x^2$. Plyne z těchto nerovností, že funkce f má v bodě 0 derivaci? Budeme-li předpokládat, že f má derivaci v bodě 0, plyne z předchozích nerovností, že tato derivace je rovna nule?
4.
 - (a) [3 b.] Napište definici pojmu *primitivní funkce* a napište, jak je definován Newtonův integrál $(N) \int_A^B f(x) dx$.
 - (b) [3 b.] Napište vzorec pro výpočet objemu rotačního tělesa.
 - (c) [4 b.] Pro $A \in (1, +\infty)$ označme $V(A)$ objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy pod grafem funkce $\frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, A]$ kolem osy x . Čemu se rovná $\lim_{A \rightarrow +\infty} V(A)$?