

Name:

1	2	3	4	Σ

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

- 4 úlohy, 90 minut, max 30 bodů.
 - Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).
 - Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s pitím.
 - Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).
 - Číselné výsledky tvaru $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$ apod. není potřeba dále zjednodušovat.
 - Tvzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.
-

1. (a) Skript, který napsal váš kolega, iteruje přes všechny permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a pro každou z nich provádí výpočet, který trvá vždy stejně dlouho (nezávisle na permutaci i na n). Pro $n = 5$ skript doběhl zhruba za 11 ms, pro $n = 8$ zhruba za 3.6 s. Zajímá nás, za jak dlouho zhruba skript doběhne pro větší n . Vyjádřete odpověď zaokrouhleně jako jednociferné číslo ve vhodných časových jednotkách (vteřiny, hodiny, dekády, ...) pro:
- $n = 11$,
 - $n = 14$.
- (b) Pro velmi velké n seřad'te následující výrazy podle velikosti od nejmenšího po největší (nemusíte zdůvodňovat): [5 points]

$$A_n = 2^n, \quad B_n = n!, \quad C_n = n \log n, \quad D_n = n^{10}, \quad E_n = (\sqrt{n})^n.$$

2. (a) Zdefinujte konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ pomocí tří axiomů.
- (b) Řekneme, že $n \times n$ tabulka s některými políčky vybarvenými šedě je *zajímavá*, pokud platí:
- pro každé dva řádky existuje přesně jeden sloupec, kde mají oba šedé políčko,
 - pro každé dva sloupce existuje přesně jeden řádek, kde mají oba šedé políčko.
 - každý řádek a každý sloupec obsahuje stejný počet šedých políček,
- Například 3×3 tabulka na obrázku je zajímavá.
- Nakreslete nějakou zajímavou $n \times n$ tabulku s $n > 3$.
- (c) Dokažte, že pro nekonečně mnoho různých hodnot n existuje zajímavá $n \times n$ tabulka. [7 points]

3. Pingpongového turnaje se zúčastnilo $n = 11$ hráčů. Každý hrál s každým jeden zápas, vítěz získal 1 bod a poražený 0 bodů (remízy nenastaly). Díváme se na trojprvkové množiny hráčů. Řekneme, že taková trojprvková skupina hráčů je *jasná*, pokud v ní jeden hráč oba zápasy vyhrál (tomu pak říkáme *mistr skupiny*), jeden oba prohrál a jeden jednou vyhrál a jednou prohrál. Označme J počet jasných skupin v turnaji. Konečně označme $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ počty bodů jednotlivých hráčů na konci turnaje.
- (a) Ukažte, že hodnota součtu $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nezávisí na průběhu turnaje, a vyjádřete ji jako dvojmístné číslo.
 - (b) Alice vyhrála 5 zápasů. V kolika jasných skupinách je mistryní?
 - (c) Vyjádřete J pomocí čísel $a_1, \dots, a_n$.
 - (d) Zformulujte nerovnost mezi součtem druhých mocnin reálných čísel a druhou mocninou součtu reálných čísel (nemusíte ji dokazovat).
 - (e) Ukažte, že alespoň dvě třetiny všech skupin jsou jasné.
 - (f) Je možné, že přesně dvě třetiny všech skupin jsou jasné?

[10 points]

4. (a) Zformulujte Hammingův odhad na maximální velikost kódu nad binární abecedou. (Můžete bez komentáře použít značení $V_n(r)$ pro objem kombinatorické koule s poloměrem r v $\{0, 1\}^n$.)
- (b) Na kulatý táč s průměrem 60 cm jsme rozmístili několik zrněk máku tak, že:
- každá dvě zrnka jsou od sebe aspoň 10cm daleko a současně
 - každé zrnko je aspoň 5 cm od kraje tácu.

Dokažte, že zrněk je nejvýše 35.

[8 points]

Extra page 1/2 if you need it.

Extra page 2/2 if you need it.
