

Name:

1	2	3	4	$\Sigma$

---

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

- 4 úlohy, 90 minut, max 30 bodů.
- Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).
- Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s pitím.
- Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).
- Číselné výsledky tvaru  $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$  apod. není potřeba dále zjednodušovat.
- Tvzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.

- 
1. (a) Zformulujte horní a dolní odhad na prostřední kombinační číslo  $\binom{2n}{n}$ , jejichž podíl jde v limitě  $n \rightarrow \infty$  ke konstantě. Odhady nemusíte dokazovat.
- (b) Pomocí části (a) a aproximace  $2^{10} \approx 10^3$  odhadněte, kolik číslic má  $\binom{60}{30}$ .
- (c) Pro sudé číslo  $n \geq 2$  označme

$$A_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (n-2) \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-3) \cdot (n-1)}.$$

Dokažte, že pro každé sudé číslo  $n \geq 2$  platí  $A_n \geq \sqrt{n}$ .

[8 bodů]

2. (a) Definujte vrcholový řez a vrcholovou souvislost  $k_v(G)$  v daném grafu  $G$  na  $n \geq 2$  vrcholech. (Pozor na případ, kdy  $G$  je úplný graf.)
- (b) Najděte graf  $G$  na  $n \geq 3$  vrcholech a vrchol  $v$ , že odebráním  $v$  z  $G$  vrcholová souvislost:
- (i) klesne,
  - (ii) zůstane stejná,
  - (iii) stoupne.
- (V každém ze 3 případů nakreslete graf, vyznačte vrchol  $v$  a napište hodnotu vrcholové souvislosti před odebráním  $v$  a po něm. Nemusíte zdůvodňovat.) [6 bodů]

3. (a) Definujte Ramseyovo číslo  $R(a, b)$ .
- (b) Určete  $R(2, 4)$ .
- (c) Dokažte, že  $R(3, 3) \geq 6$ .
- (d) Ve skutečnosti je známo, že  $R(3, 3) = 6$ . Pomocí toho a části (b) dokažte, že  $R(3, 4) \leq 10$ . [8 bodů]

4. Jacques má sadu  $S$  osmi vektorů  $u_1, u_2, \dots, u_8 \in \{-1, 1\}^{10}$  délky 10, z nichž každé dva se liší na přesně 4 pozicích, tj.  $\forall u_i \neq u_j \in S: d(u_i, u_j) = 4$ .

(a) Sada  $S$  odpovídá  $(n, k, d)$ -kódu pro určité parametry  $n, k, d$ . Určete tyto parametry.

(b) Jacques chce ze sady  $S$  vyrobit novou sadu  $S'$  vektorů délky 20. Pro vektor  $x$  označme  $-x$  vektor, který má na každé pozici opačné číslo, a pro vektory  $x, y$  označme  $x \oplus y$  jejich konkatenci. Pak pro  $u_i \in S$  položme:

- $v_i = u_i \oplus u_i$  konkatencí vektoru  $u_i$  se sebou samým a
- $w_i = u_i \oplus -u_i$  konkatencí vektoru  $u_i$  se svým opakem.

A položme  $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_8, w_1, w_2, \dots, w_8\}$ .

- Určete  $d(v_i, v_j)$  pro  $i \neq j$ .
- Určete  $d(w_i, w_j)$  pro  $i \neq j$ .
- Určete  $d(v_i, w_i)$ .
- Určete  $d(v_i, w_j)$  pro  $i \neq j$ .
- Určete parametry  $n, k, d$  kódu, který odpovídá sadě  $S'$ .

[8 bodů]

*Extra page 1/2 if you need it.*

---

*Extra page 2/2 if you need it.*

---