

Jméno:

1	2	3	4	$\Sigma$

---

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I  
16. 6. 2025

---

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
  - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
  - *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
  - *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
  - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
  - *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba  $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$ , nemusíte ho zjednodušovat.*
  - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*
- 

1. Uvažujme funkci  $f(x) = x \cdot |\sin(x)|$  definovanou na  $\mathbb{R}$ .
  - (a) [3 b.] Má tato funkce derivaci v bodě  $x = 0$ ?
  - (b) [3 b.] Existuje nějaké  $\varepsilon > 0$  takové, že funkce  $f$  je rostoucí na intervalu  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ? Existuje nějaké  $\delta > 0$  takové, že funkce  $f$  je konvexní na intervalu  $(-\delta, \delta)$ ? (Není zde nutné zjišťovat “optimální” hodnoty  $\varepsilon$  nebo  $\delta$ , stačí jen rozhodnout a zdůvodnit, zda vůbec nějaké takové  $\varepsilon$  nebo  $\delta$  existuje.)
  - (c) [4 b.] V kolika bodech má funkce  $f$  lokální extrém? V kolika bodech má globální extrém? (Není nutné zde určovat, o které všechny body se jedná, stačí jen určit a zdůvodnit jejich počet.)
2.
  - (a) [3 b.] Nechť  $L$  je reálné číslo a nechť  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost. Definujte, co znamená, že posloupnost  $(a_n)$  má limitu  $L$ .
  - (b) [3 b.] Rozhodněte (a zdůvodněte), zda je následující tvrzení pravdivé:  
“Jestliže  $L$  je reálné číslo a  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce, pro niž platí  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$ , pak pro posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  definovanou předpisem  $a_n = f(\frac{1}{n})$  platí, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .”
  - (c) [4 b.] Uvažujme posloupnost  $(a_n)$  definovanou vztahem  $a_n = (n + (-1)^n) \cdot (\exp(\frac{1}{n}) - 1)$ . Má tato posloupnost limitu, a pokud ano, čemu se rovná?
3.
  - (a) [3 b.] Definujte, co znamená, že funkce  $f$  je *konvexní* na intervalu  $I$ .
  - (b) [3 b.] Zformulujte Bolzanovu větu, která mluví o vlastnostech oboru hodnot spojitých funkcí.
  - (c) [4 b.] Mějme funkci  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , která je spojitá na  $\mathbb{R}$ . Předpokládejme, že existuje  $A \in \mathbb{R}$  splňující  $f(A) < A$  a také existuje  $B \in \mathbb{R}$  splňující  $f(B) > B$ . Dokažte, že potom také existuje  $C \in \mathbb{R}$  splňující  $f(C) = C$ .
4.
  - (a) [3 b.] Napište, jak je definována horní a dolní Riemannova suma a jak je definován horní a dolní Riemannův integrál.
  - (b) [3 b.] Nechť  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu  $[0, 1]$ . Definujme funkci  $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  předpisem  $g(x) = f(\frac{x}{2})$ . Plyne z této definice, že  $g$  je riemannovsky integrovatelná na intervalu  $[0, 2]$ ?
  - (c) [4 b.] Spočítejte

$$(R) \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx.$$