Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
18. 6. 2025

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba* $(x-5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, *nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

---

1. Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vzorcem $f(x) = x \cdot |x^2 + 2x|$.
   (a) [3 b.] V kterých bodech $\mathbb{R}$ má tato funkce vlastní derivaci?
   (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž tato funkce nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
   (c) [4 b.] Najděte co největší otevřený interval I obsahující bod -1, na němž je tato funkce konvexní nebo konkávní, a uveďte, zda je f na I konvexní, nebo zda je tam konkávní.

2. (a) [3 b.] Napište, jak je definován součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a co znamená, že řada je *konvergentní.*
   (b) [4 b.] Najděte příklad konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ konvergentní není. Nezapomeňte zdůvodnit, proč má váš příklad požadované vlastnosti.
   (c) [3 b.] Je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ konvergentní?

3. (a) [3 b.] Definujte, co znamená, že funkce f je *spojitá* v bodě $A \in \mathbb{R}$, a co znamená, že funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.
   (b) [3 b.] Zformulujte větu o nabývání extrémů pro spojité funkce, též známou jako princip maxima. Nemusíte ji dokazovat.
   (c) [4 b.] Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každé $A, B \in \mathbb{R}$ platí $|f(A) - f(B)| \leq |A - B|$. Dokažte, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.

4. (a) [3 b.] Jak je definován Newtonův integrál funkce f na intervalu (A, B)?
   (b) [3 b.] Uveďte příklad funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, která nemá Riemannův integrál na intervalu $[0,1]$, ale má Newtonův integrál na intervalu $(0,1)$. Nezapomeňte zdůvodnit, proč má váš příklad požadované vlastnosti.
   (c) [4 b.] Spočítejte, jaký objem má rotační těleso vzniklé otáčením plochy pod grafem funkce $f(x) = 1 + |3x|$ na intervalu $[-2, 2]$ kolem osy x.