Jaderná a subjaderná fyzika: Zápočtová písemná práce č. 2 (z 9. 1. 2023) - Řešení

1. Vyhořelé palivo řeší energetickou krizi? (7 bodů)

V době rostoucích cen energií se lze uchýlit k nekonvenčním zdrojům jako je vyhořelé jaderné palivo. Takové palivo stále produkuje teplo zejména díky obsahu izotopu stroncia ^{90}Sr s poločasem rozpadu $T_{Sr} = 28,9$ r a izotopu cesia ^{137}Cs s poločasem rozpadu $T_{Cs} = 30,5$ r.

a) (2 b) Jaká je měrná aktivita vyhořelého paliva v Becquerelech na tunu, Bq/t, jestliže obsahuje 0,1% hmotnosti ^{90}Sr a 0,1% hmotnosti ^{137}Cs?

b) (2 b) Jaký je měrný tepelný výkon paliva ve W/t, jestliže při jednom rozpadu ^{90}Sr se uvolní energie 564 keV a při rozpadu ^{137}Cs 1176 keV?

c) (1 b) V České republice se ročně vyrobí 100 t vyhořelého jaderného paliva. Pro kolik domácností by to dokázalo pokrýt roční spotřebu tepla, jestliže průměrná domácnost spotřebuje 40 GJ/r? Změnu výkonu v průběhu roku v tomto případě zanedbejte.

d) (2 b) O kolik procent poklesne tepelný výkon vyhořelého paliva po 30 letech používání? Lze si s ním ješte rozumně topit?

Kilomolová hmotnost ^{90}Sr a ^{137}Cs je $M_{^{90}\mathrm{Sr}} = 90\,\mathrm{kg\cdot kmol^{-1}}$ a $M_{^{137}\mathrm{Cs}} = 137\,\mathrm{kg\cdot kmol^{-1}}$. Platí převodní vztah mezi elektronvoltem a joulem $1\,\mathrm{eV} = 1.602\cdot 10^{-19}$ J. Avogadrova konstanta je $N_\mathrm{A} = 6,022\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

Řešení

a)
- Nejprve spočteme měrnou aktivitu stroncia. Jedna tuna paliva ho obsahuje 0.1%, tj. $m_\mathrm{Sr} = 1$ kg.
- Přepočteme hmotnost na počet částic stroncia

$$N_\mathrm{Sr} = \frac{m_\mathrm{Sr} N_A}{M_\mathrm{Sr}} = 6,69\cdot 10^{24}.$$

- Vyjádříme rozpadovou konstantu stroncia jako funkci poločasu rozpadu

$$\lambda_\mathrm{Sr} = \frac{\ln(2)}{T_\mathrm{Sr}} = 7,6\cdot 10^{-10}\,\mathrm{s^{-1}}.$$

- Aktivita stroncia je dána jako

$$A_\mathrm{Sr} = \lambda_\mathrm{Sr} N_\mathrm{Sr} = 5.09\cdot 10^{15}\,\mathrm{Bq}.$$

- Páč tato aktivita odpovídá 1 t vyhořelého paliva, měrná aktivita paliva způsobená stronciem je

$$\boxed{a_\mathrm{Sr} = 5,09\cdot 10^{15}\,\mathrm{Bq/t}.}$$

- Obdobně spočteme měrnou aktivitu cesia

$$\boxed{a_\mathrm{Cs} = 3,17\cdot 10^{15}\,\mathrm{Bq/t}.}$$

- Výsledná měrná aktivita je

$$\boxed{a = a_\mathrm{Sr} + a_\mathrm{Cs} = 8,25\cdot 10^{15}\,\mathrm{Bq/t}.}$$

b) – Měrný tepelný výkon je dán součinem měrné aktivity (počet rozpadů za čas) a energie uvolněné při jednom rozpadu, tedy

$$\boxed{P = P_{\mathrm{Sr}} + P_{\mathrm{Cs}} = E_{\mathrm{Sr}} a_{\mathrm{Sr}} + E_{\mathrm{Cs}} a_{\mathrm{Cs}} = 1056\,\mathrm{W/t},}$$

kde $E_{\mathrm{Sr}} = 564$ keV a $E_{\mathrm{Cs}} = 1176$ keV, přičemž jsme využili převodního vztahu mezi elektronvoltem a joulem $1\,\mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

c) – Roční produkce tepla $m_{\mathrm{pal}} = 100$ t paliva spočteme jako součin jeho hmotnosti, měrného výkonu a času (zde zanedbáváme pokles výkonu v průběhu roku a výkon je tak konstantní)

$$Q_{\mathrm{pal}} = m_{\mathrm{pal}} P t_{\mathrm{rok}} = 3.33 \cdot 10^3\,\mathrm{GJ}$$

– Počet domácností, které tato produkce dokáže zaopatřit je dán jako

$$\boxed{N_{\mathrm{dom}} = \frac{Q_{\mathrm{pal}}}{40\,\mathrm{GJ}} \doteq 83\,\text{domácností}}$$

d) – Vývoj měrné aktivity za čas t a tedy i měrného tepelného výkonu se řídí rozpadovým zákonem. Například pro měrný tepelný výkon stroncia můžeme psát

$$P_{\mathrm{Sr}}(t) = E_{\mathrm{Sr}} a_{\mathrm{Sr}}(t) = E_{\mathrm{Sr}} a_{\mathrm{Sr}}(0) e^{-\frac{\ln(2)t}{T_{\mathrm{Sr}}}} = P_{\mathrm{Sr}}(0) e^{-\frac{\ln(2)t}{T_{\mathrm{Sr}}}},$$

kde počáteční měrný výkon, v čase $t = 0$, vezmeme z b). Obdobným postupem získáme měrný výkon cesia jako funkci času.

– Relativní výkon za čas $t = 30$ let lze vyjádřit jako

$$R = \frac{P_{\mathrm{Sr}}(0) e^{-\frac{\ln(2)t}{T_{\mathrm{Sr}}}} + P_{\mathrm{Sr}}(0) e^{-\frac{\ln(2)t}{T_{\mathrm{Sr}}}}}{P_{\mathrm{Sr}}(0) + P_{\mathrm{Cs}}(0)} = 49,8\%.$$

– Relativní pokles výkonu je pak dán jako

$$\boxed{D = 1 - R = 1 - \frac{P_{\mathrm{Sr}}(0) e^{-\frac{\ln(2)t}{T_{\mathrm{Sr}}}} + P_{\mathrm{Sr}}(0) e^{-\frac{\ln(2)t}{T_{\mathrm{Sr}}}}}{P_{\mathrm{Sr}}(0) + P_{\mathrm{Cs}}(0)} = 50,2\%.}$$

S tím lze pořád rozumně topit.

2. Kremíkový detektor (6 bodov)

V experimente máme dráhový detektor, ktorý je vyrobený z kremíka (Si). Detektor slúži na meranie hybnosti ultrarelativistických piónov, ktoré ním prelietavajú. Celková hrúbka detektora je $d = 2\,\mathrm{mm}$. Pióny môžu s atómami detektora inelasticky interagovať, pričom stredná voľná dráha je $l = 80\,\mathrm{mm}$.

a) (2 b) Aká časť piónov prejde detektorom bez interakcie?

b) (2 b) Aký je účinný prierez interakcie piónu s kremíkom?

c) (2 b) Detektorom prechádza 10^6 piónov za sekundu. Efektivita detektora klesá s počtom interakcií N_{int} lineárne podľa vzťahu $\varepsilon = 1 - qN_{int}$, kde $q = 10^{-10}$. Po akom čase klesne efektivita detektora zo 100% na 90%?

Molárna hmotnosť kremíka je $M = 28{,}09\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, hustota kremíka je $\rho = 2{,}329\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, Avogadrova konštanta je $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

Řešení

a) Použijeme exponenciálny vzťah pre tok častíc I, ktorý prejde detektorom bez interakcie:

$$I = I_0 e^{-\sigma n d},$$

pričom stredná voľná dráha piónu je daná vzťahom

$$l = \frac{1}{n\sigma}.$$

Preto je podiel neinteragujúcich piónov:

$$\boxed{p = I/I_0 = e^{-d/l} \approx 97.5\%.}$$

b) Využijeme vzťah pre mólové množstvo

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M_m},$$

ktorý po predelení objemom detektora dá

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho}{M_m}.$$

Účinný prierez je potom

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{nl} = \frac{M_m}{\rho N_A l} \approx 2{,}5 \times 10^{-28}\,\mathrm{m}^2.}$$

c) Na zníženie efektivity na $\varepsilon = 90\%$ je potrebných

$$N_{int} = \frac{1-\varepsilon}{q}$$

interakcií v detektore. Počet interakcií v detektore je daný súčinom toku dopadajúcich piónov zo zadania ($R = 10^6 s^{-1}$), času t počas ktorého dopadajú na detektor a pravdepodobnosťou toho, že častica detektorom neprejde:

$$N_{int} = Rt(1 - e^{-d/l}).$$

Po skombinovaní týchto vzťahov vyjadríme hľadaný čas:

$$\boxed{t = \frac{1-\varepsilon}{qR(1 - e^{-d/l})} \approx 11.1 \text{ hodín.}}$$

3. Rozptyl γ-kvanta (7 bodů)

Uvažujme elektricky nabitou částici X o klidové energii $m_X c^2$, která je v laboratorní soustavě v klidu. Na tuto částici nalétá kvantum γ o kinetické energii $T_{\gamma,0}$, které se rozptyluje pod úhlem ϑ vůči původnímu směru svého letu.

a) (1 b) Určete celkovou energii nalétajícího γ-kvanta.

b) (3 b) Určete celkovou a kinetickou energii rozptýleného γ-kvanta v závislosti na úhlu rozptylu.

c) (2 b) Určete celkovou a kinetickou energii rozptýlené částice X v závislosti na úhlu rozptylu.
Nápověda: K výsledku se lze dopracovat i bez použití čtyř-vektorů.

d) (1 b) Kvalifikovaně posuďte, zda celková energie rozptýleného γ-kvanta pro stejný úhel rozptylu ϑ klesne, vzroste nebo zůstane beze změny, nahradíme-li terčíkovou částici její hmotnější „verzí“?

Řešení

a) – Dříve, než kvalitativně popíšeme zadání, si uvědomme, že jelikož je γ-kvantum nehmotné, jeho celková energie je totožná s energií kinetickou, kterou *de facto* známe ze zadání. Formálně zapsáno, pro celkovou energii nalétajícího γ-kvanta platí

$$\boxed{E_{\gamma,0} = T_{\gamma,0}\,.}$$

b) – Položme $c = 1$ a zapišme čtyř-hybnosti jednotlivých částic v soustavě pevně spojené s terčíkovou částicí X jako $P_{\gamma,0} = (E_{\gamma,0}, \boldsymbol{p}_{\gamma,0})$, $P_{X,0} = (m_X, \mathbf{0})$, $P_\gamma = (E_\gamma, \boldsymbol{p}_\gamma)$ a $P_X = (E_X, \boldsymbol{p}_X)$, kde indexem „0" jsme označili veličiny jednotlivých částic v počátečním stavu.

– Rovnost kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$(P_{\gamma,0} + P_{X,0} - P_\gamma)^2 = P_X^2\,, \tag{30}$$

kde pro pravou stranu rovnice (30) jednoduše platí

$$P_X^2 = E_X^2 - \boldsymbol{p}_X^2 = m_X^2\,, \tag{31}$$

zatímco pro levou stranu máme

$$\begin{aligned}(P_{\gamma,0} + P_{X,0} - P_\gamma)^2 &= (E_{\gamma,0} + m_X - E_\gamma)^2 - (\boldsymbol{p}_{\gamma,0} - \boldsymbol{p}_\gamma)^2 \\ &= (E_{\gamma,0}^2 - \boldsymbol{p}_{\gamma,0}^2) + 2E_{\gamma,0}\,m_X + m_X^2 - 2(E_{\gamma,0} + m_X)E_\gamma \\ &\qquad + (E_\gamma^2 - \boldsymbol{p}_\gamma^2) + 2\boldsymbol{p}_{\gamma,0}\cdot\boldsymbol{p}_\gamma \\ &= 2E_{\gamma,0}\,m_X + m_X^2 - 2(E_{\gamma,0} + m_X)E_\gamma + 2p_{\gamma,0}\,p_\gamma\cos\vartheta \\ &= 2m_X(E_{\gamma,0} - E_\gamma) + m_X^2 - 2E_{\gamma,0}\,E_\gamma(1-\cos\vartheta)\,,\end{aligned} \tag{32}$$

kde jsme opakovaně využili relativistického vztahu energie–hybnost a faktu, že úhel mezi směry letu původního a rozptýleného γ-kvanta je ϑ.

– Porovnáním vztahů (31) a (32) pak, po drobných úpravách, dostaneme celkovou energii E_γ rozptýleného γ-kvanta, která je identická s jeho kinetickou energií. Platí

$$\boxed{E_\gamma = T_\gamma = \frac{E_{\gamma,0}}{1 + \dfrac{E_{\gamma,0}}{m_X}(1-\cos\vartheta)} = \frac{E_{\gamma,0}}{1 + \dfrac{2E_{\gamma,0}}{m_X}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}\,,} \tag{33}$$

kde jsme při úpravách využili vztahů $\cos\vartheta = \cos^2\frac{\vartheta}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}$ a $\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \cos^2\frac{\vartheta}{2} = 1$.

c) – Zákon zachování energie říká, že

$$E_{\gamma,0} + m_X = E_\gamma + E_X\,,$$

kde pro celkovou energii E_X rozptýlené částice X platí, že je součtem její klidové m_X a kinetické energie T_X. Platí tak

$$T_X = E_{\gamma,0} - E_\gamma\,,$$

přičemž po jednoduchých úpravách vyjde

$$\boxed{T_X = \frac{\dfrac{E_{\gamma,0}^2}{m_X}(1-\cos\vartheta)}{1 + \dfrac{E_{\gamma,0}}{m_X}(1-\cos\vartheta)} = \frac{\dfrac{2E_{\gamma,0}^2}{m_X}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}{1 + \dfrac{2E_{\gamma,0}}{m_X}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}\,.}$$

– Pro celkovou energii rozptýlené částice X pak platí, dle výše uvedeného, že

$$\boxed{E_X = m_X + T_X = \frac{m_X + \dfrac{2E_{\gamma,0}}{m_X}(m_X + E_{\gamma,0})\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}{1 + \dfrac{2E_{\gamma,0}}{m_X}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}\,.}$$

d) – Za předpokladů ze zadání je pak dle vztahu (33) zřejmé, že při nahrazení částice X její hmotnější „verzí“ celková energie rozptýleného γ-kvanta oproti předchozí situaci vzroste.