Jaderná a subjaderná fyzika: Zápočtová písemná práce č. 1 (z 19. 12. 2022) - Řešení

1. Draslík v lidském těle (7 bodů)

Experimentálně bylo zjištěno, že přírodní draslík obsahuje $\eta_{(^{40}\mathrm{K})} = 0,012\%$ radioaktivního izotopu ^{40}K, který se rozpadá buďto β^- rozpadem ($^{40}\mathrm{K} \to {}^{40}\mathrm{Ca} + e^- + \overline{\nu}_e$) nebo elektronovým záchytem přes excitované jádro argonu ($e^- + {}^{40}\mathrm{K} \to {}^{40}\mathrm{Ar}^* + \nu_e \to \mathrm{Ar} + \gamma + \nu_e$). Měřením počtu elektronů vzniknuvších v β^- rozpadech byla určena příslušná měrná aktivita přírodního draslíku $a_e = 2,7 \cdot 10^4\,\mathrm{Bq} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$. Dále bylo zjištěno, že na sto těchto elektronů připadá dvanáct γ-kvant z elektronového záchytu.

a) (2 b) Určete střední dobu života a poločas rozpadu izotopu ^{40}K.

Izotop ^{40}K je nejvýznamnějším zdrojem radioaktivity uvnitř těl živočichů, tj. i člověka. Jeden kilogram lidského těla obsahuje průměrně $2,5\,\mathrm{g}$ přírodního draslíku. Předpokládejme, že průměrný člověk váží $70\,\mathrm{kg}$ po celou dobu svého života, přičemž se dožije 75 let.

b) (2 b) Určete aktivitu rozpadů izotopu ^{40}K v lidském těle.

c) (1 b) Určete, ke kolika rozpadům izotopu ^{40}K dojde v lidském těle za celý život.

Argon běžně netvoří sloučeniny, takže minerály — ať už pocházející z roztavených hornin nebo rozpuštěné ve vodě — argon neobsahují. Pokud ovšem minerál obsahuje draslík, pak bude argon přeměnou ^{40}K doplňován a zůstane v něm. Předpokládejme tak, že při bloudění kamenolomem jste nalezli minerál, jehož analýzou jste zjistili, že obsahuje $1,2\,\mathrm{g}$ přírodního draslíku a $16\,\mu\mathrm{g}$ argonu ^{40}Ar.

d) (2 b) Za předpokladu, že nedošlo k žádnému úniku argonu z minerálu, určete jeho stáří.

Kilomolová hmotnost draslíku a argonu je $M_\mathrm{K} = 39,089\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{kmol}^{-1}$ a $M_\mathrm{Ar} = 39,087\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{kmol}^{-1}$, respektive. Avogadrova konstanta je $N_\mathrm{A} = 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

Řešení

a) – Určíme nejprve měrnou aktivitu $a_{(^{40}\mathrm{K})}$ izotopu ^{40}K. Ta má, dle zadání, dva příspěvky: a_e, daný emisí elektronu z β^- rozpadu, a a_γ, který symbolizuje příspěvek emise γ-kvanta. Dle zadání dále víme, že na sto vyzářených elektronů připadá dvanáct γ-kvant. Označíme-li tak tento poměr jako $f_{\gamma/e} = 0,12$, platí $a_\gamma = f_{\gamma/e} a_e$, odkud pak pro celkovou měrnou aktivitu izotopu ^{40}K jednoduše máme

$$\boxed{a_{(^{40}\mathrm{K})} = a_e + a_\gamma = a_e(1 + f_{\gamma/e}) = 30\,240\,\mathrm{Bq} \cdot \mathrm{kg}^{-1}\,.}$$

– Dále určíme rozpadovou konstantu $\lambda_{(^{40}\mathrm{K})}$ izotopu ^{40}K, a to ze vztahu

$$a_{(^{40}\mathrm{K})} = \lambda_{(^{40}\mathrm{K})} n_{(^{40}\mathrm{K})}\,, \tag{1}$$

kde $n_{(^{40}\mathrm{K})}$ označuje počet těchto izotopů v jednom kilogramu látky jimi tvořenou, což je de facto ekvivalent objemové hustoty ze cvičení. Evidentně pak platí

$$n_{(^{40}\mathrm{K})} = \eta_{(^{40}\mathrm{K})} \frac{N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{K}} \doteq 1,85 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}^{-1}\,, \tag{2}$$

kde faktor $\eta_{(^{40}\mathrm{K})} = 1,2 \cdot 10^{-4}$ bere do úvahy to, že poměr $N_\mathrm{A}/M_\mathrm{K}$ má význam počtu jader přírodního draslíku v jednom kilogramu takové látky. Dosazením vztahu (2) do (1) tak máme

$$\lambda_{(^{40}\mathrm{K})} = \frac{a_{(^{40}\mathrm{K})}}{n_{(^{40}\mathrm{K})}} \doteq 1,64 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{s}^{-1}\,,$$

takže pro střední dobu života $\tau_{(^{40}\mathrm{K})}$ a poločas rozpadu $T_{1/2,\,(^{40}\mathrm{K})}$ izotopu ^{40}K platí

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{(^{40}\mathrm{K})} &= \frac{1}{\lambda_{(^{40}\mathrm{K})}} = \frac{\eta_{(^{40}\mathrm{K})} N_\mathrm{A}}{a_e(1+f_{\gamma/e})M_\mathrm{K}} \doteq 6{,}11\cdot 10^{16}\,\mathrm{s} \doteq 1{,}94\cdot 10^{9}\,\mathrm{y}\,, \\ T_{1/2,\,(^{40}\mathrm{K})} &= \frac{\ln 2}{\lambda_{(^{40}\mathrm{K})}} = \frac{\eta_{(^{40}\mathrm{K})} N_\mathrm{A}\ln 2}{a_e(1+f_{\gamma/e})M_\mathrm{K}} \doteq 4{,}24\cdot 10^{16}\,\mathrm{s} \doteq 1{,}34\cdot 10^{9}\,\mathrm{y}\,. \end{aligned}}$$

b) – Ze zadání víme, že jeden kilogram lidského těla obsahuje průměrně $2{,}5\cdot 10^{-3}$ kg přírodního draslíku. V lidském těle o hmotnosti 70 kg je ho tak obsaženo celkem $m_\mathrm{K} = 0{,}175$ kg. Pro aktivitu izotopů ^{40}K v lidském těle tak platí

$$\boxed{A_{(^{40}\mathrm{K})} = a_{(^{40}\mathrm{K})} m_\mathrm{K} \doteq 5292\,\mathrm{Bq}\,.} \tag{3}$$

c) – Dle zadání uvažujeme, že člověk žije $75\,\mathrm{y} \doteq 2{,}37\cdot 10^{9}$ s. Vynásobením této hodnoty s hodnotou (3) aktivity rozpadů izotopu ^{40}K v lidkém těle tak zjistíme, ke kolika těmto rozpadům za lidský život dojde. Vyjde

$$\boxed{1{,}25\cdot 10^{13}}$$

rozpadů.

d) – Dle zadání víme, že aktuálně (tj. v době stáří t) je v minerálu obsaženo $m'_\mathrm{K} = 1{,}2\cdot 10^{-3}$ kg přírodního draslíku, zatímco obsah argonu je $m_\mathrm{Ar} = 1{,}6\cdot 10^{-8}$ kg. Dle vztahu (2) dále víme, že minerál aktuálně obsahuje

$$N_{(^{40}\mathrm{K})}(t) = \eta_{(^{40}\mathrm{K})}\frac{m'_\mathrm{K} N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{K}} \doteq 2{,}22\cdot 10^{18} \tag{4}$$

izotopů ^{40}K a

$$N_\mathrm{Ar}(t) = \frac{m_\mathrm{Ar} N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{Ar}} \doteq 2{,}47\cdot 10^{17} \tag{5}$$

izotopů ^{40}Ar.

– Během doby existence minerálu se izotopy ^{40}K dle zadání rozpadaly na jádra ^{40}Ca a ^{40}Ar, přičemž celkový počet rozpadlých izotopů ^{40}K za dobu t je

$$N^{(\mathrm{gone})}_{(^{40}\mathrm{K})}(t) = N_\mathrm{Ca}(t) + N_\mathrm{Ar}(t) = \left(\frac{1}{f_{\gamma/e}} + 1\right) N_\mathrm{Ar}(t) \doteq 2{,}30\cdot 10^{18}\,, \tag{6}$$

kde jsme ve druhém kroku využili informaci ze zadání ohledně poměru četnosti rozpadů izotopu ^{40}K β^- rozpadem a elektronovým záchytem, a následně dosadili dle vztahu (5).

– Počet izotopů ^{40}K při vzniku minerálu je tak dán jednoduše jako součet jejich aktuálního počtu (4) a počtu (6) těch již rozpadlých, tj. $N_{(^{40}\mathrm{K})}(0) = N_{(^{40}\mathrm{K})}(t) + N^{(\mathrm{gone})}_{(^{40}\mathrm{K})}(t) \doteq 4{,}52\cdot 10^{18}$. Z exponenciálního rozpadového zákona pak pro stáří minerálu jednoduše plyne

$$\boxed{t = \frac{1}{\lambda_{(^{40}\mathrm{K})}} \ln\left(\frac{N_{(^{40}\mathrm{K})}(0)}{N_{(^{40}\mathrm{K})}(t)}\right) = \tau_{(^{40}\mathrm{K})} \ln\left(\frac{N_{(^{40}\mathrm{K})}(0)}{N_{(^{40}\mathrm{K})}(t)}\right) \doteq 1{,}38\cdot 10^{9}\,\mathrm{y}\,.}$$

2. Reaktor v Severní Korei (7 bodů)

Severní Korea si v utajení v podzemí v okolí Pchjongjangu vybudovala jaderný reaktor pro výrobu plutonia. Reaktor ale mimo jiné vyzařuje izotropně každou sekundu $6\cdot 10^{20}$ elektronových antineutrin, která projdou vším a lze je tak detekovat ve 150 km vzdáleném detektoru na hranici s Jižní Koreou. Takový detektor je naplněn tekutým scintilátorem se sumárním vzorcem C_6H_{10}. Antineutrina jsou detekována pomocí inverzního beta rozpadu $\bar{\nu}_e + p \to e^+ + n$ na volných protonech (jádrech vodíku) s účinným průřezem $\sigma_{\bar{\nu}p} = 10^{-45}$ m^2.

a) (3 b) Jakou hmotnost musí mít detektor, abychom detekovali 100 antineutrin za den, které stačí na důkaz o existenci reaktoru?

b) (2 b) Severní Korea si uvědomila nedostatek ukrytí a rozhodla se postavit okolo reaktoru olověné stínění. Jaká je střední volná dráha reaktorových antineutrina v olovu, když primárně interaguje s nukleony s účinným průřezem $\sigma_{\bar{\nu}N} = 10^{-44}\,\mathrm{m}^2$? Uvažujte, že jádro olova má 207 nukleonů.

c) (2 b) Jak tlustá vrstva olova by měla být, aby intenzita toku antineutrin po jejím průchodu poklesla na 1/100 původní hodnoty? Lze plán Severní Korei efektivně realizovat?

Kilomolová hmotnost scintilátoru je $M_{\mathrm{C_6H_{10}}} = 82\,\mathrm{kg \cdot kmol^{-1}}$. Hustota olova je $\rho_{Pb} = 11\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ a kilomolová hmotnost olova je $M_{\mathrm{Pb}} = 207\,\mathrm{kg \cdot kmol^{-1}}$. Avogadrova konstanta je $N_{\mathrm{A}} = 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

Řešení

a)

- Hustota toku antineutrin v místě detektoru je celkový počet antineutrin emitovaných reaktorem izotropně podělený plochou sféry s poloměrem rovným vzdálenosti detektoru od reaktoru:

$$\boxed{\phi = \frac{N_{\bar{\nu}}}{4\pi r^2} = \frac{6 \times 10^{20}}{4\pi (1.5 \times 10^5)^2}\,\mathrm{m^{-2}s^{-1}} = 2.12 \times 10^9\,\mathrm{m^{-2}s^{-1}}} \tag{7}$$

- Vzhledem k velmi malému účinnému průřezu interakce antineutrin představuje detektor tenký terč a četnost interakcí pak lze psát jako:

$$R_{\mathrm{int}} = \phi \sigma_{\bar{\nu}p} N_p, \tag{8}$$

kde N_p je počet volných protonů v detektoru. Pro počet interakcí za čas t lze psát:

$$N_{\mathrm{int}} = R_{\mathrm{int}} t = \phi \sigma_{\bar{\nu}p} N_p t. \tag{9}$$

- Počet volných protonů v detektoru lze psát jako počet molekul$\mathrm{C_6H_{10}}$ vynásobených počtem jader vodíku (volných protonů) v molekule, tj. 10:

$$N_p = 10 \times \frac{m_{\mathrm{det}} N_A}{M_{\mathrm{C_6H_{10}}}} \tag{10}$$

- Kombinací Rovnice 9 a Rovnice 10 dostaneme pro hmotnost detektoru:

$$\boxed{m_{\mathrm{det}} = \frac{N_{\mathrm{int}} M_{\mathrm{C_6H_{10}}}}{10 \times \phi \sigma_{\bar{\nu}p} t N_A} = 7.46 \times 10^3\,\mathrm{t}} \tag{11}$$

b)

- Spočteme hustotu nukleonů v olovu jako součin počtu nukleonů v jádře olova, tj. 207, a hustoty jader olova:

$$\boxed{n_N = 207 \times \frac{\rho_{\mathrm{Pb}} N_A}{M_{\mathrm{Pb}}} = 6.6 \times 10^{30}\,\mathrm{m^{-3}}} \tag{12}$$

- Střední volná dráha je pak dána jako:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sigma_{\bar{\nu}N} n_N} = 1.52 \times 10^{13}\,\mathrm{m}} \tag{13}$$

c)

- Intenzita toku antineutrin se řídí exponenciálním zákonem. Pro intenzitu I po průchodu olova o tloušťce d platí:

$$I = I_0 e^{-\frac{d}{\lambda}}, \tag{14}$$

kde I_0 je původní intenzita toku.

– Snadno vyjádříme tloušťku vrstvy jako funkci poměru koneční intenzity ku původní I/I_0:

$$\boxed{d = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)\lambda = 7\times 10^{13}\,\mathrm{m}.} \tag{15}$$

– Taková vzdálenost je mnohokrát větší než 150 km a tak plán na redukci toku antineutrino není takto proveditelný.

3. Rozpad protonu (6 bodů)

Některé teorie fyziky za Standardním modelem předpovídají, že proton je nestabilní a může se rozpadat například na neutrální pion a pozitron ($p \to \pi^0 + e^+$) případně na nabitý kaon a antineutirno ($p \to K^+ + \bar{\nu}$).

a) (1 b) Uvažujme první rozpad protonu v klidu $p \to \pi^0 + e^+$. V jakém poměru jsou velikost hybnosti a v jakém poměru energie pozitronu a pionu?

b) (2 b) Předpokládejme, že pion vyletí s energií 479 MeV. Jakou střední vzdálenost uletí před rozpadem na fotony ($\pi^0 \to \gamma + \gamma$)?

c) (3 b) Uvažujme druhý rozpad $p \to K^+ + \bar{\nu}$, kdy kaon vyletí s energií $E_{K^+} = 599$ MeV a rozpadne se na mion a mionové neutrino $K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Jaká je energie mionu, jestliže pozorujeme, že vyletěl kolmo na původní směr letu kaonu?

Klidová hmotnost protonu je $m_p = 938,3$ MeV, nabitého kaonu $m_{K^+} = 493,7$ MeV, (anti)mionu $m_\mu = 105,7$ MeV, pozitronu $m_{e^+} = 0,511$ MeV, neutrálního pionu $m_{\pi^0} = 135,0$ MeV. (Anti)neurtino a foton považujme za nehmotné. Střední doba život pionu v klidu je $\tau_{\pi^0} = 8,4\cdot 10^{-17}$ s. Rychlost světla je $c = 3\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Řešení

a) – Původní proton stojí. Ze zákona zachování hybnosti pak hybnost pozitronu a pionu musí mít opačný směr a stejnou velikost, tedy:

$$|\overrightarrow{p}_{e^+}| = |\overrightarrow{p}_{\pi^0}|. \tag{16}$$

Jejich poměr pak je:

$$\boxed{\frac{|\overrightarrow{p}_{e^+}|}{|\overrightarrow{p}_{\pi^0}|} = 1.} \tag{17}$$

– Pro čtyřvektory protonu $P_p = (m_p, 0)$, pozitronu $P_{e^+} = (E_{e^+}, p_{e^+})$ a pionu $P_{\pi^0} = (E_{\pi^0}, p_{\pi^0})$, kde p_{e^+} a p_{π^0} jsme označili velikost hybností daných částic, platí:

$$P_p = P_{e^+} + P_{\pi^0}, \tag{18}$$

alternativně

$$\begin{gathered} P_p - P_{e^+} = P_{\pi^0}, \\ (m_p - E_{e^+},\, -p_{e^+}) = (E_{\pi^0}, p_{\pi^0}). \end{gathered} \tag{19}$$

Po umocnění na druhou dostaneme:

$$\begin{gathered} m_p^2 + E_{e^+}^2 + 2m_pE_{e^+} - p_{e^+}^2 = E_{\pi^0}^2 - p_{\pi^0}^2, \\ m_p^2 + m_{e^+}^2 + 2m_pE_{e^+} = m_{\pi^0}^2. \end{gathered} \tag{20}$$

Energie pozitronu pak je:

$$E_{e^+} = \frac{m_p^2 + m_{e^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{2m_p}. \tag{21}$$

Obdobným postupem, nebo ze zákona zachování energie, dostaneme energii pionu:

$$E_{\pi^0} = \frac{m_p^2 + m_{\pi^0}^2 - m_{e^+}^2}{2m_p}. \tag{22}$$

Jejich poměr pak je:

$$\boxed{\frac{m_p^2 + m_{e^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{m_p^2 + m_{\pi^0}^2 - m_{e^+}^2} = 0.96.} \tag{23}$$

b) – Pion urazí dráhu:

$$s = \beta c t, \tag{24}$$

kde β je rychlost částice v jednotkách rychlosti světla ve vakuu a t je čas před rozpadem pozorovaný v laboratorní soustavě, vůči níž se pion pohybuje.

– Teorie relativity nám říká, že v laboratorní soustavě dochází k dilataci času vůči soustavě spojené s pionem (pion je v klidu). Platí, že:

$$t = \gamma \tau, \tag{25}$$

kde γ je Lorentzův faktor.

– Za pomoci hmotnosti, hybnosti a energie částice lze vyjádřit rychlost $\beta = \frac{p}{E}$ a Lorentzův faktor $\gamma = \frac{E}{m}$.

– Po kombinaci vztahů dostaneme pro střední uraženou dráhu pionu před rozpadem:

$$\boxed{s = \beta\gamma c\tau = \frac{p}{m} c\tau = \frac{\sqrt{E_{\pi^0}^2 - m_{\pi^0}^2}}{m_{\pi^0}} c\tau = 85.8\,\mathrm{nm}} \tag{26}$$

c) – Pro čtyřvektory protonu kaonu $P_{K^+} = (E_{K^+}, \overrightarrow{p}_{K^+})$, mionu $P_{\mu^+} = (E_{\mu^+}, \overrightarrow{p}_{\mu^+})$ a neutrina $P_\nu = (E_\nu, \overrightarrow{p}_\nu)$ platí:

$$\begin{aligned} P_{K^+} &= P_{\mu^+} + P_\nu, \\ P_{K^+} - P_{\mu^+} &= P_\nu, \\ (E_{K^+} - E_{\mu^+}, \overrightarrow{p}_{K^+} - \overrightarrow{p}_{\mu^+}) &= (E_\nu, \overrightarrow{p}_\nu). \end{aligned} \tag{27}$$

Po umocnění na druhou dostaneme:

$$\begin{gathered} E_{K^+}^2 + E_{\mu^+}^2 - 2E_{K^+}E_{\mu^+} - |\overrightarrow{p}_{K^+}|^2 - |\overrightarrow{p}_{\mu^+}|^2 + 2|\overrightarrow{p}_{K^+}||\overrightarrow{p}_{\mu^+}|\cos(\alpha) = E_\nu^2 - |\overrightarrow{p}_\nu|^2, \\ m_{K^+}^2 + m_{\mu^+}^2 - 2E_{K^+}E_{\mu^+} = 0 \end{gathered} \tag{28}$$

kde jsme označili α úhel mezi směrem letu kaonu a muonu, pro který ale ze zadání platí $\cos\alpha = 0$, a využili vztahu $E^2 = |\overrightarrow{p}|^2 + m^2$. Z toho vyjádříme energii mionu jako:

$$\boxed{E_{\mu^+} = \frac{m_{K^+}^2 + m_{\mu^+}^2}{2E_{K^+}} = 212.8\,\mathrm{MeV}} \tag{29}$$