

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
15. 6. 2026

Čas: 90 minut.

- Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.
- Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.
- Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.
- Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.
- Svě odpovědi musíte zdůvodnit.
- Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.
- Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vzorcem

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(|x|) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

- (a) [4 b.] Rozhodněte, v kterých bodech \mathbb{R} je f spojitá. Rozhodněte dále, v kterých bodech má (vlastní či nevlastní) derivaci.
- (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž funkce f nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
- (c) [3 b.] Najděte maximální (vzhledem k inkluzi) otevřené intervaly, na nichž je f konvexní, a maximální intervaly, na nich je konkávní.
2. (a) [3 b.] Napište, jak je definována *limita* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a co znamená, že limita je *vlastní*.
- (b) [4 b.] Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé:
“Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která je spojitá na \mathbb{R} , a nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost, která má vlastní limitu L . Potom posloupnost $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ má limitu $f(L)$.”
- (c) [3 b.] Jaká je limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované vztahem $a_n = n^2 \cdot \sin(\frac{1}{n})$?
3. (a) [3 b.] Napište, jak je definována *derivace* funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$ a jak jsou definovány *derivace zleva* a *derivace zprava*.
- (b) [3 b.] Zformulujte Rolleovu větu týkající se hodnot derivace. Nemusíte ji dokazovat.
- (c) [4 b.] Nechť má funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $A \in \mathbb{R}$ derivaci zleva $f'_-(A)$ i derivaci zprava $f'_+(A)$. Uvažme následující dvě vlastnosti:
(I) Funkce f má v A ostré lokální maximum.
(II) Platí $f'_-(A) > 0$ a $f'_+(A) < 0$.
Vyplývá z vlastnosti (I) vlastnost (II)? Vyplývá z vlastnosti (II) vlastnost (I)?
4. (a) [3 b.] Definujte pojmy *dělení intervalu* $[A, B]$, *horní a dolní Riemannova suma* funkce f na intervalu $[A, B]$ a *horní a dolní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[A, B]$.
- (b) [3 b.] Zformulujte integrální kritérium pro konvergenci řad. Nemusíte ho dokazovat.
- (c) [4 b.] Uvažujme funkci $f(x) = (x+1) \operatorname{sgn}(x)$, kde funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je definována obvyklým způsobem: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$. Je funkce $f(x)$ riemannovsky integrovatelná na intervalu $[-1, 2]$? Pokud ano, určete hodnotu $(R) \int_{-1}^2 f$.