Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
11. 9. 2025

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x-5)^2+10x+\binom{6}{2}-3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f(x) = x \cdot |\sin(x)|$ definovanou na $\mathbb{R}$.
   (a) [3 b.] Má tato funkce derivaci v bodě $x = 0$?
   (b) [3 b.] Existuje nějaké $\varepsilon > 0$ takové, že funkce f je rostoucí na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$? Existuje nějaké $\delta > 0$ takové, že funkce f je konvexní na intervalu $(-\delta, \delta)$? (Není zde nutné zjišťovat "optimální" hodnoty ε nebo δ, stačí jen rozhodnout a zdůvodnit, zda vůbec nějaké takové ε nebo δ existuje.)
   (c) [4 b.] V kolika bodech má funkce f lokální extrém? V kolika bodech má globální extrém? (Není nutné zde určovat, o které všechny body se jedná, stačí jen určit a zdůvodnit jejich počet.)

2. (a) [3 b.] Definujte formálně, co to znamená, že posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je *omezená*.
   (b) [4 b.] Rozhodněte, zda je pravdivé následující tvrzení:

   Jestliže $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, jejíž jediné dva hromadné body jsou $+\infty$ a $-\infty$, pak žádná podposloupnost posloupnosti (a_n) není omezená.

   (c) [3 b.] Spočítejte limitu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované vztahem
$$a_n = \frac{\ln(n^2+1)}{2n+(-1)^n}.$$

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definována *derivace* funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$.
   (b) [3 b.] Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nemusíte ji dokazovat.
   (c) [4 b.] Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, která je diferencovatelná na $\mathbb{R}$ a která splňuje $f(0) = 0$. Předpokládejme, že pro každé $A > 0$ platí $f'(A) > 3$. Dokažte, že potom pro každé $B > 0$ platí $f(B) > 3B$.

4. (a) [3 b.] Napište, jak je definována horní a dolní Riemannova suma a jak je definován horní a dolní Riemannův integrál.
   (b) [3 b.] Nechť $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0,1]$. Definujme funkci $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = f(\frac{x}{2})$. Plyne z této definice, že g je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0,2]$?
   (c) [4 b.] Spočítejte
$$(R)\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx.$$