Name:

1	2	3	4	$\sum$

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

- *4 úlohy, 90 minut, max 30 bodů.*
- *Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).*
- *Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s pitím.*
- *Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).*
- *Číselné výsledky tvaru $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$ apod. není potřeba dále zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.*

1. (a) Definujte vytvořující funkci $f(x)$ posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$.

   (b) Pro $n \geq 1$ označme a_n počet n-ciferných čísel, které obsahují jen cifry 1, 2, 3 a navíc mezi každými dvěma po sobě jdoucími ciframi je aspoň jedna jednička.

   i. Určete a_2 a a_3 (klademe $a_0 = 1$ a $a_1 = 3$).

   ii. Odvoďte rekurentní vztah pro a_n, tj. pro $n \geq 3$ vyjádřete a_n pomocí předchozích členů. (Hint: Např. lze rozeberat dvě možnosti podle toho, jestli první cifra je jednička.)

   iii. Vyjádřete vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ v uzavřeném tvaru (bez tří teček).

   iv. Spočítejte $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. (Tip: Můžete bez důkazu využít, že n-tý člen posloupnosti a_n lze vyjádřit explicitně jako $a_n = c_1 \cdot \alpha^n + c_2 \cdot \beta^n$, kde c_1, c_2, α, β jsou vhodná reálná čísla.) [10 bodů]

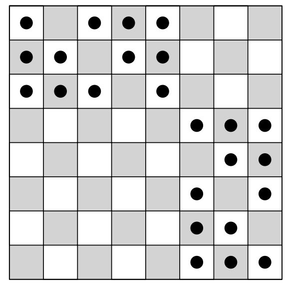
2. (a) Kolik přímek obsahuje konečná projektivní rovina (KPR) řádu n?

   (b) Kolik přímek prochází každým bodem KPR řádu n?

   (c) V konečné projektivní rovině $(X, \mathcal{P})$ platí, že $\mathcal{P}$ obsahuje mimo jiné přímky $abcj$, $defj$, $ghij$, $adgk$, $behk$, $cfik$, $aeil$ a $cegm$. Určete zbylé přímky v $\mathcal{P}$. [6 bodů]

3. (a) Zformulujte Hallovu větu (ve kterékoliv její verzi).

(b) Na šachovnici je 24 figurek jako na obrázku. Magnus má za úkol vybrat z nich 8 tak, aby se každá nacházela v jiném řádku i v jiném sloupci. Dokažte, že úkol nelze splnit.



(c) Kolik nejméně figurek musí Magnus na šachovnici nejdřív přidat, aby už úkol splnit šlo? [6 bodů]

4. Ve skupině 8 lidí se některé dvojice kamarádí. Platí, že kdykoliv se všech 8 lidí rozestaví do kruhu na pozice $1, 2, \ldots, 8$, pak aspoň 2 z 8 "sousedních" dvojic podél kruhu jsou kamarádi. Zajímá nás celkový počet E zpřátelených dvojic lidí.
   Označme X počet dvojic (π, e), kde π je možné rozestavení lidí do kruhu a e je dvojice kamarádů, kteří jsou v tom rozestavení vedle sebe podél kruhu.
   (a) Vyjádřete X pomocí E. (Hint: pro každou zpřátelenou dvojici e spočítejte, v kolika rozestaveních π skončí vedle sebe.)
   (b) Odhadněte X zdola. (Hint: Spočítejte X druhým způsobem.)
   (c) Dokažte, že $E \geq 7$.
   (d) Lze učinit závěr, že zpřátelených dvojic je dokonce aspoň 8? [8 bodů]

Extra page 1/2 if you need it.

Extra page 2/2 if you need it.