

NOFY029: Jaderná a částicová fyzika

Sbírka řešených příkladů ke cvičení

Tomáš Kadavý

*Ústav částicové a jaderné fyziky, Univerzita Karlova
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8, Česká republika*

E-mail: kadavy@ipnp.mff.cuni.cz

ABSTRAKT: Tato sbírka řešených příkladů představuje doprovodný text pro paralelku cvičení „Út 9:00 (liché týdny)“ z předmětu „NOFY029: Jaderná a částicová fyzika“, vyučovaného během zimního semestru 2022/23 na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Obsah

Úvod	2
1 Radioaktivita	4
1.1 Teorie	4
1.2 Cvičení č. 1 (11. 10. 2022)	6
1.3 Cvičení č. 2 (25. 10. 2022)	23
2 Účinný průřez	42
2.1 Teorie	42
2.2 Cvičení č. 3 (8. 11. 2022)	45
2.3 Cvičení č. 4 (22. 11. 2021)	61
3 Kinematika	73
3.1 Teorie	73
3.2 Cvičení č. 5 (6. 12. 2022)	76
3.3 Cvičení č. 6 (13./20. 12. 2022)	96
A Zápočtové písemné práce (2020/2021)	107
A.1 Termín č. 1 (18. 12. 2020)	107
A.2 Termín č. 2 (4. 1. 2021)	113
A.3 Termín č. 3 (14. 1. 2021)	118
A.4 Termín č. 4 (27. 1. 2021)	123
A.5 Termín č. 5 (9. 2. 2021)	128
B Domácí úkoly (2020/2021)	133
B.1 Neutronová hvězda	133
B.2 Slunce	137
B.3 Kontaminace neutrinového detektoru	140
B.4 Radioaktivita v nukleární medicíně	143
B.5 Antineutrína ze supernovy SN1987A	147
C Výběr starších zápočtových příkladů	151
C.1 Urychlovač	151
C.2 Kosmické záření I	152
C.3 Kosmické záření II	154
C.4 Rozpad protonu	155
C.5 Rozpad neutrálního pionu	157
Literatura	158

Úvod

Studentky a studenti bakalářského studia obecné fyziky na Matfyzu se musí vyrovnat se spoustou překážek, které jim jejich studium přináší. Ať už se jedná o jídlo v menze, sepisování protokolů do brzkých ranních hodin či pendlování mezi Trojou a Karlovem. Ačkoliv v době koronaviru odpadly některé zmíněné komplikace, nečekaná, ovšem o to větší rána pak přijde na začátku pátého semestru, kdy posluchači zjistí, že cvičení k předmětu „NOFY029: Jaderná a částicová fyzika“ se koná jen jednou za 14 dní. Ačkoliv se někteří brzy smíří s krutou realitou (občas až příliš dobře), jiní to pokládají za jednu z největších nespravedlností v jejich dosavadním matfyzáckém životě.

Text, který máte před sebou, odpovídá paralelce „Út 9:00 (liché týdny)“, kterou v zimním semestru akademického roku 2022/23 vedu, ale může být užitečný i pro další paralelky. Samotný text však vznikl průběžně již během zimního semestru 2020/21 jakožto doplňkový studijní materiál pro mou tehdejší paralelku z důvodu distančního způsobu výuky.

Jako v minulých letech, i letos je naprostá většina příkladů, probíraných v rámci cvičení, přejata z knihy doc. Noska „Jádra a částice. Řešené příklady“, viz reference [1]. Nabízí se tak zřejmá otázka, jaký je důvod pro sepisování tohoto textu.

Knih [1] obsahuje celkem 460 řešených příkladů rozdělených do osmi kapitol. Je samozřejmé, že takový počet příkladů není možné obsáhnout v rámci cvičení ani v rámci domácí přípravy. Navíc, některé příklady jsou pro účely cvičení buďto příliš jednoduché nebo naopak příliš složité (tj. teorie k takovým příkladům není přednášena v rámci bakalářského studia a je ponechána až pro studenty magisterského oboru Částicová a jaderná fyzika) či jinak komplexní (řešení těchto příkladů nemusí být nutně složité, ale časová náročnost je pro cvičení zkrátka nevhodná — např., když k vyřešení daného příkladu je třeba explicitně navázat na řešení předchozích úloh). Účelem tohoto textu je proto pomoci se studentům v těchto příkladech zorientovat a vybrat „zlatou střední cestu“, tedy takové úlohy, které jsou pro cvičení i domácí přípravu vhodné jak složitostí, tak časovou náročností, a které rovněž vhodně doplňují látku probíranou na přednáškách.

Dále pak je účel tohoto textu ten, že zde uvedená řešení příkladů bývají diskutována o něco detailněji, než je tomu v knize [1]. Jinými slovy, tento text klade důraz na pochopení postupu a různých souvislostí pokud možno již při prvním čtení. Z tohoto důvodu je před každou ze třech tematických částí (radioaktivita, účinný průřez, kinematika) uveden přehled základní teorie a všech potřebných vztahů.

Pro pohodlí čtenáře níže uvádím původní značení příkladů dle knihy [1], které byly do této sbírky vybrány jako ty nejvhodnější pro účely našeho cvičení. Je však třeba podotknout, že leckdy byla zadání příkladů vhodně upravena, a to buďto změnou formulace, doplněním potřebných veličin nebo sloučením vícero příkladů do jednoho.

- Kapitola 1: Radioaktivita

- Cvičení č. 1: A1, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A11, A12, A16, A49.
- Cvičení č. 2: A17, A18, A20, A21, A31, A32, A34, A40, A41, A43.

- Kapitola 2: Účinný průřez
 - Cvičení č. 3: B4, B5, B6, B8, B11, B21, B22, B27, H40, H41.
 - Cvičení č. 4: B23, B25, B31, B35, C2, C19, C34, C37, C42, C43, C46.
- Kapitola 3: Kinematika
 - Cvičení č. 5: D2, D5, D6, D7, D16, D18, D27, D28, D30, E42, E43, F19, F22, F60, F68, H17.
 - Cvičení č. 6: F1, F2, F3, F35, F37, F39, F42, F54, F59, F61.

Na závěr je mi potěšením zmínit ty, kteří se různým způsobem přičinili o vylepšení této sbírky, a to buďto nalezením chyby či různým námětem k doplnění. Za akademický rok 2020/21 se jedná o Veroniku Červenkovou a Ondřeje Janošku, za rok 2021/22 pak o Jonáše Dujavu a Michala Kovaľa, a za rok 2021/22 o Bedřicha Roskovce.

„Disclaimer“

- Text je průběžně upravován. Přesto se v něm mohou vyskytnout chyby nebo překlepy. Naleznete-li v textu jakoukoliv nepřesnost, kontaktujte autora.
- Text využívá L^AT_EX šablony časopisu JHEP (Journal of High-energy Physics).

6. prosince 2022 v Praze

Tomáš Kadavý

1 Radioaktivita

Radioaktivita, resp. radioaktivní přeměna, je fyzikální jev, při němž dochází k vnitřní přeměně složení nebo energetického stavu atomových jader (obecně budeme hovořit o „částicích“, ačkoliv se nejedná o částice v pravém smyslu slova — stejně tak částicí rozumíme, dle kontextu, jak jednu jedinou částici tak i jejich systém). Toto chování je doprovázeno emitováním ionizující záření. Uvedená definice bude pro potřeby cvičení zcela dostačující, neboť předmětem našeho zájmu nebude samotný mechanismus radioaktivní přeměny jako spíše časový vývoj počtu rozpadajících se částic a s tím další související veličiny.

1.1 Teorie

Pravděpodobnost rozpadu a rozpadový zákon

- Uvažujme částici podléhající radioaktivnímu rozpadu. Pak pro pravděpodobnosti, že se částice za infinitezimální časový interval dt rozpadne (1.1) či nerozpadne (1.2), platí

$$\boxed{dp_A = \lambda dt}, \quad (1.1)$$

respektive

$$\boxed{dp_N = 1 - \lambda dt}, \quad (1.2)$$

kde λ je rozpadová konstanta, která charakterizuje pravděpodobnost rozpadu vztaženou na jednotku času, a jejíž jednotkou je $[\lambda] = s^{-1}$.

- Pravděpodobnost, že se částice nerozpadne za dobu t je dána vztahem (1.11). Ekvivalentně, pro pravděpodobnost rozpadu částice za dobu t platí vztah (1.12). Poznámeme, že mezi dobou t a infinitezimálním časovým úsekem dt platí $t \gg dt$.
- Exponenciální rozpadový zákon (1.21), neboli zákon radioaktivní přeměny, charakterizuje časový vývoj počtu radioaktivních částic.

Poločas rozpadu a střední doba života

- Poločas rozpadu, daný vztahem (1.13), je takový čas, po jehož uplynutí je pravděpodobnost rozpadu částice stejná jako pravděpodobnost, že k jejímu rozpadu nedojde. Jinými slovy, po uplynutí časového úseku o délce poločasu rozpadu klesne původní počet radioaktivních částic na polovinu.
- Střední doba života (1.19) radioaktivní částice je průměrná doba mezi jejími dvěma po sobě následujícími rozpady. Jinými slovy, jedná se o průměrnou dobu setrvání radioaktivního vzorku v daném nestabilním stavu.

Aktivita

- Aktivita $A(t)$ vzorku vyjadřuje rychlost radioaktivní přeměny. Uvažujeme-li systém částic stejného druhu podléhající radioaktivnímu rozpadu (tj. nedochází-li ke změně

počtu těchto částic jiným způsobem než právě jejich rozpadem), aktivitu definujeme jako záporně vzatou časovou derivaci počtu rozpadajících se částic:

$$\boxed{A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}}. \quad (1.3)$$

- Jednotkou aktivity je becquerel, přičemž tato jednotka je definovaná jako aktivita radioaktivní látky, v níž dojde k jedné přeměně atomového jádra za sekundu. Platí tak $[A] = 1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$. Dříve se též užívalo jednotky curie, přičemž $1 \text{ Ci} \doteq 3,66 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$.

- Dosazením za časový vývoj počtu rozpadajících se částic dle (1.21) můžeme vztah (1.3) upravit jako

$$\boxed{A(t) = \lambda N(t)}. \quad (1.4)$$

- Zdůrazněme, že rovnost mezi pravými stranami rovnic (1.3) a (1.4) platí právě pro takový systém částic, ve kterém se tyto částice radioaktivně rozpadají a jejich počet není ovlivňován žádným jiným způsobem.
- Alternativně lze vztah (1.4) přepsat do tvaru

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\lambda t}}, \quad (1.5)$$

kde $A_0 = \lambda N_0$ je počáteční aktivita.

- Dle výše uvedeného je zřejmé, že aktivita daného systému rozpadajících se částic je kladná veličina („čím více radioaktivních částic vzorek obsahuje, tím více se jich za sekundu rozpadne, a tím je aktivita vyšší“), a proto je v její definici (1.3) derivace se záporným znaménkem.
 - Alternativně lze vztah (1.3) zapsat také pomocí absolutní hodnoty zmíněné derivace — v současně uvažovaném případě systému částic podléhajících pouze radioaktivnímu rozpadu jde o zcela ekvivalentní definici, která však může být matoucí, počítáme-li aktivitu částic v kaskádovém rozpadu, kdy je počet částic průběžně doplňován (viz příklady č. 16 a 19).
 - Pokud bychom v definičním vztahu (1.3) záporné znaménko nevzali do úvahy, byla by aktivita záporná veličina. Dle požadovaného významu aktivity by to však znamenalo, že nedochází k poklesu počtu částic jejich radioaktivním rozpadem, ale naopak k jejich produkci.
 - Pro stabilní částice, které ze své podstaty radioaktivnímu rozpadu nepodléhají, platí, že jejich aktivita je nulová (v takovém případě nemá smysl dosazovat počet stabilních jader do vztahů (1.3) a (1.4) — tyto vztahy operují pouze s aktuálním počtem radioaktivně se rozpadajících částic, nikoliv s jejich počtem v obecném smyslu). Alternativně lze říci, že rozpadová konstanta stabilních částic je nulová.

- Vztáhneme-li aktivitu radioaktivní látky na jednotku hmotnosti, mluvíme o měrné aktivitě $a(t)$, přičemž

$$a(t) = \frac{A(t)}{m}, \quad (1.6)$$

takže jednotkou měrné aktivity je samozřejmě $[a] = \text{Bq} \cdot \text{kg}^{-1}$. Uvědomme si, že díky vztahu (1.6) platí pro časový vývoj měrné aktivity vztah podobný (1.5), tj.

$$a(t) = a_0 e^{-\lambda t}, \quad (1.7)$$

kde a_0 je počáteční měrná aktivita.

- Pro počáteční počet radioaktivních částic o celkové hmotnosti m pak platí, že $N_0 = nV$, kde n je objemová hustota těchto částic a V je charakteristický objem, který tyto částice zabírají.
- Přepíšeme-li objem jako $V = m/\rho$, pro počáteční počet radioaktivních částic máme

$$N_0 = \frac{mN_A}{M_{\text{mol}}}, \quad (1.8)$$

kde M_{mol} je kilomolová hmotnost látky složené z těchto částic.

- Dosazením tohoto vztahu do (1.6) pak, s využitím vztahů (1.5) a (1.7), máme pro počáteční měrnou aktivitu vztah

$$a_0 = \frac{\lambda N_A}{M_{\text{mol}}}. \quad (1.9)$$

- V souvislosti se vztahem (1.9) se poměr $\frac{N_A}{M_{\text{mol}}}$ nazývá měrným množstvím radioaktivní látky a jeho jednotkou je kg^{-1} .

1.2 Cvičení č. 1 (11. 10. 2022)

Příklad č. 1. Odvoďte exponenciální rozpadový zákon za předpokladu, že rozpad částice je statistický proces a pravděpodobnost dp_A , že se částice rozpadne za infinitezimální časový úsek dt , je $dp_A = \lambda dt$, kde λ je rozpadová konstanta. Jaký je vztah mezi rozpadovou konstantou λ , poločasem rozpadu $T_{1/2}$ a střední dobou života τ ?

Řešení

- Začneme s odvozením exponenciálního rozpadového zákona.
 - Označme časový úsek, kterým prochází nějaká částice, jako t . Hledaný vztah, popisující pravděpodobnost rozpadu této částice při průchodu časovým úsekem t , určíme jako pravděpodobnost toho, že částice projde tento úsek bez toho, aniž by se rozpadla. Takovou pravděpodobnost pak označíme jako $P_N(t)$.
 - Úsek délky t nyní rozdělme na m infinitezimálních časových intervalů dt , a tedy $t = m dt$, přičemž pro každý takový infinitezimální časový interval předpokládáme, že $dt \ll t$. Pro počet těchto intervalů pak platí, že $m \rightarrow \infty$.

- Předpokládáme dále, že pravděpodobnost rozpadu je na historii nezávislý jev, a tudíž pravděpodobnost rozpadu částice v libovolném z těchto intervalů není ovlivněna průchodem předchozími časovými intervaly. Ze zadání víme, že pravděpodobnost toho, že na infinitezimálním časovém úseku dt dojde k rozpadu částice, je $dp_A = \lambda dt$. Neboli, pravděpodobnost toho, že na stejném intervalu k rozpadu nedojde, je $dp_N = 1 - \lambda dt$.
- Pravděpodobnost $P_N(t)$ toho, že částice projde časový úsek t bez rozpadu, je pak podmíněnou pravděpodobností toho, že se částice nerozpadne na žádném z m intervalů. Tedy, taková pravděpodobnost je pak dána m -krát vynásobenou pravděpodobnostmi dp_N , resp.

$$P_N(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} (dp_N)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \lambda dt)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{m}\right)^m, \quad (1.10)$$

kde jsme využili toho, že $dt = t/m$.

- Poslední limita je pak známým vztahem pro mocninu Eulerova čísla s exponentem $-\lambda t$, a tedy pravděpodobnost toho, že se částice nerozpadne na časovém úseku délky t je

$$\boxed{P_N(t) = e^{-\lambda t}}. \quad (1.11)$$

- Ekvivalentně vztahu (1.11), pravděpodobnost, že se částice rozpadne na časovém úseku délky t , je

$$\boxed{P_A(t) = 1 - e^{-\lambda t}}. \quad (1.12)$$

- Nyní odvodíme poločas rozpadu.

- Poločasem $T_{1/2}$ rozpadu rozumíme takový čas, po jehož uplynutí je pravděpodobnost rozpadu částice stejná jako pravděpodobnost, že k rozpadu nedojde. Jinými slovy, s užitím pravděpodobností (1.11) a (1.12), pro poločas rozpadu platí

$$P_A(T_{1/2}) = P_N(T_{1/2}).$$

- Vyřešením této rovnice pak máme hledaný vztah pro poločas rozpadu ve tvaru

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}. \quad (1.13)$$

- Nakonec odvodíme střední dobu života.

- Formálně řečeno, střední doba života τ částice je průměrná doba mezi jejími dvěma po sobě následujícími rozpady.
- Z matematického hlediska lze na střední dobu života taktéž nahlížet jako na střední hodnotu času t (formálním jazykem statistiky se jedná o tzv. první moment náhodné veličiny t), a můžeme tak pro ní psát

$$\tau = \int_0^{\infty} t \rho(t) dt, \quad (1.14)$$

kde $\rho(t)$ je tzv. hustota pravděpodobnosti rozpadu na infinitezimálním okolí okamžiku t , udávající pravděpodobnostní charakter střední doby života, a kde integrujeme přes všechny možné hodnoty času t .

- Hustotu pravděpodobnosti rozpadu definujeme následovně. Spočtěme nejdříve, jaká je pravděpodobnost $dP_A(t)$ toho, že se částice rozpadne na infinitezimálním okolí bodu t . Taková pravděpodobnost je určena dvěma faktory. Prvním faktorem je pravděpodobnost $P_N(t)$ toho, že částice přežije časový úsek t bez rozpadu. Druhým faktorem je pak pravděpodobnost $dp_A(t)$, že se částice rozpadne na infinitezimálním okolí okamžiku t právě až po přežití časového úseku t . Jelikož celková pravděpodobnost $dP_A(t)$ je podmíněná splněním platností obou zmíněných faktorů, můžeme užitím vztahů (1.1) a (1.11) pro hledanou pravděpodobnost psát

$$dP_A(t) = P_N(t) dp_A(t) = \lambda e^{-\lambda t} dt, \quad (1.15)$$

přičemž hustotu pravděpodobnosti rozpadu v infinitezimálním okolí okamžiku t definujeme jako

$$dP_A(t) \equiv \rho(t) dt,$$

a tedy

$$\boxed{\rho(t) = \lambda e^{-\lambda t}.} \quad (1.16)$$

- Dosazením (1.16) do definičního vztahu (1.14) máme

$$\tau = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt, \quad (1.17)$$

kde jsme před integrál vytknuli na času nezávislou rozpadovou konstantu.

- Zbývá nám tak vyčíslit příslušný integrál ve vztahu (1.17). Ujijeme metody integrace per-partes, přičemž označíme $u \equiv t$ a $v' \equiv e^{-\lambda t}$. Pak tedy platí $u' = 1$ a $v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$. Integrál ve vztahu (1.17) tak lze spočítat jednoduše jako

$$\int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} \underbrace{[t e^{-\lambda t}]_0^{\infty}}_{=0} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda^2} \underbrace{[e^{-\lambda t}]_0^{\infty}}_{=-1} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (1.18)$$

- Konečně, dosazením (1.18) do (1.17) máme hledaný vztah pro střední dobu života částice

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda}.} \quad (1.19)$$

- Hledaná souvislost mezi poločasem rozpadu a střední dobou života částice je evidentně, dle (1.13) a (1.19),

$$\boxed{T_{1/2} = \tau \ln 2.} \quad (1.20)$$

Poznámka č. 1.

- Vývoj počtu radioaktivních částic v čase t je možno popsat diferenciální rovnicí

$$dN(t) = -\lambda N(t) dt,$$

jejíž řešení je možné najít ve tvaru

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}, \quad (1.21)$$

kde N_0 je počet částic v čase $t = 0$. Vztahu (1.21) říkáme rozpadový zákon, resp. zákon radioaktivní přeměny. Vidíme tak, že časový vývoj počtu rozpadajících se radioaktivních částic je modulován exponenciálním faktorem, který je identický s pravděpodobností (1.11).

- Pro úplnost zmiňme, že vztah (1.13) je možné odvodit rovněž ze znalosti faktu, že po uplynutí časového úseku o délce poločasu rozpadu klesne původní počet radioaktivních částic na polovinu. Platí tak, dle (1.21),

$$N(T_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0.$$

Příklad č. 2. Radioaktivní vzorek obsahuje v čase $t = 0$ právě N_0 částic. Rozpadová konstanta je λ . Najděte rozdělení pravděpodobnosti pro počet rozpadlých a nerozpadlých částic za dobu t . Jaká je střední hodnota a rozptyl těchto veličin?

Řešení

- Dle zadání máme v čase $t = 0$ právě N_0 částic. Předpokládejme, že za dobu t se rozpadne právě M částic z původního počtu, a že tedy $N_0 - M$ částic se za tuto dobu nerozpadne.
- Připomeňme, že pravděpodobnost $P_N(t)$, že se částice za dobu t nerozpadne, je dána vztahem (1.11), zatímco pro pravděpodobnost $P_A(t)$, že se částice po uplynutí doby t rozpadne, platí vztah (1.12).
- Zkonstruujme nejprve pravděpodobnost $P_M \equiv P_M(N_0, t)$ toho, že za dobu t se rozpadlo právě M částic z N_0 .
 - Pravděpodobnost, že po uplynutí doby t najdeme M z N_0 částic rozpadlých je tedy podmíněnou pravděpodobností, která je úměrná součinu M pravděpodobností rozpadu (1.12) a součinu $N_0 - M$ pravděpodobností (1.11), že k rozpadu nedošlo.
 - Zbývá ovšem určit konstantu úměrnosti. Uvědomme si, že v podstatě vybíráme M prvků z N_0 , přičemž na výběru nezáleží (tj. je irelevantní, v jakém pořadí se která částice rozpadla) a každá rozpadnuvší se částice se ve výběru musí vyskytovat právě jednou. Konstantou úměrnosti je tedy faktor ve tvaru kombinačního čísla $\binom{N_0}{M}$, vyjadřující počet kombinací výběru M prvků z N_0 bez opakování.

- Tedy, pravděpodobnost, že za dobu t se rozpadlo právě M částic, je dána vztahem (pro jednoduchost zápisu pišme $P_A \equiv P_A(t)$ a $P_N \equiv P_N(t)$)

$$P_M = \binom{N_0}{M} P_A^M P_N^{N_0-M}.$$

- Přepíšeme-li P_N jako $1 - P_A$, máme hledané pravděpodobnosti rozdělení pro počet rozpadlých částic ve tvaru binomického rozdělení

$$P_M = \binom{N_0}{M} P_A^M (1 - P_A)^{N_0-M}. \quad (1.22)$$

- Uvědomme si dále, že vysčítáme-li přes všechny pravděpodobnosti nalezení M rozpadlých částic, dostaneme pravděpodobnost jistoty, tj.

$$\sum_{M=0}^{N_0} P_M = 1. \quad (1.23)$$

- Spočítejme nyní střední hodnotu $\langle M \rangle$ počtu rozpadlých částic M .

- Rozdělení pravděpodobnosti počtu rozpadlých částic (1.22) je diskrétní, což je zřejmé, jelikož počet částic musí být celé nezáporné číslo. Střední hodnotu $\langle M \rangle$ je tak třeba spočítat jako součin MP_M vysčítaný přes všechny možné hodnoty M (vzpomeňme např. na střední dobu života, což je střední hodnota času, v příkladu č. 1, kde jsme namísto sumace integrovali).
- Jelikož počet rozpadlých částic může ležet kdekoliv v intervalu od nuly (žádná částice se za dobu t nerozpadla) až po N_0 (za dobu t se rozpadly všechny částice), platí

$$\langle M \rangle = \sum_{M=0}^{N_0} MP_M. \quad (1.24)$$

- Dosadíme tedy za P_M dle (1.22) a budeme tento výraz dále upravovat:

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \sum_{M=0}^{N_0} MP_M \\ &= \sum_{M=1}^{N_0} MP_M \\ &= \sum_{M=1}^{N_0} M \binom{N_0}{M} P_A^M (1 - P_A)^{N_0-M} \\ &= \sum_{M=1}^{N_0} M \frac{N_0!}{M! (N_0 - M)!} P_A^M (1 - P_A)^{N_0-M} \\ &= \sum_{M=1}^{N_0} \frac{N_0!}{(M-1)! (N_0 - M)!} P_A^M (1 - P_A)^{N_0-M} \\ &= N_0 P_A \sum_{M=1}^{N_0} \frac{(N_0 - 1)!}{(M-1)! (N_0 - M)!} P_A^{M-1} (1 - P_A)^{N_0-M}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

kde jsme v prvním kroku využili toho, že první člen sumace je identicky nulový, takže lze začít sčítat až od $M = 1$, následně jsme dosadili za P_M , rozepsali kombinační číslo a nakonec jsme před sumační znaménko vhodně vytkli členy, které nezávisí na proměnné M , přes kterou se sčítá.

- Označme dále $N'_0 \equiv N_0 - 1$. Jelikož ve výrazu (1.25) je $M \in \langle 1, N_0 \rangle$, pak $M - 1 \in \langle 0, N_0 - 1 \rangle$, resp. $M - 1 \in \langle 0, N'_0 \rangle$. Označíme-li tedy $M' \equiv M - 1$, můžeme psát

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle &= N_0 P_A \sum_{M'=0}^{N'_0} \frac{N'_0!}{M'!(N'_0 - M')!} P_A^{M'} (1 - P_A)^{N'_0 - M'} \\
&= N_0 P_A \sum_{M'=0}^{N'_0} \binom{N'_0}{M'} P_A^{M'} (1 - P_A)^{N'_0 - M'} \\
&= N_0 P_A \sum_{M'=0}^{N'_0} P_{M'}, \tag{1.26}
\end{aligned}$$

kde jsme nejprve zlomek upravili zpět na kombinační číslo a následně si všimli toho, že jsme zreprodukovali tvar pravděpodobnostního rozdělení (1.22).

- S využitím vztahu (1.23) a (1.12) tak pro střední hodnotu rozpadlých částic platí

$$\boxed{\langle M \rangle = N_0 P_A = N_0 (1 - e^{-\lambda t})}. \tag{1.27}$$

- Spočítejme nyní rozptyl σ_M^2 počtu rozpadlých částic M .

- Pro rozptyl σ_M^2 platí

$$\sigma_M^2 = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2, \tag{1.28}$$

a jelikož $\langle M \rangle$ už známe, stačí spočítat $\langle M^2 \rangle$.

- Ekvivalentně jako v případě výše, máme postupně

$$\begin{aligned}
\langle M^2 \rangle &= \sum_{M=0}^{N_0} M^2 P_M \\
&= \sum_{M=1}^{N_0} M^2 P_M \\
&= \sum_{M=1}^{N_0} M^2 \binom{N_0}{M} P_A^M (1 - P_A)^{N_0 - M} \\
&= \sum_{M=1}^{N_0} M^2 \frac{N_0!}{M!(N_0 - M)!} P_A^M (1 - P_A)^{N_0 - M} \\
&= \sum_{M=1}^{N_0} M \frac{N_0!}{(M - 1)!(N_0 - M)!} P_A^M (1 - P_A)^{N_0 - M} \\
&= N_0 P_A \sum_{M=1}^{N_0} M \frac{(N_0 - 1)!}{(M - 1)!(N_0 - M)!} P_A^{M-1} (1 - P_A)^{N_0 - M}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N_0 P_A \sum_{M=1}^{N_0} [1 + (M-1)] \frac{(N_0-1)!}{(M-1)!(N_0-M)!} P_A^{M-1} (1-P_A)^{N_0-M} \\
&= N_0 P_A \underbrace{\sum_{M=1}^{N_0} \frac{(N_0-1)!}{(M-1)!(N_0-M)!} P_A^{M-1} (1-P_A)^{N_0-M}}_{=1} + \\
&+ N_0 P_A \sum_{M=1}^{N_0} (M-1) \frac{(N_0-1)!}{(M-1)!(N_0-M)!} P_A^{M-1} (1-P_A)^{N_0-M}, \quad (1.29)
\end{aligned}$$

kde hodnota součtu v předposledním řádku plyne dle (1.25), (1.26) a (1.23).

- Všimněme si nyní, že ve druhém členu v (1.29) je první člen sumace opět nulový. Můžeme tak začít počítat od $M=2$, a tedy

$$\begin{aligned}
\langle M^2 \rangle &= N_0 P_A + N_0 P_A \sum_{M=2}^{N_0} (M-1) \frac{(N_0-1)!}{(M-1)!(N_0-M)!} P_A^{M-1} (1-P_A)^{N_0-M} \\
&= N_0 P_A + N_0 P_A \sum_{M=2}^{N_0} \frac{(N_0-1)!}{(M-2)!(N_0-M)!} P_A^{M-1} (1-P_A)^{N_0-M} \\
&= N_0 P_A + N_0(N_0-1) P_A^2 \sum_{M=2}^{N_0} \frac{(N_0-2)!}{(M-2)!(N_0-M)!} P_A^{M-2} (1-P_A)^{N_0-M}. \quad (1.30)
\end{aligned}$$

- Označme dále $N_0'' \equiv N_0 - 2$. Jelikož ve výrazu (1.30) je $M \in \langle 2, N_0 \rangle$, pak $M-2 \in \langle 0, N_0-2 \rangle$, resp. $M-2 \in \langle 0, N_0'' \rangle$. Označíme-li tedy $M'' \equiv M-2$, můžeme psát

$$\begin{aligned}
\langle M^2 \rangle &= N_0 P_A + N_0(N_0-1) P_A^2 \sum_{M''=0}^{N_0''} \frac{N_0''!}{M''!(N_0''-M'')!} P_A^{M''} (1-P_A)^{N_0''-M''} \\
&= N_0 P_A + N_0(N_0-1) P_A^2 \sum_{M''=0}^{N_0''} \binom{N_0''}{M''} P_A^{M''} (1-P_A)^{N_0''-M''} \\
&= N_0 P_A + N_0(N_0-1) P_A^2 \sum_{M''=0}^{N_0''} P_{M''}. \quad (1.31)
\end{aligned}$$

- Opět s využitím vztahu (1.23) pak pro (1.31) po drobné úpravě platí

$$\langle M^2 \rangle = N_0 P_A [1 + (N_0-1) P_A]. \quad (1.32)$$

- Dosazením (1.27) a (1.32) do (1.28) tak pro rozptyl počtu rozpadlých částic máme, po jednoduché algebraické úpravě,

$$\boxed{\sigma_M^2 = N_0 P_A (1 - P_A) = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) e^{-\lambda t}}. \quad (1.33)$$

- Konečně, spočítejme střední hodnotu $\langle N \rangle$ a rozptyl σ_N^2 počtu nerozpadlých částic N .

– Jelikož $N = N_0 - M$ a N_0 je konstanta udávající počáteční počet částic, platí

$$\begin{aligned}\langle N \rangle &= \langle N_0 - M \rangle = N_0 - \langle M \rangle, \\ \langle N^2 \rangle &= \langle (N_0 - M)^2 \rangle = \langle N_0^2 - 2N_0M + M^2 \rangle = N_0^2 - 2N_0\langle M \rangle + \langle M^2 \rangle.\end{aligned}\quad (1.34)$$

– Dosazením dle (1.27) a (1.32) do (1.34) tak máme

$$\boxed{\langle N \rangle = N_0(1 - P_A) = N_0 e^{-\lambda t}}, \quad (1.35)$$

a

$$\langle N^2 \rangle = N_0(1 - P_A)[P_A + N_0(1 - P_A)],$$

tj. dle vztahu ekvivalentnímu (1.28) pak máme

$$\boxed{\sigma_N^2 = N_0 P_A(1 - P_A) = N_0(1 - e^{-\lambda t})e^{-\lambda t}}. \quad (1.36)$$

- Vidíme tak, že ačkoliv střední hodnoty $\langle M \rangle$ a $\langle N \rangle$ rozpadlých a nerozpadlých částic jsou rozdílné, viz. (1.27) a (1.35), rozptyly těchto veličin jsou stejné, viz. (1.33) a (1.36).

Příklad č. 3. Vzorek obsahuje v čase $t = 0$ právě N_0 částic, které se rozpadají s rozpadovou konstantou λ . Najděte rozdělení pravděpodobnosti pro počet rozpadlých částic M a počet zbývajících částic N za předpokladu, že je vzorek sledován po krátký čas t a počáteční počet částic je velmi velký. Dále, jaké jsou za těchto podmínek střední hodnoty a rozptyly počtu rozpadlých a nerozpadlých částic?

Řešení

- Jde o úlohu na aplikaci příkladu č. 2, kdy již známe pravděpodobnostní rozdělení (1.22) počtu rozpadlých částic M . Ovšem, jde o speciální případ, který spočívá v tom, že pro toto rozdělení máme danu podmínku velkého počtu počátečních částic N_0 , takže si můžeme dovolit předpokládat, že $N_0 \rightarrow \infty$, a zároveň víme, že tento vzorek částic sledujeme po krátký čas t , což nás opravňuje předpokládat, že pravděpodobnost pozorování rozpadu za takový čas bude malá, tj. $P_A(t) \rightarrow \lambda t \ll 1$, jak plyne ze vztahu (1.12) pro $t \rightarrow 0$.
- Intuitivně tak můžeme očekávat, že střední hodnota $\langle M \rangle$ počtu rozpadlých částic bude malá. Vztah (1.27) nás tak v této souvislosti ospravedlňuje předpokládat, že součin $N_0 P_A$ je konečné číslo, i když se jednotlivé členy limitně blíží nekonečnu, resp. nule. Vlastnost tohoto součinu si tak symbolicky označme jako

$$N_0 P_A(t) = \text{„finite“}. \quad (1.37)$$

- Naším úkolem je tak spočítat limitu pravděpodobnostního rozdělení (1.22) pro limitní přechody $N_0 \rightarrow \infty$, $P_A(t) \rightarrow \lambda t$, kde $t \rightarrow 0$. Zde, narozdíl od vztahu (1.22), však explicitně vyznačíme časovou závislost pravděpodobností, a to právě kvůli tomu, že limitní přechod se týká mimo jiné také časové závislosti jednotlivých veličin. Platí tak

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} P_M &= \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \binom{N_0}{M} [P_A(t)]^M [1 - P_A(t)]^{N_0 - M} \\
&= \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \frac{N_0!}{(N_0 - M)! M!} [P_A(t)]^M [1 - P_A(t)]^{N_0 - M} \\
&= \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \frac{N_0!}{(N_0 - M)! M!} \underbrace{[P_A(t)]^M}_{\rightarrow (\lambda t)^M} [1 - P_A(t)]^{N_0} \underbrace{[1 - P_A(t)]^{-M}}_{\rightarrow 1}.
\end{aligned}$$

- Upravíme-li předchozí výraz přesunutím vhodných členů před symbol limity, máme tak, s užitím vlastnosti (1.37), jednoduše

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} P_M &= \frac{(\lambda t)^M}{M!} \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \frac{N_0!}{(N_0 - M)!} [1 - P_A(t)]^{N_0} \\
&= \frac{(\lambda t)^M}{M!} \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \frac{N_0!}{(N_0 - M)!} \underbrace{\left(1 - \frac{N_0 P_A(t)}{N_0}\right)^{N_0}}_{\rightarrow e^{-N_0 \lambda t}} \\
&= \frac{(\lambda t)^M}{M!} e^{-N_0 \lambda t} \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{N_0!}{(N_0 - M)!}, \tag{1.38}
\end{aligned}$$

kde jsme využili vztahu pro limitu Eulerova čísla a kde jsme v posledním kroku pod limitním symbolem ponechali již jen relevantní limitní přechod.

- Evidentně

$$\begin{aligned}
\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{N_0!}{(N_0 - M)!} &= \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{N_0 \cdot (N_0 - 1) \cdot \dots \cdot (N_0 - M + 1) \cdot (N_0 - M)!}{(N_0 - M)!} \\
&= \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \overbrace{N_0 \cdot (N_0 - 1) \cdot \dots \cdot (N_0 - M + 1)}^{M \text{ členů}} = N_0^M. \tag{1.39}
\end{aligned}$$

- Dosazením (1.39) do (1.38) tak máme hledané pravděpodobnostní rozdělení

$$\boxed{\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} P_M = \frac{(N_0 \lambda t)^M}{M!} e^{-N_0 \lambda t}}, \tag{1.40}$$

odkud je zřejmé, že v limitním přechodu $N_0 \rightarrow \infty$ a $t \rightarrow 0$ se původní binomické rozdělení (1.22) změnilo na rozdělení Poissonovo (1.40).

- Pro střední hodnoty a rozptyly počtu rozpadlých M a nerozpadlých N částic pak dle (1.27), (1.33), (1.35) a (1.36) platí následující vztahy. Pro počet rozpadlých částic M máme jejich střední hodnotu

$$\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \langle M \rangle = \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} N_0 P_A(t) = N_0 \lambda t, \quad (1.41)$$

zatímco pro rozptyl máme

$$\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \sigma_M^2 = \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} N_0 P_A(t) [1 - P_A(t)] = N_0 \lambda t. \quad (1.42)$$

Podobně pro počet nerozpadlých částic N máme jejich střední hodnotu

$$\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \langle N \rangle = \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} N_0 [1 - P_A(t)] = N_0$$

a pro jejich rozptyl

$$\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} \sigma_N^2 = \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ P_A(t) \rightarrow \lambda t \\ t \rightarrow 0}} N_0 P_A(t) [1 - P_A(t)] = N_0 \lambda t.$$

Příklad č. 4. Velmi slabý zdroj α -částic má aktivitu 1 s^{-1} . Jaká je pravděpodobnost, že za dobu $t = 4 \text{ s}$ nebude v ideálním detekčním zařízení obklopujícím zdroj α -částic zaregistrována žádná α -částice? Jaká je pravděpodobnost, že za dobu $t = 4 \text{ s}$ budou v detektoru zaregistrovány čtyři α -částice? Jaký je střední počet α -částic a s jakým rozptylem je zaregistrován v detektoru za dobu $t = 4 \text{ s}$?

Řešení

- Jde o úlohu na aplikaci vztahu (1.40) z příkladu č. 3. Jelikož je aktivita zdroje konstantní, analogicky s označením ve vztahu (1.5) si ji označme jako $A_0 = 1 \text{ s}^{-1}$, přičemž $A_0 = \lambda N_0$. V této souvislosti si pak vztah (1.40) přepíšeme jako

$$P_M(t) = \frac{(A_0 t)^M}{M!} e^{-A_0 t}, \quad (1.43)$$

kde M je počet rozpadlých, resp. detekovaných částic.

- Pravděpodobnost, že za $t = 4 \text{ s}$ nebude zaregistrována žádná (tj. $M = 0$) α -částice tak je

$$P_0(t) \doteq 0,018.$$

- Podobně pro pravděpodobnost detekce čtyř (tj. $M = 4$) α -částic za dobu $t = 4 \text{ s}$ platí

$$P_4(t) \doteq 0,2.$$

- Střední počet detekovaných α -částic za dobu $t = 4$ s tak dle vztahu (1.41) bude

$$\langle M \rangle = A_0 t = 4,$$

zatímco pro jejich rozptyl bude dle (1.42) platit

$$\sigma_M = \sqrt{A_0 t} = 2.$$

Příklad č. 5. Systém obsahuje v počátečním stavu stejné množství neinteragujících neutronů a protonů. Neutrony se v procesu $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ rozpadají na protony s rozpadovou konstantou λ_n . Jaký bude poměr počtu protonů a neutronů v systému za dobu t ? Za jakou dobu se poměr počtu protonů a neutronů v systému zvětší k -krát, $k \geq 1$?

Řešení

- Evidentně jde o úlohu na aplikaci rozpadového zákona (1.21). Označme tak počáteční počet protonů a neutronů jako

$$N_p(t=0) = N_n(t=0) \equiv N_0.$$

- Dle zadání se neutrony s časem rozpadají, jejich počet tak ubývá. V čase t tak bude počet neutronů daný vztahem (1.21), neboli

$$N_n(t) = N_0 e^{-\lambda_n t}, \quad (1.44)$$

kde λ_n je v tomto případě rozpadová konstanta neutronu. Rozdíl $N_0 - N_n(t)$ počtu neutronů na počátku a v čase t tak říká, kolik neutronů se za čas t rozpadlo.

- Uvědomme si ovšem, že každý rozpad neutronu produkuje právě jeden proton. Neboli, počet protonů bude s časem růst tím způsobem, že k počáteční hodnotě N_0 protonů za čas t přibude počet protonů shodný s počtem rozpadlých neutronů. Máme tak

$$N_p(t) = N_0 + [N_0 - N_n(t)] = 2N_0 - N_n(t) = 2N_0 - N_0 e^{-\lambda_n t} = N_0(2 - e^{-\lambda_n t}). \quad (1.45)$$

- V čase t tak bude poměr počtu protonů vůči neutronům dán vztahy (1.44)-(1.45), tj.

$$\frac{N_p(t)}{N_n(t)} = \frac{N_0(2 - e^{-\lambda_n t})}{N_0 e^{-\lambda_n t}} = 2e^{\lambda_n t} - 1. \quad (1.46)$$

- Poměr počtu protonů vůči neutronům se zvětší k -krát za čas t_k (aby bylo zřejmé, že hledáme nějaký konkrétní čas splňující zadanou podmínku, značíme takový čas jako t_k a nikoliv t , aby nedošlo k pomýlení s časem vystupujícím ve vztazích výše), který

zjistíme ze vztahu (1.46), označíme-li si poměr počtu částic na levé straně právě jako k . Řešením takové rovnice pak máme ve tvaru

$$t_k = \frac{1}{\lambda_n} \ln \left(\frac{k+1}{2} \right) \stackrel{|\lambda_n = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}|}{=} \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \left(\frac{k+1}{2} \right) = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \left(\ln(k+1) + \ln \frac{1}{2} \right),$$

což po drobné úpravě logaritmu dává hledaný čas

$$t_k = T_{1/2} \left(\frac{\ln(k+1)}{\ln 2} - 1 \right).$$

Příklad č. 6. Za jak dlouho klesne aktivita radioaktivního vzorku o poločasu rozpadu $T_{1/2}$ právě q -krát?

Řešení

- Využijeme vztahu (1.5), který udává časovou závislost aktivity. Označme poměr počáteční aktivity A_0 vůči aktivitě $A(t)$ v čase t jako q . Platí tak

$$q = \frac{A_0}{A(t)} = e^{\lambda t}.$$

- Pro čas t pak, s užitím vztahu (1.13), platí

$$t = \frac{\ln q}{\lambda} = T_{1/2} \frac{\ln q}{\ln 2}. \quad (1.47)$$

- Pro úplnost ještě uvažujme poměr q ve tvaru mocnin dvou, tj. $q = 2^p$. Pak dle vztahu (1.47) platí

$$t = p T_{1/2},$$

což přehledně ilustruje význam poločasu rozpadu. Jinými slovy, aktivita klesne dvakrát ($p = 1$) za čas $T_{1/2}$, čtyřikrát ($p = 2$) za čas $2T_{1/2}$, osmkrát ($p = 3$) za čas $3T_{1/2}$ atd.

Příklad č. 7. Stará jednotka aktivity 1 Ci je definována jako aktivita vzorku radia ^{226}Ra o hmotnosti $m = 1$ g. Jaká je velikost této jednotky, je-li poločas rozpadu izotopu ^{226}Ra právě $T_{1/2} = 1600$ let? Kilomolová hmotnost ^{226}Ra je $M_{\text{Ra}} = 226 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Začneme převedením jednotek:

$$m = 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg},$$

$$T_{1/2} = 1600 \text{ y} = 1600 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s} \doteq 5 \cdot 10^{10} \text{ s},$$

$$M_{\text{Ra}} = 226 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 226 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 0,226 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- Dle zadání má jednotku aktivity 1 Ci právě jeden gram izotopu ^{226}Ra . Spočítáme si tak jednoduše aktivitu tohoto vzorku dle vztahů z teoretického úvodu, která nám ovšem vyjde v becquerelech.
- Kombinací vztahů (1.6) a (1.9) dostaneme vztah pro aktivitu jako

$$A = \lambda \frac{m N_A}{M_{\text{Ra}}} \stackrel{|\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}|}{=} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m N_A}{M_{\text{Ra}}} \doteq 3,66 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

- Tedy, aktivitě 1 Ci odpovídá zhruba $3,66 \cdot 10^{10}$ Bq.

Příklad č. 8. Jaká část neutronů o kinetické energii $E_k = 0,025 \text{ eV}$ letících ve svazku se rozpadne při průletu dráhy o délce $\ell = 2 \text{ m}$? Střední doba života neutronu je $\tau_n = 925 \text{ s}$ a jeho klidová energie $m_n c^2 = 939,6 \text{ MeV}$.

Řešení

- Nejdříve si uvědomme, že jde o úlohu na pomezí radioaktivity a kinematiky. Jelikož jsme se dosud relativistickou kinematikou nezabývali, je důležité ověřit si, zdaleka vystačíme s našimi znalostmi klasické nerelativistické kinematiky. Uvažujme tak nyní libovolnou částici o klidové energii mc^2 a celkové energii E , která je součtem klidové a kinetické energie E_k , tj. $E = mc^2 + E_k$. Obecně platí, že je třeba postupovat relativisticky, je-li kinetická energie částice řádově odpovídající její klidové energii, tj. pokud $E_k \sim mc^2$. V našem případě je však kinetická energie zanedbatelná vůči klidové energii, tj. $E_k \ll m_n c^2$, zcela jistě tak můžeme postupovat nerelativisticky.
- Pro kinetickou energii tak můžeme použít nerelativistický vztah $E_k = \frac{1}{2} m_n v^2$, odkud si můžeme vyjádřit rychlost, kterou neutrony ze zadání procházejí dráhu o délce $\ell = 2 \text{ m}$, tj.

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_n}} = c \sqrt{\frac{2E_k}{m_n c^2}}, \quad (1.48)$$

kde jsme zlomek pod odmocninou vhodně rozšířili faktorem c^2 , abychom ve jmenovateli dostali zadanou klidovou energii neutronu.

- Známe-li rychlost neutronů (1.48), můžeme určit, za jak dlouho tyto neutrony urazí dráhu ℓ . Zřejmě platí

$$t = \frac{\ell}{v} = \frac{\ell}{c} \sqrt{\frac{m_n c^2}{2E_k}}. \quad (1.49)$$

- Hledanou část f neutronů, která se při průletu dráhou ℓ rozpadne, zjistíme jako poměr počtu rozpadlých neutronů za čas t vůči počátečnímu počtu N_0 neutronů, přičemž počet rozpadlých neutronů za čas t určíme jako rozdíl počátečního počtu neutronů

a počtu neutronů $N(t)$ žijících v čase t dle rozpadového zákona (1.21). Konkrétně, platí

$$f = \frac{N_0 - N(t)}{N_0} = \frac{N_0 - N_0 e^{-\lambda_n t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda_n t},$$

kde λ_n je rozpadová konstanta neutronu.

- Dosazením převrácené hodnoty střední doby života za rozpadovou konstantu dle (1.19) a užitím vztahu (1.49) pak máme

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) = 1 - \exp\left(-\underbrace{\frac{\ell}{c\tau_n} \sqrt{\frac{m_n c^2}{2E_k}}}_{\doteq 10^{-6}}\right).$$

- Jelikož je číselná hodnota exponentu velmi malé číslo, můžeme exponenciálu rozepsat Taylorovým rozvojem do prvního řádu schematicky jako $e^{-x} = 1 - x + \mathcal{O}(x^2)$, čímž nám hledaná část rozpadlých neutronů vyjde

$$f \doteq \frac{\ell}{c\tau_n} \sqrt{\frac{m_n c^2}{2E_k}} \doteq 10^{-6}.$$

Příklad č. 9. Jaký objem vody je za normálních podmínek třeba pozorovat, aby byl ideálním experimentálním zařízením zaregistrován jeden rozpad protonu za týden, je-li odhad střední doby života volného protonu, při kterém se nezachovává tzv. baryonové číslo, $\tau_p \approx 10^{31}$ let? Hustota hmotnosti a kilomolová hmotnost vody je $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Nejdříve si převedeme jednotky. V této souvislosti zdůrazněme, že máme zadanou taktéž požadovanou aktivitu A_p rozpadů protonů v uvažovaném experimentálním zařízení. Platí:

$$\begin{aligned} \tau_p &\approx 10^{31} \text{ y} = 10^{31} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s} \doteq 3,15 \cdot 10^{38} \text{ s}, \\ A_p &= 1 \text{ w}^{-1} = (3600 \cdot 24 \cdot 7 \text{ s})^{-1} \doteq 1,65 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \\ M_{\text{H}_2\text{O}} &= 18 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 18 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}. \end{aligned}$$

- Dle zadání můžeme předpokládat, že počet protonů se bude měnit jen velmi málo a můžeme jej tak považovat za konstantní. Dle vztahu (1.3) tak pro aktivitu protonů máme

$$A_p = \lambda_p N_p,$$

kde λ_p je rozpadová konstanta protonu. Dosadíme-li za ni převrácenou hodnotu střední doby života protonu dle (1.19), máme pro potřebný počet protonů v experimentálním zařízení jednoduchý vztah

$$N_p = A_p \tau_p. \tag{1.50}$$

- Pro počet protonů na levé straně rovnice (1.50) platí rovněž následující fakt. Ze zadání víme, že experimentální zařízení je tvořeno vodou, tj. H_2O , přičemž jako volné protony ve vodě uvažujeme právě ty, které tvoří jádro vodíku. Tedy, každá molekula vody obsahuje právě dva volné protony, takže pro celkový počet volných protonů ve vodě máme

$$N_p = 2N_{\text{H}_2\text{O}}, \quad (1.51)$$

kde $N_{\text{H}_2\text{O}}$ celkový počet molekul vody v experimentálním zařízení.

- Porovnáním vztahů (1.50) a (1.51) vyjádříme celkový počet molekul vody jako

$$N_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{A_p \tau_p}{2}. \quad (1.52)$$

- Užitím vztahu (1.8) můžeme pro celkový počet molekul vody rovněž psát

$$N_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot N_A}{M_{\text{H}_2\text{O}}} \stackrel{|m=\rho V|}{=} \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot V_{\text{H}_2\text{O}} \cdot N_A}{M_{\text{H}_2\text{O}}}, \quad (1.53)$$

kde $M_{\text{H}_2\text{O}}$ je kilomolová hmotnost vody a kde jsme celkovou hmotnost vody $m_{\text{H}_2\text{O}}$ obsažené v detektoru přepsali jako součin její hustoty $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ a celkového objemu $V_{\text{H}_2\text{O}}$.

- Porovnáním vztahů (1.52) a (1.53) pak pro celkový objem vodního detektoru plyne

$$V_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{A_p \tau_p}{2} \frac{M_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot N_A} \doteq 7791 \text{ m}^3.$$

- Čistě pro ilustraci uvedme, že tento objem odpovídá kouli o poloměru 12,3 m.

Příklad č. 10. Při výrobě paliva pro jadernou elektrárnu vzniká v konečné fázi obohacený a ochuzený uran, oba jsou složené z izotopů uranu ^{235}U a ^{238}U . Obohacený uran obsahuje $C' = 3,2\%$ množství izotopu ^{235}U . Koncentrace izotopu ^{235}U v ochuzeném uranu je $C'' = 0,2\%$. Poločasy rozpadu obou izotopů uranu jsou $T_{1/2}^{(235\text{U})} = 7,038 \cdot 10^8 \text{ y}$ a $T_{1/2}^{(238\text{U})} = 4,468 \cdot 10^9 \text{ y}$. Jaká je měrná aktivita obohaceného uranu? Kolikrát je aktivita obohaceného uranu větší než aktivita materiálu o stejné hmotnosti vyrobeného z ochuzeného uranu? Kilomolové hmotnosti uranu ^{235}U a ^{238}U jsou po řadě $235 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ a $238 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Obohacený i ochuzený uran jsou směsi izotopů uranu ^{235}U a ^{238}U , lišící se poměrným zastoupením těchto izotopů. Následující tabulka konkrétní zastoupení jednotlivých izotopů přehledně shrnuje.

Uran	Poměrné zastoupení ^{235}U	Poměrné zastoupení ^{238}U
Obohacený	$C' = 0,032$	$1 - C'$
Ochuzený	$C'' = 0,002$	$1 - C''$

- Dále, zapišme si poločasy rozpadů a kilomolové hmotnosti izotopů uranu ^{235}U a ^{238}U . Pro jednoduchost zápisu označujeme indexem „(5)“ veličiny charakterizující izotop uranu ^{235}U , ekvivalentně pak indexem „(8)“ veličiny související s izotopem uranu ^{238}U . Máme:

$$\begin{aligned} T_{1/2}^{(5)} &= 7,038 \cdot 10^8 \text{ y}, \\ T_{1/2}^{(8)} &= 4,468 \cdot 10^9 \text{ y} \end{aligned} \quad (1.54)$$

a

$$\begin{aligned} M_{\text{mol}}^{(5)} &= 235 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 235 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 0,235 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}, \\ M_{\text{mol}}^{(8)} &= 238 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 238 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 0,238 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

- V souvislosti se značením poměrného zastoupení izotopů uranu v tabulce výše označme kilomolovou hmotnost obohaceného uranu jako M'_{mol} , ekvivalentně pro kilomolovou hmotnost ochuzeného uranu píšme M''_{mol} . Vzhledem k výše uvedenému je přirozené napsat kilomolové hmotnosti obohaceného, resp. ochuzeného uranu jako vážený součet kilomolových hmotností jednotlivých složek izotopů uranu ^{235}U a ^{238}U . Konkrétně, platí:

$$\begin{aligned} M'_{\text{mol}} &= C' M_{\text{mol}}^{(5)} + (1 - C') M_{\text{mol}}^{(8)}, \\ M''_{\text{mol}} &= C'' M_{\text{mol}}^{(5)} + (1 - C'') M_{\text{mol}}^{(8)}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

- Dosazením hodnot (1.55) a poměrných zastoupení z tabulky výše do (1.56) dává $M'_{\text{mol}} = 0,237904$ a $M''_{\text{mol}} = 0,237994$, kde jsme vypsali všechny platné cifry, abychom přesvědčivě ukázali, že kilomolové hmotnosti obohaceného a ochuzeného uranu můžeme považovat zhruba za stejné, tj.

$$M' \approx M'' \quad (1.57)$$

- Stanovme dále měrná množství radioaktivních jader obohaceného a ochuzeného uranu. Popořadě máme

$$\begin{aligned} N' &= \frac{N_A}{M'_{\text{mol}}}, \\ N'' &= \frac{N_A}{M''_{\text{mol}}}. \end{aligned}$$

- Vzhledem ke vztahu (1.57) pak platí

$$N' \approx N'' \doteq 2,53 \cdot 10^{24} \text{ kg}^{-1}. \quad (1.58)$$

- Přejdeme tak nyní k určení měrné aktivity a' obohaceného uranu. Podobně jako v případě stanovení jeho kilomolové hmotnosti ve vztahu (1.56), i nyní bude tato měrná aktivita dána součtem měrných aktivit jednotlivých izotopů uranu ^{235}U a ^{238}U . Konkrétně, můžeme psát

$$a' = a'_{(5)} + a'_{(8)} = \lambda_{(5)}N'_{(5)} + \lambda_{(8)}N'_{(8)} = \lambda_{(5)}C'N' + \lambda_{(8)}(1 - C')N', \quad (1.59)$$

kde jsme ve druhém kroku využili vztahu (1.9) a ve třetím přepsali měrná množství $N'_{(5)}$ a $N'_{(8)}$ izotopů uranu ^{235}U a ^{238}U jako měrné množství obohaceného uranu s příslušnou váhou, odpovídající konkrétnímu poměrnému zastoupení daného izotopu.

- Dosazením za rozpadové konstanty jednotlivých izotopů uranu dle vztahu (1.13) a hodnot (1.54) do (1.59) dostaneme

$$a' = N' \left(\frac{C'}{T_{1/2}^{(5)}} + \frac{1 - C'}{T_{1/2}^{(8)}} \right) \ln 2 \doteq 1,5 \cdot 10^7 \text{ Bq} \cdot \text{kg}^{-1}. \quad (1.60)$$

- Měrnou aktivitu a'' ochuzeného uranu je pak možno získat okamžitě ze vztahu (1.60), nahradíme-li $(C', N') \rightarrow (C'', N'')$. Nicméně, abychom provedli všechny formální kroky, můžeme psát

$$a'' = a''_{(5)} + a''_{(8)} = \lambda_{(5)}N''_{(5)} + \lambda_{(8)}N''_{(8)} = \lambda_{(5)}C''N'' + \lambda_{(8)}(1 - C'')N'',$$

a tedy s využitím vztahů (1.13) a (1.54) dostaneme

$$a'' = N'' \left(\frac{C''}{T_{1/2}^{(5)}} + \frac{1 - C''}{T_{1/2}^{(8)}} \right) \ln 2. \quad (1.61)$$

- Poměr měrných aktivit obohaceného a ochuzeného uranu je pak dle (1.60) a (1.61) jednoduše

$$\frac{a'}{a''} = \frac{N'}{N''} \cdot \frac{\frac{C'}{T_{1/2}^{(5)}} + \frac{1 - C'}{T_{1/2}^{(8)}}}{\frac{C''}{T_{1/2}^{(5)}} + \frac{1 - C''}{T_{1/2}^{(8)}}} \doteq \frac{\frac{C'}{T_{1/2}^{(5)}} + \frac{1 - C'}{T_{1/2}^{(8)}}}{\frac{C''}{T_{1/2}^{(5)}} + \frac{1 - C''}{T_{1/2}^{(8)}}},$$

kde jsme v posledním kroku využili vztahu (1.58).

- Úpravou předchozího vztahu pak získáme

$$\frac{a'}{a''} \doteq \frac{C'T_{1/2}^{(8)} + (1 - C')T_{1/2}^{(5)}}{C''T_{1/2}^{(8)} + (1 - C'')T_{1/2}^{(5)}} \doteq 1,16.$$

1.3 Cvičení č. 2 (25. 10. 2022)

Příklad č. 11. V uhlíku v živých organismech bylo relativní zastoupení počtu izotopů ^{14}C experimentálně určeno jako $f \doteq 1,3 \cdot 10^{-12}$. Stanovte měrnou aktivitu uhlíku v živém organismu. Poločas rozpadu izotopu ^{14}C je $T_{1/2}^{(14\text{C})} = 5730$ y. Kilomolová hmotnost uhlíku je $M_C = 12,01 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Než přejdeme ke kvantitativní stránce tohoto příkladu, zmiňme nejdříve pár faktů ohledně radioizotopu ^{14}C . Chemický prvek uhlík ${}_6\text{C}$ má v současnosti šestnáct známých izotopů, a to ${}_6^8\text{C}$ až ${}_6^{23}\text{C}$, avšak pouze dva z nich (${}_6^{12}\text{C}$ a ${}_6^{13}\text{C}$) jsou stabilní. Z ostatních nestabilních izotopů uhlíku má právě ^{14}C nejdelší poločas rozpadu a navíc je jediným přírodním radioizotopem tohoto prvku. Konkrétně, jeho vznik probíhá v atmosféře interakcí neutronů sekundárního kosmického záření s dusíkem v reakci $n + {}_7^{14}\text{N} \rightarrow {}_6^{14}\text{C} + {}_1^1\text{H}$. Jelikož ^{14}C má stejné chemické vlastnosti jako ^{12}C , tvoří radioaktivní molekuly CO_2 , které jsou poté na zemském povrchu absorbovány rostlinami, přes které se následně dostávají do potravinového řetězce zvířat a lidí. Jelikož je ^{14}C do těl živých organismů neustále doplňován příjmem potravy, je relativní zastoupení tohoto radioizotopu v jejich tělech v daném čase přibližně stejné. Dojde-li však k uhynutí tohoto organismu, příjem ^{14}C skončí a dochází k postupnému poklesu míry jeho zastoupení vlivem radioaktivního rozpadu.
- Nejprve si převedeme jednotky:

$$M_C = 12,01 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 12,01 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 1,201 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1},$$
$$T_{1/2}^{(14\text{C})} = 5730 \text{ y} = 5730 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s} \doteq 1,8 \cdot 10^{11} \text{ s}.$$

- Dále, označme si počet izotopů uhlíku ^{14}C v živém organismu jako $N_{(14\text{C})}$, přičemž tento počet je dán jako frakce f celkového počtu N_C všech izotopů uhlíku v tomto organismu. Platí tak

$$N_{(14\text{C})} = f N_C. \quad (1.62)$$

- Pro aktivitu právě žijícího organismu („currently living organism“, tj. „CLO“) tak dle vztahu (1.3) a výše uvedené diskuse platí

$$A_{\text{CLO}} = \lambda_{(14\text{C})} N_{(14\text{C})} \stackrel{|\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}|}{=} \frac{\ln 2}{T_{1/2}^{(14\text{C})}} f N_C,$$

kde jsme nejprve dosadili za rozpadovou konstantu $\lambda_{(14\text{C})}$ izotopu uhlíku ^{14}C dle vztahu (1.13) a v dalším kroku jsme využili vztah (1.62).

- Nyní dosadíme za počet všech izotopů uhlíku N_C v živém organismu dle vztahu (1.8), což vede ke vztahu pro aktivitu uhlíku v právě žijícím organismu ve tvaru

$$A_{\text{CLO}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}^{(14\text{C})}} f \frac{m_C N_A}{M_C},$$

kde jsme hmotnost všech izotopů uhlíku označili jako m_C .

- Dle vztahu (1.6) tak pro měrnou aktivitu uhlíku v živém organismu platí

$$a_{\text{CLO}} = \frac{A_{\text{CLO}}}{m_C} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}^{(14\text{C})}} f \frac{N_A}{M_C} \doteq 249,1 \text{ Bq} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Příklad č. 12. Vzorek, ve kterém je $m_C = 10 \text{ g}$ uhlíku, vykazuje aktivitu 30 rozpadů za minutu. Určete jeho stáří. Experimentálně určené relativní zastoupení ^{14}C v uhlíku v živých organismech je $f \doteq 1,3 \cdot 10^{-12}$. Poločas rozpadu izotopu ^{14}C je $T_{1/2}^{(14\text{C})} = 5730 \text{ y}$. Kilomolová hmotnost uhlíku je $M_C = 12,01 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Nejprve si převedeme jednotky, přičemž si uvědomme, že v zadání máme stanovenou aktivitu vzorku A_v . Platí:

$$m_C = 10 \text{ g} = 10 \cdot (10^{-3} \text{ kg}) = 10^{-2} \text{ kg},$$

$$A_v = 30 \text{ min}^{-1} = 30 \cdot (60 \text{ s})^{-1} = 0,5 \text{ s}^{-1},$$

$$M_C = 12,01 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 12,01 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 1,201 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1},$$

přičemž poločas rozpadu izotopu ^{14}C si úmyslně ponecháme v letech.

- Evidentně jde o úlohu na časový vývoj měrné aktivity (1.7), přičemž počáteční měrné aktivitě a_0 vzorku uhlíku odpovídá taková měrná aktivita, kterou vzorek vykazoval v posledním okamžiku svého života, tj. a_{CLO} . Neboli, pro počáteční měrnou aktivitu vzorku můžeme s užitím vztahu (1.3) z příkladu č. 11 psát, že

$$a_0 \equiv a_{\text{CLO}} \doteq 249,1 \text{ Bq} \cdot \text{kg}^{-1}. \quad (1.63)$$

- Pro aktuální měrnou aktivitu a_v vzorku ze zadání tak platí, s využitím vztahů (1.7) a (1.63),

$$a_v = \frac{A_v}{m_C} = a_{\text{CLO}} e^{-\lambda_{(14\text{C})} t}, \quad (1.64)$$

kde $\lambda_{(14\text{C})}$ je rozpadová konstanta izotopu uhlíku ^{14}C a čas t je současné stáří vzorku.

- Ze vztahu (1.64) tak pro stáří vzorku plyne

$$t = -\frac{1}{\lambda_{(14\text{C})}} \ln \left(\frac{A_v}{m_C a_{\text{CLO}}} \right) \Big|_{\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}} = -\frac{T_{1/2}^{(14\text{C})}}{\ln 2} \ln \left(\frac{A_v}{m_C a_{\text{CLO}}} \right),$$

kde jsme dosadili za rozpadovou konstantu izotopu uhlíku ^{14}C dle (1.13).

- Konečně, upravíme-li zlomek v argumentu logaritmu absorbováním záporného znaménka před celým výrazem, po dosažení číselných hodnot dostaneme

$$t = \frac{T_{1/2}^{(14\text{C})}}{\ln 2} \ln \left(\frac{m_C a_{\text{CLO}}}{A_v} \right) \doteq 13,3 \cdot 10^3 \text{ y}.$$

Příklad č. 13. Určete stáří dřevěných předmětů, jejichž měrná aktivita izotopu ^{14}C představuje $3/5$ měrné aktivity téhož izotopu obsaženého v právě pokáceném dřevě téhož druhu. Poločas rozpadu izotopu ^{14}C je $T_{1/2}^{(14\text{C})} = 5\,730\text{ y}$.

Řešení

- Tentokrát se obejdeme bez převodu jednotek. Uvědomme si, že jde o úlohu ekvivalentní příkladu č. 12. Označme si měrnou aktivitu dřevěných předmětů ze zadání jako a_{DP} . Víme, že měrná aktivita takových předmětů je rovna $3/5$ měrné aktivity takového dřeva, které bylo právě pokáceno, a které tak má v okamžiku pokácení měrnou kapacitu rovnou hodnotě ze vztahu (1.3). Právě tato hodnota tak má význam počáteční měrné kapacity. Platí tak

$$a_{\text{DP}} = \frac{3}{5} a_{\text{CLO}}. \quad (1.65)$$

- Pro časový vývoj měrné kapacity a_{DP} dřevěných předmětů pak můžeme psát dle vztahu (1.7):

$$a_{\text{DP}} = a_{\text{CLO}} e^{-\lambda_{(14\text{C})} t},$$

odkud pak pro stáří t dřevěných předmětů po drobných úpravách plyne

$$t = -\frac{1}{\lambda_{(14\text{C})}} \ln\left(\frac{a_{\text{DP}}}{a_{\text{CLO}}}\right) \stackrel{|\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}|}{=} \frac{T_{1/2}^{(14\text{C})}}{\ln 2} \ln\left(\frac{a_{\text{CLO}}}{a_{\text{DP}}}\right). \quad (1.66)$$

- Dosadíme-li do (1.66) za poměr měrných aktivit dle (1.65), máme

$$t = \frac{T_{1/2}^{(14\text{C})}}{\ln 2} \ln\left(\frac{5}{3}\right) \doteq 4\,222,8\text{ y}.$$

Příklad č. 14. Částice se postupně rozpadá v kaskádě rozpadů. Všechny rozpady mají stejnou rozpadovou konstantu λ . Jaká je pravděpodobnost, že za dobu T je částice nalezena ve stavu právě po k -tém rozpadu?

Řešení

- Uvažujme časový úsek délky T rozdělený na $k - 1$ intervalů s k dělicími body $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$, které chronologicky odpovídají okamžikům, na jejichž infinitezimálních okolích postupně došlo ke k rozpadům dané částice. Schematicky tak toto dělení časového úseku můžeme zapsat jako sjednocení jednotlivých intervalů,

$$\langle 0, T \rangle = \langle 0, t_1 \rangle \cup (t_1, t_2) \cup (t_2, t_3) \cup \dots \cup (t_{k-1}, t_k) \cup (t_k, T),$$

kde naznačené střídání zprava uzavřeného a zleva otevřeného intervalu symbolizuje rozpad částice na infinitezimálním okolí příslušného okamžiku.

- Celková hledaná pravděpodobnost $P_k(T)$ je pak dána součinem pravděpodobností rozpadů na jednotlivých intervalech. Konkrétně máme následující příspěvky, které detailně popíšeme.

- Interval $\langle 0, t_1 \rangle$. Zopakujme nejprve pravděpodobnosti jednotlivých dějů. Pravděpodobnost, že částice na časové ose přežije bez rozpadu od počátku do okamžiku t_1 je $e^{-\lambda t_1}$. Dále, pravděpodobnost toho, že dojde k rozpadu této částice na infinitezimálním okolí okamžiku t_1 je λdt_1 . Tedy, pravděpodobnost události, že částice přežije bez rozpadu od počátku do okamžiku t_1 a následně se na infinitezimálním okolí tohoto okamžiku rozpadne, je $\lambda e^{-\lambda t_1} dt_1$ (viz též vztah (1.15)). Jelikož však okamžik t_1 může ležet kdekoli mezi počátkem a koncem T časového úseku, je příspěvek intervalu $\langle 0, t_1 \rangle$ do celkové pravděpodobnosti $P_k(T)$ určen vztahem

$$\lambda \int_0^T e^{-\lambda t_1} dt_1 .$$

- Interval (t_1, t_2) . Jelikož pravidlo, podle kterého je možné zapsat příslušný příspěvek tohoto intervalu do pravděpodobnosti $P_k(T)$, je již nyní zřejmé, napíšeme jej rovnou jako

$$\lambda \int_{t_1}^T e^{-\lambda(t_2-t_1)} dt_2 ,$$

kde jsme vzali do úvahy, že okamžik t_2 druhého rozpadu musí následovat až po t_1 a může nastat kdykoliv před T .

- Interval (t_2, t_3) . Podobně jako v předchozích případech, příspěvek pravděpodobnosti, že po rozpadu na infinitezimálním okolí okamžiku t_2 přežila částice bez rozpadu do okamžiku t_3 a rozpadla se na jeho infinitezimálním okolí, je

$$\lambda \int_{t_2}^T e^{-\lambda(t_3-t_2)} dt_3 ,$$

jelikož okamžik t_3 může ležet kdekoli mezi okamžikem t_2 druhého rozpadu a koncem T .

- Interval (t_{k-1}, t_k) . Způsobem popsaným výše bychom mohli postupovat dále pro všechny zbývající intervaly. Z formálních důvodů však zapíšeme až příspěvek pravděpodobnosti, že po rozpadu na infinitezimálním okolí okamžiku t_{k-1} přežila částice bez rozpadu do okamžiku t_k a rozpadla se na jeho infinitezimálním okolí:

$$\lambda \int_{t_{k-1}}^T e^{-\lambda(t_k-t_{k-1})} dt_k .$$

- Interval (t_k, T) . Uvědomme si, že před začátkem tohoto intervalu již došlo ke k rozpadům dané částice. Vyžadujeme tak, aby tato částice od infinitezimálního okolí okamžiku t_k do koncového okamžiku T už přežila bez rozpadu. Pravděpodobnost toho je dle vztahu (1.11) jednoduše

$$e^{-\lambda(T-t_k)} , \tag{1.67}$$

a kde již žádná integrace neprobíhá.

- Z výše uvedených jednotlivých příspěvků pravděpodobností si všimněme, že každý z k rozpadů na infinitezimálních okolí příslušných okamžiků přispívá faktorem λ a náležitou integrací. Výsledný vztah pro pravděpodobnost $P_k(T)$ tak obsahuje, mimo jiné, faktor λ^k a k -dimenzionální integraci. Konkrétně, platí

$$P_k(T) = \lambda^k \int_0^T e^{-\lambda t_1} \int_{t_1}^T e^{-\lambda(t_2-t_1)} \int_{t_2}^T e^{-\lambda(t_3-t_2)} \dots \dots \int_{t_{k-1}}^T e^{-\lambda(t_k-t_{k-1})} e^{-\lambda(T-t_k)} dt_k \dots dt_3 dt_2 dt_1,$$

kde se však většina exponenciálních členů vzájemně vyruší, což lze pro úplnost názorně ukázat sečtením jednotlivých exponentů:

$$-\lambda t_1 - \lambda(t_2 - t_1) - \lambda(t_3 - t_2) - \dots - \lambda(t_k - t_{k-1}) - \lambda(T - t_k) = -\lambda T.$$

Jedinou zbývající exponenciálou je tak $e^{-\lambda T}$, na níž samozřejmě integrace nezávisí.

- Máme tedy

$$P_k(T) = \lambda^k e^{-\lambda T} \int_0^T \int_{t_1}^T \int_{t_2}^T \dots \int_{t_{k-1}}^T dt_k \dots dt_3 dt_2 dt_1. \quad (1.68)$$

- Výpočet integrálu ve vztahu (1.68) je triviální záležitostí, zavedeme-li substituci

$$t_i = T(1 - x_i),$$

kde index i nabývá hodnot $1, \dots, k$. Uvědomme si, že $dt_i = -T dx_i$, a jelikož (1.68) obsahuje k -násobnou integraci, výše uvedená substituce nám umožní vytknout před integrál konstantní člen $(-T)^k$. Zbývá tak určit, jak se změní integrační meze. Pro $i = 1$ je $t_1 \in \langle 0, T \rangle$, a tedy $x_1 \in \langle 1, 0 \rangle$. Pro $i > 1$ je pak jednoduché všimnout si, že jelikož $t_i \in \langle t_{i-1}, T \rangle$, pak $x_i \in \langle x_{i-1}, 0 \rangle$. Vztah (1.68) je pak možné přepsat jako

$$P_k(T) = (-\lambda T)^k e^{-\lambda T} \int_1^0 \int_{x_1}^0 \int_{x_2}^0 \dots \int_{x_{k-1}}^0 dx_k \dots dx_3 dx_2 dx_1.$$

- Změníme-li pořadí integračních mezí u každého z k integrálů, tato změna přinese faktor $(-1)^k$. Máme tak

$$P_k(T) = (\lambda T)^k e^{-\lambda T} \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{k-1}} dx_k \dots dx_3 dx_2 dx_1.$$

- Nyní je již výpočet zbývajícího k -násobného integrálu vskutku zřejmý a jeho výsledek snadno dokazatelný např. matematickou indukcí. Pro naše potřeby se však spokojíme

s níže naznačenými integracemi, které jasně dávají výsledek:¹

$$\begin{aligned}
 P_k(T) &= (\lambda T)^k e^{-\lambda T} \times \\
 &\times \int_0^1 \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{k-3}} \int_0^{x_{k-2}} \underbrace{\int_0^{x_{k-1}} dx_k dx_{k-1} dx_{k-2} \cdots dx_2 dx_1}_{= x_{k-1}} \cdot \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{(x_{k-2})^2}{2}} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{(x_{k-3})^3}{3 \cdot 2}} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{(x_1)^{k-1}}{(k-1) \cdots 3 \cdot 2}} \\
 &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2} = \frac{1}{k!}
 \end{aligned}$$

- Celkově nám pak vyjde, že pravděpodobnost k rozpadů na časovém úseku délky T je tedy

$$\boxed{P_k(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}}, \quad (1.69)$$

což je známý vztah pro Poissonovo pravděpodobnostní rozdělení s parametrem λT .

Poznámka č. 2.

- K řešení lze dojít i bez použití integrace přes všechny možné časové úseky výskytu jednotlivých okamžiků rozpadu. Analogicky s příkladem č. 1 rozdělme časový úsek délky T na m infinitezimálních úseků dt , přičemž $dt = T/m$ a $m \rightarrow \infty$.
- Dle zadání tak k rozpadu dojde právě na k infinitezimálních časových úsecích, zatímco na $m - k$ nikoliv. Celková pravděpodobnost $P_k(T)$ je tak přímo úměrná součinu k -krát vynásobené pravděpodobnosti rozpadu (1.1) a $(m - k)$ -krát vynásobené pravděpodobnosti (1.2) toho, že k rozpadu nedojde.
- Zbývá tak určit tuto konstantu úměrnosti. Uvědomme si, že vybíráme k intervalů z celkového počtu m . Každý z intervalů, na kterém k rozpadu dojde, je v tomto výběru zastoupen právě jednou a na jeho pořadí ve výběru nám nezáleží (nevybíráme tyto intervaly nutně v tom pořadí, v jakém na nich došlo k rozpadu). Evidentně tak jde o počet kombinací výběru k prvků z m bez opakování, který je určen kombinačním číslem $\binom{m}{k}$.
- Tedy, pro hledanou pravděpodobnost máme

$$P_k(T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \binom{m}{k} \left(\frac{\lambda T}{m}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda T}{m}\right)^{m-k}.$$

¹Pro zachování důstojnosti nevypisujeme explicitně násobení jedničkou ve jmenovatelích jednotlivých zlomků.

- Výpočet této limity je pak možno provést v následujících krocích. Rozepíšeme kombinační číslo, před znaménko limity přesuneme část, na kterou limita nepůsobí, a poslední člen upravíme jako součin dvou faktorů. Máme tak

$$\begin{aligned}
 P_k(T) &= \frac{(\lambda T)^k}{k!} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{(m-k)! m^k} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda T}{m}\right)^m}_{\rightarrow e^{-\lambda T}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda T}{m}\right)^{-k}}_{\rightarrow 1}, \\
 &= \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{(m-k)! m^k}, \tag{1.70}
 \end{aligned}$$

kde jsme již využili toho, že člen s m -tou mocninou již známe, viz diskuse mezi vztahy (1.10) a (1.11), a že poslední člen je z hlediska limitního přechodu bezpečný a limitně se blíží jedničce.

- Zaměřme se tak nyní na zbývající limitu ve vztahu (1.70). Vhodně upravíme člen $m!$ v čitateli tak, abychom docílili vykrácení s členem $(m-k)!$ ve jmenovateli. Postupnými úpravami pak dostaneme

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{(m-k)! m^k} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1) \cdot (m-k)!}{(m-k)! m^k} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}^{k \text{ členů}}}{m^k} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{m}{m}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{m-1}{m}}_{\rightarrow 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{m-k+1}{m}}_{\rightarrow 1} = 1, \tag{1.71}
 \end{aligned}$$

kde jsme v předposledním kroku využili toho, že počet činitelů v čitateli zlomku za limitním symbolem je k , stejně jako ve jmenovateli. Tím jsme pak ke každému z činitelů mohli přiřadit jmenovatel m , čímž jsme dostali k zlomků limitně se blížících jedničce.

- Tím je zřejmé, že vztah (1.70) tak opravdu reprodukuje výsledek (1.69).

Příklad č. 15. Atomové jádro se rozpadá v kaskádě rozpadů ze vzbuzeného stavu přes mezistav do stabilního základního stavu. Rozpadové konstanty vzbuzeného stavu i mezistavu jsou stejné, $\lambda = \lambda_{\text{Ex}} = \lambda_{\text{In}}$. S jakou pravděpodobností je atomové jádro nalezeno v základním stavu za dobu T ?

Řešení

- Evidentně se jedná o aplikaci na předchozí příklad č. 14 a vztah (1.69), jelikož jde o kaskádu se dvěma rozpady, kdy všechny příslušné rozpadové konstanty jsou stejné. Konkrétně, jádro se ze vzbuzeného stavu (excited state, resp. „Ex“) rozpadá s rozpadovou konstantou $\lambda_{\text{Ex}} = \lambda$ do mezistavu (intermediate state, resp. „In“), ze kterého

dále s rozpadovou konstantou $\lambda_{\text{In}} = \lambda$ přechází do základního stavu (ground state, resp. „Gs“).

- Ačkoliv dle zadání proběhnou před základním stavem dva rozpady, je třeba si uvědomit, že se nejedná o prosté dosazení $k = 2$ do vztahu (1.69). Důvodem je fakt, že částice v příkladu č. 14 byla nestabilní po celou dobu T a počítali jsme pravděpodobnost, že se do této doby rozpadne právě k -krát a po kaskádě rozpadů již ve zbylém čase k žádnému dalšímu rozpadu nedojde, ačkoliv by formálně dojít mohlo. V současném příkladu však víme, že jakmile dojde k dosažení základního stavu, jádro v něm setrvá navždy, zcela bez možnosti dalšího rozpadu.
- Konstrukce hledané pravděpodobnosti tak probíhá stejným způsobem jako postup výpočtu vztahu (1.69) v předchozím příkladu, avšak zde již člen ekvivalentní výrazu (1.67) nehraje roli. Konkrétně, jednotlivé kroky pro určení příslušné pravděpodobnosti jsou následující.
- Uvažujme časový úsek délky T rozdělený na tři intervaly se dvěma dělicími body t_1 a t_2 , které chronologicky odpovídají okamžikům rozpadu jádra z excitovaného stavu do mezistavu a z mezistavu do základního stavu na jejich infinitezimálních okolích.
- Hledaná pravděpodobnost $P_{\text{Gs}}(T)$ je pak dána součinem pravděpodobností rozpadů na jednotlivých intervalech.

- Interval $\langle 0, t_1 \rangle$. Pravděpodobnost, že se jádro v excitovaném stavu nerozpadne do okamžiku t_1 a následně na infinitezimálním okolí tohoto okamžiku přejde do mezistavu, je $\lambda e^{-\lambda t_1} dt_1$, přičemž okamžik t_1 může ležet kdekoliv mezi počátkem a koncem T časového úseku. Příspěvek intervalu $\langle 0, t_1 \rangle$ do celkové pravděpodobnosti je tak určen jako

$$\lambda \int_0^T e^{-\lambda t_1} dt_1 .$$

- Interval $\langle t_1, t_2 \rangle$. Příspěvek pravděpodobnosti tohoto intervalu, že od okamžiku t_1 do doby t_2 jádro v mezistavu nepřejde do základního stavu a stane se tak až na infinitezimálním okolí okamžiku t_2 , je

$$\lambda \int_{t_1}^T e^{-\lambda(t_2-t_1)} dt_2 ,$$

jelikož moment t_2 druhého rozpadu musí následovat až po t_1 a může nastat kdykoliv před T .

- Výsledný vztah pro pravděpodobnost $P_{\text{Gs}}(T)$ je tak dán jako

$$P_{\text{Gs}}(T) = \lambda^2 \int_0^T e^{-\lambda t_1} \int_{t_1}^T e^{-\lambda(t_2-t_1)} dt_2 dt_1 .$$

- Výpočet tohoto integrálu je triviální a platí

$$\begin{aligned} P_{\text{Gs}}(T) &= \lambda^2 \int_0^T \int_{t_1}^T e^{-\lambda t_2} dt_2 dt_1 = -\lambda \int_0^T (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda t_1}) dt_1 \\ &= -\lambda T e^{-\lambda T} + \lambda \int_0^T e^{-\lambda t_1} dt_1, \end{aligned}$$

což po provedení poslední integrace vede k výsledku

$$\boxed{P_{\text{Gs}}(T) = 1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T}}. \quad (1.72)$$

Poznámka č. 3.

- Označme pravděpodobnosti nalezení jádra v jednotlivých stavech za dobu T jako $P_{\text{Ex}}(T)$, $P_{\text{In}}(T)$ a $P_{\text{Gs}}(T)$. Jelikož neexistuje možnost najít toto jádro v jiném stavu než ve stavech zmíněných v zadání, musí být součet těchto pravděpodobností roven právě jedné. Tedy,

$$P_{\text{Ex}}(T) + P_{\text{In}}(T) + P_{\text{Gs}}(T) = 1.$$

- Očividně je tak pravděpodobnost $P_{\text{Gs}}(T)$ nalezení jádra za dobu T v základním stavu doplňkovou pravděpodobností jevu, že za dobu T jádro nenalezneme ani v excitovaném stavu ani v mezistavu, tj.

$$P_{\text{Gs}}(T) = 1 - P_{\text{Ex}}(T) - P_{\text{In}}(T). \quad (1.73)$$

- Pravděpodobnost $P_{\text{Ex}}(T)$ nalezení jádra po uplynutí doby T ve vzbuzeném stavu však odpovídá pravděpodobnosti (1.69) pro případ, kdy dosud žádný rozpad nenastal, tj. pro $k = 0$. Podobně, pravděpodobnost $P_{\text{In}}(T)$ nalezení jádra po uplynutí doby T v mezistavu odpovídá pravděpodobnosti (1.69) pro případ, kdy dosud nastal právě jeden rozpad, tj. pro $k = 1$. Konkrétně platí

$$\begin{aligned} P_{\text{Ex}}(T) &= P_0(T) = e^{-\lambda T}, \\ P_{\text{In}}(T) &= P_1(T) = \lambda T e^{-\lambda T}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

- Dosazením (1.74) do (1.73) pak vskutku reprodukuje nalezený vztah (1.72).

Příklad č. 16. Radioaktivní vzorek obsahuje v čase $t = 0$ právě $N_{a,0} > 0$ radioaktivních jader a , $N_{b,0} > 0$ radioaktivních jader b a $N_{c,0} > 0$ stabilních jader c . Atomová jádra a ve vzorku se rozpadají s rozpadovou konstantou $\lambda_a > 0$ a tvoří se jádra b . Jádra b jsou sama o sobě nestabilní a s rozpadovou konstantou $\lambda_b > 0$ se přeměňují na stabilní atomová jádra c , jejichž rozpadová konstanta je $\lambda_c = 0$. Určete časové závislosti počtů jader ve vzorku a časové závislosti aktivit.

Řešení

- Kaskádový rozpad ze zadání si schematicky přepíšeme jako



kde jsme znázornili, že rozpadové konstanty jader a a b jsou λ_a a λ_b . Rozpadová konstanta stabilních jader c je samozřejmě nulová, tj. $\lambda_c = 0$.

- Ze zadání dále víme, že v čase $t = 0$ vzorek obsahuje nenulové množství $N_{a,0}$, $N_{b,0}$ a $N_{c,0}$ jader a , b a c . Bude tak platit, že jádra a se budou zákonem radioaktivní přeměny (1.21) rozpadat na jádra b , čímž budou doplňovat jejich počet, ovšem jádra b se budou zároveň rozpadat na stabilní jádra c , jejichž počet tak bude s časem jen vzrůstat. Zřejmě tak můžeme časový vývoj počtu jader a , b a c popsat následující soustavou diferenciálních rovnic:

$$\frac{dN_a(t)}{dt} = -\lambda_a N_a(t), \quad (1.76a)$$

$$\frac{dN_b(t)}{dt} = -\lambda_b N_b(t) + \lambda_a N_a(t), \quad (1.76b)$$

$$\frac{dN_c(t)}{dt} = +\lambda_b N_b(t), \quad (1.76c)$$

kde jsme explicitně zdůraznili u relevantních členů plusovými znaménky přírůstek počtu daných jader.

- Diskuse výše nám rovněž dává velmi důležitou informaci, a to zákon zachování počtu jader, což ve své podstatě není nic jiného, než zákon zachování energie. Totiž, v průběhu času probíhá rozpad jader a na jádra b a rozpad jader b na jádra c , přičemž nedochází přímo k rozpadu jader a přímo na c . Jinými slovy, úbytek jednoho jádra a znamená přírůstek jednoho jádra b , podobně i úbytek jednoho jádra b dává vzniknout jednomu jádru c . Znamená to, že celkový počet jader (bez ohledu na konkrétní počet jader daného druhu) je v čase konstantní a můžeme tak psát

$$N_{a,0} + N_{b,0} + N_{c,0} = N_a(t) + N_b(t) + N_c(t). \quad (1.77)$$

- Uvědomme si však ještě jeden důležitý fakt. Totiž, jelikož původní jádra a sama o sobě nejsou v čase nijak produkována a pouze probíhá jejich rozpad, zcela jistě se za dostatečně dlouhý čas všechna jádra a přemění na jádra b . Tím však dojde k zastavení produkce jader b , a ta se tak za dostatečně dlouhý čas všechna přemění na jádra c . Jinými slovy, pro asymptoticky dlouhý čas tak budou ve vzorku zastoupena pouze jádra c . Evidentně tak řešení soustavy rovnic (1.76a)-(1.76c) musí splňovat

$$N_a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

$$N_b(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

$$N_c(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} N_{a,0} + N_{b,0} + N_{c,0},$$

kde konečný počet jader c je samozřejmě dán vztahem (1.77).

- Nyní je tak možno přejít k samotnému řešení soustavy rovnic (1.76a)-(1.76c). Řešení (1.76a) pro časový vývoj počtu jader a je zřejmě dáno známým vztahem (1.21), tj.

$$\boxed{N_a(t) = N_{a,0} e^{-\lambda_a t}}, \quad (1.78)$$

a tedy pro aktivitu jader a máme, s využitím vztahu (1.3),

$$\boxed{A_a(t) = \lambda_a N_{a,0} e^{-\lambda_a t}}. \quad (1.79)$$

- Dosazení řešení (1.78) do rovnice (1.76b) vede k diferenciální rovnici

$$\frac{dN_b(t)}{dt} + \lambda_b N_b(t) = \lambda_a N_{a,0} e^{-\lambda_a t}, \quad (1.80)$$

kterou můžeme řešit různými způsoby, např. vhodnou úpravou popsanou níže.

- Obě strany rovnice (1.80) nejprve přenásobíme faktorem $e^{\lambda_b t}$, což nám umožní kompaktně přepsat levou stranu této rovnice:

$$\underbrace{e^{\lambda_b t} \frac{dN_b(t)}{dt} + \lambda_b e^{\lambda_b t} N_b(t)}_{= \frac{d}{dt} (N_b(t) e^{\lambda_b t})} = \lambda_a N_{a,0} e^{-(\lambda_a - \lambda_b)t}, \quad (1.81)$$

přičemž následná integrace přes proměnnou t je již triviální. Nicméně, je však třeba rozlišit vzájemný vztah mezi λ_a a λ_b .

- Uvažujme případ $\lambda_a = \lambda_b \equiv \lambda$. Časová závislost na pravé straně vztahu (1.81) v tomto případě zcela vymizí a integrace pak dává

$$N_b(t) e^{\lambda t} = \lambda t N_{a,0} + b_1,$$

kde b_1 je na čase nezávislá integrační konstanta, kterou určíme z počáteční podmínky, kdy v čase $t = 0$ platí

$$b_1 = N_{b,0}.$$

Řešením rovnice (1.80) je tedy

$$\boxed{\lambda_a = \lambda_b \equiv \lambda : \quad N_b(t) = (\lambda t N_{a,0} + N_{b,0}) e^{-\lambda t}}. \quad (1.82)$$

Pro výpočet aktivity jader b si uvědomme, že tato jádra nejen ubývají radioaktivním rozpadem z jejich původního množství, ale jsou rovněž doplňována jakožto produkty rozpadů jader a . Aktivita jader však odpovídá pouze jejich úbytku radioaktivním rozpadem. Nelze tak přímo užít vztahu (1.3), jelikož v aktuálním počtu jader b , daný výrazem (1.82), jsou zastoupena také jádra, která právě vznikla z rozpadů jader a a nesplňují tak definici aktivity. Spočítejme tak

nejprve záporně vzatou časovou derivaci počtu jader b a popíšme její jednotlivé příspěvky. Dosazením (1.82) máme

$$-\frac{dN_b(t)}{dt} = \underbrace{-\lambda N_{a,0} e^{-\lambda t}}_{= -A_{a,0} < 0} + \underbrace{\lambda(\lambda t N_{a,0} + N_{b,0})e^{-\lambda t}}_{= A_b(t) = \lambda N_b(t) > 0}, \quad (1.83)$$

kde jsme, dle očekávání, identifikovali dva členy — první znamená, že kladná počáteční aktivita $A_{a,0}$ jader a (která se v daném okamžiku rozpadla) odpovídá záporné „aktivitě“ $-A_{a,0}$ té části jader b , která právě těmito rozpady v tomto okamžiku vznikla; druhý člen pak odpovídá aktivitě všech zbývajících jader b , která se v daném okamžiku rozpadla vlastním radioaktivním rozpadem. Pravá aktivita jader b je tedy

$$\boxed{\lambda_a = \lambda_b \equiv \lambda : \quad A_b(t) = \lambda(\lambda t N_{a,0} + N_{b,0}) e^{-\lambda t}.} \quad (1.84)$$

– Uvažujme případ $\lambda_a \neq \lambda_b$. Integrací vztahu (1.81) máme

$$N_b(t) e^{\lambda_b t} = \lambda_a N_{a,0} \int e^{-(\lambda_a - \lambda_b)t} dt = -\frac{\lambda_a}{\lambda_a - \lambda_b} N_{a,0} e^{-(\lambda_a - \lambda_b)t} + b_2,$$

kde b_2 je opět na čase nezávislá integrační konstanta. Podobně jako v případě výše, dosazením $t = 0$ pro integrační konstantu b_2 platí

$$b_2 = N_{b,0} + \frac{\lambda_a}{\lambda_a - \lambda_b} N_{a,0},$$

a tedy v tomto případě máme řešení (1.80) ve tvaru

$$\boxed{\lambda_a \neq \lambda_b : \quad N_b(t) = N_{b,0} e^{-\lambda_b t} - \frac{\lambda_a}{\lambda_a - \lambda_b} N_{a,0} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}).} \quad (1.85)$$

Podobně jako v případě výše je třeba spočítat záporně vzatou časovou derivaci počtu jader b a identifikovat její kladnou část, která odpovídá pravé aktivitě v daném okamžiku rozpadajících se jader b a nikoliv těm právě vznikajícím z rozpadů jader a . Dosazením vztahu (1.85) platí

$$-\frac{dN_b(t)}{dt} = \lambda_b N_{b,0} e^{-\lambda_b t} - \frac{\lambda_a}{\lambda_a - \lambda_b} N_{a,0} (\lambda_a e^{-\lambda_a t} - \lambda_b e^{-\lambda_b t}). \quad (1.86)$$

Z výpočtu vztahu (1.83) víme, že záporně vzatá časová derivace počtu jader b musí obsahovat také příspěvek záporné aktivity jader a . Tento člen se na pravé straně rovnice (1.86) sice vyskytuje, ale je modulován faktorem $\frac{\lambda_a}{\lambda_a - \lambda_b}$ a takový výraz nemá požadovaný význam. Zkusme si proto pomoci algebraickou úpravou, kdy k pravé straně rovnice (1.86) počáteční aktivitu jader a přičteme a odečteme. Po jednoduchých úpravách pak vskutku dostaneme očekávaný tvar časové derivace počtu jader b , ve kterém snadno identifikujeme jejich pravou

aktivitu:

$$-\frac{dN_b(t)}{dt} = \underbrace{-\lambda_a N_{a,0} e^{-\lambda_a t}}_{= -A_{a,0} < 0} + \underbrace{\lambda_b N_{b,0} e^{-\lambda_b t} - \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_a - \lambda_b} N_{a,0} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t})}_{= A_b(t) = \lambda_b N_b(t) > 0}. \quad (1.87)$$

Dle výše uvedeného tak pro aktivitu jader b máme

$$\lambda_a \neq \lambda_b : \quad A_b(t) = \lambda_b N_{b,0} e^{-\lambda_b t} - \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_a - \lambda_b} N_{a,0} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}). \quad (1.88)$$

- Zbývá tak určit časovou závislost počtu $N_c(t)$ jader c . Buďto bychom mohli vyjít ze vztahu (1.76c), tj. integrovat obě možná řešení (1.82) a (1.85) (vynásobená rozpado-
vou konstantou λ_b) podle času a následně stanovit příslušné integrační konstanty na
základě počáteční podmínky, nebo jednoduše využijeme znalosti zákona zachování
energie, tj. vztahu (1.77), který dává obecný vztah

$$\begin{aligned} N_c(t) &= N_{a,0} + N_{b,0} + N_{c,0} - N_a(t) - N_b(t) \\ &= N_{a,0}(1 - e^{-\lambda_a t}) + N_{b,0} + N_{c,0} - N_b(t), \end{aligned}$$

kde jsme již dosadili řešení (1.78). Proto nám tak zbývá už jen dosadit za již spočítané
počty $N_b(t)$ jader b .

- Uvažujme případ $\lambda_a = \lambda_b \equiv \lambda$. Dosazením za $N_b(t)$ dle (1.82) máme

$$\lambda_a = \lambda_b \equiv \lambda : \quad N_c(t) = N_{a,0} (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}) + N_{b,0} (1 - e^{-\lambda t}) + N_{c,0}.$$

- Uvažujme případ $\lambda_a \neq \lambda_b$. Dosazením za $N_b(t)$ dle (1.85) po drobné úpravě
máme

$$\lambda_a \neq \lambda_b : \quad N_c(t) = N_{a,0} \left(1 - \frac{\lambda_a e^{-\lambda_b t} - \lambda_b e^{-\lambda_a t}}{\lambda_a - \lambda_b} \right) + N_{b,0} (1 - e^{-\lambda_b t}) + N_{c,0}.$$

- Jelikož jsou jádra c stabilní a nepodléhají radioaktivnímu rozpadu, je aktivita
těchto jader pro oba výše uvedené případy nulová, tj.

$$A_c(t) = 0.$$

Příklad č. 17. Za jakých podmínek dosáhne aktivita dceřiných jader b ve vzorku ze
zadání příkladu č. 16 maxima? Za jakých podmínek bude ve vzorku nejvíce jader b ?

Řešení

- Dle známého vztahu (1.3) je zřejmé, že ve vzorku bude nejvíce jader b tehdy, bude-li jejich aktivita maximální. Budeme tak hledat maximum aktivity jader b z příkladu č. 16, tzn. budeme počítat časové derivace vztahů (1.84) a (1.88), které následně položíme rovny nule.

- Uvažujme případ $\lambda_a = \lambda_b \equiv \lambda$. V tomto případě aktivita jader b dána vztahem (1.84). Zderivujeme-li tento vztah podle času, bude platit

$$\begin{aligned} \frac{dA_b(t)}{dt} &= \lambda^2 (N_{a,0}(1 - \lambda t) - N_{b,0}) e^{-\lambda t} \\ &= \lambda (A_{a,0}(1 - \lambda t) - A_{b,0}) e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (1.89)$$

kde jsme užili označení pro počáteční aktivitu jader a a b (viz poznámka pod vztahem (1.5)). Podmínka na nulovost derivace (1.89) pak jednoduše dává čas t_{\max} , ve kterém bude aktivita dceřiných jader b maximální, ve tvaru

$$\lambda_a = \lambda_b \equiv \lambda : \quad t_{\max} = \frac{A_{a,0} - A_{b,0}}{\lambda A_{a,0}}. \quad (1.90)$$

- Uvažujme případ $\lambda_a \neq \lambda_b$. V tomto případě aktivita jader b dána vztahem (1.88). Zderivujeme-li tento vztah podle času, bude platit

$$\begin{aligned} \frac{dA_b(t)}{dt} &= \lambda_b \left(-\lambda_b N_{b,0} e^{-\lambda_b t} + \frac{\lambda_a}{\lambda_a - \lambda_b} N_{a,0} (\lambda_a e^{-\lambda_a t} - \lambda_b e^{-\lambda_b t}) \right) \\ &= \lambda_b \left(-A_{b,0} + \frac{A_{a,0}}{\lambda_a - \lambda_b} (\lambda_a e^{-(\lambda_a - \lambda_b)t} - \lambda_b) \right) e^{-\lambda_b t}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

kde jsme opět užili označení pro počáteční aktivitu jader a a b . Podmínka na nulovost derivace (1.91) pak po jednoduchých algebraických úpravách dává čas t_{\max} , ve kterém bude aktivita dceřiných jader b maximální, ve tvaru

$$\lambda_a \neq \lambda_b : \quad t_{\max} = -\frac{1}{\lambda_a - \lambda_b} \ln \left(\frac{(\lambda_a - \lambda_b) A_{b,0}}{\lambda_a A_{a,0}} + \frac{\lambda_b}{\lambda_a} \right). \quad (1.92)$$

- Zbývá nám určit, kdy jsou řešení (1.90) a (1.92) fyzikální, tj. kdy $t_{\max} > 0$.

- Uvažujme případ $\lambda_a = \lambda_b \equiv \lambda$. Dle vztahu (1.90) je $t_{\max} > 0$ pro $A_{a,0} > A_{b,0}$.
- Uvažujme případ $\lambda_a \neq \lambda_b$, přičemž $\lambda_a > \lambda_b$. Dle vztahu (1.92) pak musí být

$$\ln \left(\frac{(\lambda_a - \lambda_b) A_{b,0}}{\lambda_a A_{a,0}} + \frac{\lambda_b}{\lambda_a} \right) < 0 \implies \frac{(\lambda_a - \lambda_b) A_{b,0}}{\lambda_a A_{a,0}} + \frac{\lambda_b}{\lambda_a} < 1,$$

přičemž druhá nerovnost je, po jednoduché úpravě, splněna pro $A_{a,0} > A_{b,0}$.

- Uvažujme případ $\lambda_a \neq \lambda_b$, přičemž $\lambda_a < \lambda_b$. Dle vztahu (1.92) pak musí být

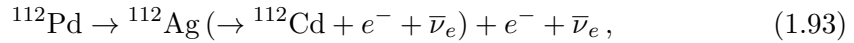
$$\ln \left(\frac{(\lambda_a - \lambda_b) A_{b,0}}{\lambda_a A_{a,0}} + \frac{\lambda_b}{\lambda_a} \right) > 0 \implies \frac{(\lambda_a - \lambda_b) A_{b,0}}{\lambda_a A_{a,0}} + \frac{\lambda_b}{\lambda_a} > 1,$$

přičemž druhá nerovnost je, po jednoduché úpravě, splněna pro $A_{a,0} > A_{b,0}$.

Příklad č. 18. V β -rozpadu izotopu ^{112}Pd o poločasu rozpadu $T_{1/2, \text{Pd}} = 21$ h vzniká β -aktivní izotop ^{112}Ag s poločasem rozpadu $T_{1/2, \text{Ag}} = 3, 2$ h. Určete maximální poměr aktivity dceřiného izotopu ^{112}Ag vzhledem k původní aktivitě preparátu, pokud preparát na začátku obsahoval pouze mateřský izotop ^{112}Pd .

Řešení

- Evidentně se jedná o úlohu na aplikaci vztahu (1.92), přičemž k jejímu užití stačí správně identifikovat veličiny odpovídající užitému značení. Dle zadání se jedná o reakci způsobenou β -rozpadem, kterou si můžeme zapsat jako



a tedy označení ve vztahu (1.92) tak symbolicky odpovídá notaci kaskádového rozpadu, po srovnání (1.75) a (1.93), pro $a \equiv ^{112}\text{Pd}$, $b \equiv ^{112}\text{Ag}$ a $c \equiv ^{112}\text{Cd}$.

- Ze zadání rovněž víme, že preparát v čase $t = 0$ obsahuje pouze mateřský izotop ^{112}Pd . Jinými slovy, pro izotop ^{112}Ag tak platí, že počáteční počet jader tohoto izotopu je nulový, tj. $N_{(^{112}\text{Ag}), 0} = 0$, a stejně tak je nulová i jeho počáteční aktivita, tj. $A_{(^{112}\text{Ag}), 0} = 0$.
- Vztah (1.92) tak pro čas t_{\max} , ve kterém bude aktivita dceřiného izotopu ^{112}Ag maximální, dává

$$t_{\max} = -\frac{1}{\lambda_{(^{112}\text{Pd})} - \lambda_{(^{112}\text{Ag})}} \ln \left(\frac{\lambda_{(^{112}\text{Ag})}}{\lambda_{(^{112}\text{Pd})}} \right),$$

což po úpravě dle vztahu (1.13) dává

$$t_{\max} = \frac{T_{1/2, (^{112}\text{Pd})} T_{1/2, (^{112}\text{Ag})}}{(T_{1/2, (^{112}\text{Pd})} - T_{1/2, (^{112}\text{Ag})}) \ln 2} \ln \left(\frac{T_{1/2, (^{112}\text{Pd})}}{T_{1/2, (^{112}\text{Ag})}} \right).$$

- Pro maximální aktivitu izotopu ^{112}Ag v čase t_{\max} tak zbývá dosadit do vztahu (1.88),

$$A_{(^{112}\text{Ag})}(t_{\max}) = -\frac{A_{(^{112}\text{Pd}), 0} \lambda_{(^{112}\text{Ag})}}{\lambda_{(^{112}\text{Pd})} - \lambda_{(^{112}\text{Ag})}} \left(e^{-\lambda_{(^{112}\text{Pd})} t_{\max}} - e^{-\lambda_{(^{112}\text{Ag})} t_{\max}} \right) + \underbrace{A_{(^{112}\text{Ag}), 0} e^{-\lambda_{(^{112}\text{Ag})} t_{\max}}}_{= 0},$$

kde jsme využili označení pro počáteční aktivitu příslušných izotopů (viz poznámka pod vztahem (1.5)).

- Pro hledaný poměr tak platí

$$\frac{A_{(^{112}\text{Ag})}(t_{\max})}{A_{(^{112}\text{Pd}), 0}} = -\frac{\lambda_{(^{112}\text{Ag})}}{\lambda_{(^{112}\text{Pd})} - \lambda_{(^{112}\text{Ag})}} \left(e^{-\lambda_{(^{112}\text{Pd})} t_{\max}} - e^{-\lambda_{(^{112}\text{Ag})} t_{\max}} \right),$$

přičemž užitím vztahu (1.13) můžeme předchozí výraz přepsat jako

$$\frac{A_{(^{112}\text{Ag})}(t_{\max})}{A_{(^{112}\text{Pd}),0}} = \frac{T_{1/2, (^{112}\text{Pd})}}{T_{1/2, (^{112}\text{Pd})} - T_{1/2, (^{112}\text{Ag})}} \times \left[\exp\left(-\frac{t_{\max} \ln 2}{T_{1/2, (^{112}\text{Pd})}}\right) - \exp\left(-\frac{t_{\max} \ln 2}{T_{1/2, (^{112}\text{Ag})}}\right) \right] \doteq 0,713.$$

Příklad č. 19. Radioaktivní vzorek obsahující jádra b vzniká v jaderné reakci tak, že za jednotku času přibude konstantní počet jader P ve vzorku. Jádra b se rozpadají s rozpadovou konstantou λ_b na stabilní jádra c . Určete časovou závislost aktivity jader b ve vzorku. Za jakých podmínek nabývá aktivita jader b ve vzorku maxima?

Řešení

- Nejdříve určíme časovou závislost aktivity jader b ve vzorku.
 - Ze zadání víme, že jádra b se s rozpadovou konstantou λ_b rozpadají na stabilní jádra c . Jádra b jsou však ve vzorku doplňována s konstantní četností P . Diferenciální rovnici popisující časový vývoj počtu jader b ve vzorku proto napíšeme ve tvaru

$$\frac{dN_b(t)}{dt} = -\lambda_b N_b(t) + P. \quad (1.94)$$

- Naším úkolem je tak vyřešit tuto nehomogenní lineární diferenciální rovnici, jelikož při znalosti časového vývoje počtu $N_b(t)$ jader b ve vzorku můžeme ze vztahu (1.3) stanovit hledanou časovou závislost aktivity.
- Řešení rovnice (1.94) provedeme způsobem podobným jako v příkladu č. 16. Časově závislou část na pravé straně převedeme na stranu levou a obě strany takové rovnice pak přenásobíme faktorem $e^{\lambda_b t}$. Platí tak

$$\underbrace{e^{\lambda_b t} \frac{dN_b(t)}{dt} + \lambda_b e^{\lambda_b t} N_b(t)} = P e^{\lambda_b t}. \quad (1.95)$$

$$= \frac{d}{dt} (N_b(t) e^{\lambda_b t})$$

- Integrace obou stran rovnice (1.95) dává

$$N_b(t) e^{\lambda_b t} = \frac{P}{\lambda_b} e^{\lambda_b t} + Q,$$

kde Q je časově nezávislá integrační konstanta, kterou určíme z počáteční podmínky pro $t = 0$:

$$Q = N_{b,0} - \frac{P}{\lambda_b},$$

a tedy řešení diferenciální rovnice (1.94) je tak

$$N_b(t) = N_{b,0} e^{-\lambda_b t} + \frac{P}{\lambda_b} (1 - e^{-\lambda_b t}). \quad (1.96)$$

- Hledanou časovou závislost aktivity pak, podobně jako v příkladu č. 16, určíme jako záporně vzatou časovou derivaci vztahu (1.96):

$$-\frac{dN_b(t)}{dt} = \lambda_b N_{b,0} e^{-\lambda_b t} - P e^{-\lambda_b t}. \quad (1.97)$$

Dle zadání však víme, že jádra b se nejen rozpadají, ale jsou také doplňována s konstantní četností P . Vztah (1.97) tak musí obsahovat rovněž tomu odpovídající člen $-P$. Podobně jako u vztahu (1.87) v příkladu č. 16 si proto pomůžeme jeho přičtením a odečtením. Po jednoduchých úpravách tak máme

$$-\frac{dN_b(t)}{dt} = \underbrace{-P}_{< 0} + \underbrace{\lambda_b N_{b,0} e^{-\lambda_b t} + P(1 - e^{-\lambda_b t})}_{= A_b(t) = \lambda_b N_b(t) > 0},$$

odkud pak pro pravou aktivitu jader b plyne

$$A_b(t) = \lambda_b N_{b,0} e^{-\lambda_b t} + P(1 - e^{-\lambda_b t}). \quad (1.98)$$

- Ukažme si ještě, jak se aktivita (1.98) jader b ve vzorku chová v asymptotickém čase, tj. pro $t \rightarrow \infty$. Vzhledem k tomu, že v této limitě jsou exponenciální členy nulové, platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_b(t) = P, \quad (1.99)$$

resp. pro počet jader b pak máme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_b(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_b(t)}{\lambda_b} = \frac{P}{\lambda_b} = P\tau_b, \quad (1.100)$$

kde jsme užili vztahu (1.3) a poté dle (1.19) přepsali převrácenou hodnotu rozpadové konstanty jader b jako jejich střední dobu života τ_b . Vidíme tak, že pro $t \rightarrow \infty$ je aktivita a počet jader b konstantní. Pro úplnost uvedme, že výrazy (1.99)-(1.100) se nazývají rovnovážné hodnoty aktivity, resp. počtu jader b .

- Nyní určíme, za jakých podmínek nabývá aktivita jader b ve vzorku maxima.

- K najetí maxima funkce (1.98) je třeba ji zderivovat podle času. Konkrétně,

$$\frac{dA_b(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[A_{b,0} e^{-\lambda_b t} + P(1 - e^{-\lambda_b t}) \right],$$

resp. po úpravě

$$\frac{dA_b(t)}{dt} = \lambda_b e^{-\lambda_b t} (P - A_{b,0}).$$

- Je-li $P > A_{b,0}$, pak $\frac{dA_b(t)}{dt} > 0$, a aktivita $A_b(t)$ jader b je rostoucí funkcí času pro všechna t . Neboli, aktivita jader b ve vzorku vzrůstá od počáteční hodnoty $A_{b,0}$ a asymptoticky se zdola blíží rovnovážné hodnotě P , viz (1.99).

- Je-li $P < A_{b,0}$, pak $\frac{dA_b(t)}{dt} < 0$, a aktivita $A_b(t)$ jader b je klesající funkcí času pro všechna t . Neboli, aktivita jader b ve vzorku klesá od počáteční hodnoty $A_{b,0}$ a asymptoticky se shora blíží rovnovážné hodnotě P , viz (1.99).
- Je-li $P = A_{b,0}$, pak $\frac{dA_b(t)}{dt} = 0$, a aktivita $A_b(t)$ jader b je konstantní funkcí času pro všechna t . Neboli, aktivita jader b ve vzorku je shodná s rovnovážnou hodnotou P , viz (1.99).

Příklad č. 20. Nestabilní atomová jádra ^{198}Au o střední době života $\tau_{\text{Au}} = 3,89$ d jsou produkována s konstantní četností $P = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ v jaderné reakci $n + ^{197}\text{Au} \rightarrow ^{198}\text{Au} + \gamma$ a rozpadají se β^- -rozpadem $^{198}\text{Au} \rightarrow ^{198}\text{Hg} + e^- + \bar{\nu}_e$ na stabilní atomová jádra ^{198}Hg . Kolik bylo celkově vyprodukovaných atomových jader ^{198}Au za dobu $t = 6$ d? Kolik atomových jader ^{198}Hg je vyprodukováno ve vzorku za tuto dobu za předpokladu, že atomová jádra ^{198}Hg nejsou ovlivněna neutrony a vzorek před začátkem produkce jádra ^{198}Au neobsahoval? Určete rovnovážnou hodnotu počtu atomových jader ^{198}Au ve vzorku.

Řešení

- Nejdříve si označme četnost produkce jader izotopu zlata ^{198}Au v jaderné reakci v zadání jako $P_{\text{Au}} \equiv P(^{198}\text{Au}) = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ a převedme si jednotky zbývajících veličin:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{Au}} &\equiv \tau(^{198}\text{Au}) = 3,89 \text{ d} = 3,89 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ s} \doteq 3,36 \cdot 10^5 \text{ s}, \\ t &= 6 \text{ d} = 6 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ s} \doteq 5,18 \cdot 10^5 \text{ s}.\end{aligned}$$

- Nyní spočítáme, kolik celkově bylo vyprodukováno jader izotopu zlata ^{198}Au za dobu $t = 6$ d.
 - Jelikož je produkce jader izotopu zlata ^{198}Au konstantní, pak počet těchto jader vyprodukovaných za dobu $t = 6$ d je dán jednoduše jako

$$\boxed{N_P(^{198}\text{Au}) = P_{\text{Au}} t \doteq 5,18 \cdot 10^{15}.} \quad (1.101)$$

- Nyní spočítáme, kolik celkově bylo vyprodukováno ve vzorku jader izotopu rtuti ^{198}Hg za dobu $t = 6$ d.
 - Připomeňme, že předpokládáme, že jádra izotopu rtuti ^{198}Hg nejsou ovlivněna neutrony, které iniciují jadernou reakci $n + ^{197}\text{Au} \rightarrow ^{198}\text{Au} (\rightarrow ^{198}\text{Hg} + e^- + \bar{\nu}_e) + \gamma$, a že jádra izotopu zlata ^{198}Au nebyla před začátkem produkce ve vzorku přítomna, tj. $N_{\text{Au},0} \equiv N_0(^{198}\text{Au}) = 0$.
 - Z podstaty uvedené interakce je zřejmé, že každý rozpad izotopu zlata ^{198}Au dává vzniknout právě jednomu izotopu rtuti ^{198}Hg . Neboli, počet $N(^{198}\text{Hg})$ vzniklých jader izotopu rtuti ^{198}Hg za dobu $t = 6$ d je roven počtu rozpadlých jader izotopu zlata ^{198}Au za stejnou dobu.

- A právě počet rozpadlých jader izotopu zlata ^{198}Au za dobu $t = 6$ d je dán jako rozdíl počtu (1.101) všech vzniknuvších jader za tuto dobu a počtu $N(^{198}\text{Au})$ jader, která se dosud nerozpadla.
- Zapišeme-li si úvahy uvedené výše symbolicky, máme

$$N(^{198}\text{Hg}) = N_P(^{198}\text{Au}) - N(^{198}\text{Au}). \quad (1.102)$$

- Zbývá tak určit počet $N(^{198}\text{Au})$ jader izotopu ^{198}Au , která se dosud nerozpadla.
- Uvědomme si, že určení tohoto počtu není nic jiného než aplikace vztahu (1.96) z příkladu č. 19. Důvodem je to, že stejně jako v příkladu č. 19, i zde máme nestabilní jádra, která se rozpadají na stabilní jádra, avšak jejich počet je doplňován s konstantní četností. Je třeba si však uvědomit, že v tomto případě dle zadání předpokládáme, že počáteční počet jader izotopu zlata ^{198}Au je nulový. Jinými slovy, pro počet $N(^{198}\text{Au})$ tak můžeme psát rovnici analogickou vztahu (1.96), kde však první člen na pravé straně je nulový. Platí tak

$$N(^{198}\text{Au}) = \underbrace{N_{\text{Au},0}}_{=0} e^{-\lambda_{\text{Au}}t} + \frac{P_{\text{Au}}}{\lambda_{\text{Au}}} (1 - e^{-\lambda_{\text{Au}}t}) = P_{\text{Au}}\tau_{\text{Au}} (1 - e^{-t/\tau_{\text{Au}}}), \quad (1.103)$$

kde jsme rovněž přepsali rozpadovou konstantu izotopu zlata ^{198}Au pomocí jeho střední doby života.

- Dosazením (1.101) a (1.103) do (1.102) tak máme

$$N(^{198}\text{Hg}) = P_{\text{Au}} t - P_{\text{Au}}\tau_{\text{Au}} (1 - e^{-t/\tau_{\text{Au}}}),$$

odkud po úpravě a dosazení numerických hodnot dostaneme

$$N(^{198}\text{Hg}) = P_{\text{Au}} \left[t - \tau_{\text{Au}} (1 - e^{-t/\tau_{\text{Au}}}) \right] \doteq 2,54 \cdot 10^{15}.$$

- Nyní stanovíme rovnovážnou hodnotu počtu jader izotopu zlata ^{198}Au .
 - Ze vztahu (1.100) z příkladu č. 19 víme, že pro rovnovážnou hodnotu počtu jader izotopu zlata ^{198}Au platí

$$N(^{198}\text{Au})(t \rightarrow \infty) = P_{\text{Au}}\tau_{\text{Au}} \doteq 3,36 \cdot 10^{15}.$$

2 Účinný průřez

V této kapitole, odpovídající třetímu a čtvrtému cvičení, se budeme zabývat interakcí záření s hmotou. Konkrétně, budeme studovat, jak probíhá interakce svazku částic s tenkým terčíkem, resp. obecně s hmotným prostředím.

2.1 Teorie

Tenký terčík, svazek částic

- Tenkým terčem rozumíme hmotné prostředí o infinitezimální tloušťce dx , jehož rozptylová centra (viz níže) jsou srovnána v ploše a každá částice ze svazku, který tímto terčíkem prochází, v něm zainteraguje nejvýše jednou. Označme aktivní plochu tenkého terčíku jako S . Je tak přirozené definovat objem dV tohoto terčíku jako

$$dV = S dx. \quad (2.1)$$

- Svazek částic, o kterém předpokládáme, že je homogenní, je charakterizován dvěma veličinami (předpokládáme, že svazek dopadá kolmo na plochu hmotného prostředí):
 - Hustota toku j_0 říká, kolik částic dopadne na jednotku plochy za jednotku času. Jednotkou hustoty toku je tedy $[j_0] = \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.
 - Intenzita toku I_0 říká, kolik částic dopadne na plochu hmotného prostředí za jednotku času. Jednotkou intenzity je proto $[I_0] = \text{s}^{-1}$.
 - Je zřejmé, že jednotky intenzity a hustoty toku se liší faktorem, kterým je jednotka plochy, na kterou svazek částic dopadá. Můžeme tak, v souvislosti s označením výše, psát

$$I_0 = j_0 S. \quad (2.2)$$

Objemová hustota

- Uvažujme homogenní prostředí z určitého materiálu o hustotě hmotnosti ρ a kilomolové hmotnosti M_{mol} . Pro úplnost připomeňme jednotky těchto veličin: $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $[M_{\text{mol}}] = \text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.
- Objemová hustota n udává, kolik atomů prvku daného materiálu je obsaženo v jednotkovém objemu, a platí pro ni jednoduchý vztah

$$n = \frac{\rho N_A}{M_{\text{mol}}}, \quad (2.3)$$

kde N_A je Avogadrova konstanta, kterou v rámci celého textu bereme jako $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Zřejmě je tak jednotka objemové hustoty $[n] = \text{m}^{-3}$.

- Jak již bylo zmíněno, vztah výše je definován pro objemovou hustotu atomů prvku daného materiálu. Chceme-li ovšem zjistit objemovou hustotu protonů, resp. neutronů, v určitém materiálu, je nutné vztah (2.3) donásobit protonovým, resp. neutronovým, číslem daného prvku.

- Pro úplnost uvedme, že uvažujeme-li částici procházející homogenním prostředím s objemovou hustotou n , pak tato veličina udává, kolik tzv. rozptylových center v jednotkovém objemu dané látky může částice potkat při svém průchodu prostředím, a tedy na kolika těchto centrech může dojít k jejímu rozptylu, resp. obecně k interakci.

Účinný průřez

- Účinný průřez σ je, obecně řečeno, vhodně normovaná pravděpodobnost interakce částice s prostředím, jejíž jednotkou je jednotka plochy, tj. $[\sigma] = \text{m}^2$. Jinými slovy, ve své podstatě jde o veličinu udávající efektivní velikost plochy dané oblasti, do které se musí částice v prostředí trefit, aby došlo k interakci. V částicové fyzice se velmi často užívá jednotka barn, pro kterou platí $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$.
- Zdefinujme si nyní účinný průřez o něco rigorózněji. Uvažujme svazek částic o hustotě toku j_0 , který interaguje s tenkým terčem o hustotě terčkových center n a objemu dV po dobu t .
 - Účinný průřez interakce částice svazku s terčkovým centrem definujeme jako výtěžek dN_{int} procesu (tj. celkový počet pozorovaných událostí za čas t) vztažený na jednotkovou hustotu toku nalétávajících částic, jednotku času a jedno rozptylové centrum tenkého terče. V této souvislosti připomeňme, že součin $n dV$ udává právě počet rozptylových center v daném objemu.
 - Dle výše uvedeného tak pro účinný průřez máme

$$\sigma = \frac{dN_{\text{int}}}{j_0 t n dV}. \quad (2.4)$$

- Přepíšeme-li výtěžek dN_{int} procesu na tenkém terčiku jako $dN_{\text{int}} = t dR_{\text{int}}$, kde dR_{int} je četnost interakcí (tj. celkový počet pozorovaných událostí za jednotku času), pak

$$dR_{\text{int}} = \sigma n j_0 dV = \sigma n j_0 S dx = I_0 \sigma n dx, \quad (2.5)$$

kde jsme nejprve přepsali objem tenkého terče dle (2.1) a následně využili definice intenzity toku (2.2).

Pravděpodobnost interakce

- Pravděpodobnost dp_A , že náhodně vybraná částice ze svazku nalétávajících částic interaguje s tenkým terčem na úseku dráhy dx , definujeme jako poměr četnosti interakcí vůči intenzitě toku. Dle vztahu (2.5) tak máme

$$dp_A = \frac{dR_{\text{int}}}{I_0} = \sigma n dx. \quad (2.6)$$

- Pravděpodobnost dp_N , že k interakci na úseku dráhy dx nedojde, je potom pravděpodobností doplňkového jevu do jistoty, tj.

$$dp_N = 1 - dp_A = 1 - \sigma n dx. \quad (2.7)$$

Rutherfordův rozptyl

- Diferenciální účinný průřez Rutherfordova rozptylu na pevné bodové terčíkové částici bez spinu je dán vztahem

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta)\right)_R = \left(\frac{\alpha\hbar c Z_1 Z_2}{4T_0}\right)^2 \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}}, \quad (2.8)$$

kde $d\Omega$ je element prostorového úhlu, Z_1 a Z_2 jsou protonová čísla projektilu a terčíkového jádra a T_0 je počáteční kinetická energie projektilu.²

- Ve vztahu (2.8) jsme užili následujících veličin. První veličinou je konstanta jemné struktury α , druhou pak součin $\hbar c$. Platí:

$$\boxed{\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \doteq \frac{1}{137}}, \quad (2.9)$$

kde $\epsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ je permitivita vakua, $e \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ je elementární náboj a součin redukované Planckovy konstanty a rychlosti světla ve vakuu je

$$\boxed{\hbar c \doteq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}. \quad (2.10)$$

- Jelikož diferenciální účinný průřez závisí, z hlediska úhlové závislosti, pouze na úhlu rozptylu ϑ , označme tak

$$\frac{K}{2\pi} \equiv \left(\frac{\alpha\hbar c Z_1 Z_2}{4T_0}\right)^2 \doteq 0,13 \left(\frac{Z_1 Z_2}{T_0}\right)^2 \text{ MeV}^2 \cdot \text{fm}^2. \quad (2.11)$$

- Impaktní parametr pro Rutherfordův rozptyl je

$$\boxed{b(\vartheta) = \frac{\alpha\hbar c Z_1 Z_2}{2T_0} \cot \frac{\vartheta}{2}}.$$

Form faktor

- Uvažujme svazek nerelativistických částic, který se pružně rozptyluje na upevněném nabitěm objektu s rozdělením hustoty náboje $\rho(\mathbf{r})$. Diferenciální účinný průřez tohoto rozptylu je pak dán ve formě součinu diferenciálního účinného průřezu Rutherfordova rozptylu (2.8) a tzv. form faktoru:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta)\right)_R |F(q)|^2}.$$

²Prostorový úhel je část prostoru vymezená rotační kuželovou plochou a jeho jednotkou je steradián. Jeden steradián je takový prostorový úhel, který vymezuje ze středu kulové plochy na jejím povrchu plochu o obsahu rovném kvadrátu jejího poloměru. V současné podobě SI je steradián považován za odvozenou bezrozměrnou jednotku.

- Form faktor $F(q)$, závisající na velikosti předané hybnosti $q \equiv |\mathbf{q}|$, je dán vztahem³

$$F(q) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) dV, \quad (2.12)$$

kde integrujeme přes celou oblast, ve které je náboj, generovaný hustotou náboje $\rho(\mathbf{r})$, soustředěn. Z matematického hlediska je tak form faktor (až na normalizační konstantu) Fourierovu transformací hustoty náboje.

- Součin Ze ve vztahu (2.12) představuje celkový náboj uzavřený v oblasti V , přičemž

$$Ze = \int \rho(\mathbf{r}) dV.$$

2.2 Cvičení č. 3 (8. 11. 2022)

Příklad č. 21. Odvoďte exponenciální zákon, jímž se řídí úbytek částic ze svazku při průchodu homogenním prostředím za předpokladu, že interakce částic s prostředím je statistický proces a pravděpodobnost interakce částice na infinitezimálním úseku její dráhy dx je $dp_A = \sigma n dx$, kde σ je účinný průřez interakce a n je hustota terčkových center.

Řešení

- Označme rozměr homogenního prostředí, v jehož směru prochází svazek částic, jako x . Hledaný vztah, popisující úbytek částic ze svazku při průchodu homogenním prostředím, určíme jako pravděpodobnost toho, že částice projde úsek délky x bez toho, aniž by s prostředím interagovala. Takovou pravděpodobnost pak označíme jako $P_N(x)$.
- Úsek délky x nyní rozdělme na m infinitezimálních intervalů dx , a tedy $x = m dx$, přičemž každý takový interval pokládáme za ekvivalent tenkého terčiku, pro jehož rozměr platí, že $dx \ll x$. Pro počet těchto intervalů pak platí, že $m \rightarrow \infty$.
- Předpokládáme dále, že pravděpodobnost interakce je na historii nezávislý jev, a tudíž pravděpodobnost interakce v libovolném z těchto intervalů není ovlivněna průchodem předchozími intervaly. Ze vztahu (2.7) již víme, že pravděpodobnost, že nedojde k interakci na intervalu dx , je $dp_N = 1 - \sigma n dx$.
- Pravděpodobnost $P_N(x)$ toho, že částice projde úsek x bez interakce je pak podmíněnou pravděpodobností toho, že částice nebude s prostředím interagovat na žádném z m intervalů. Tedy, taková pravděpodobnost je pak dána m -krát vynásobenou pravděpodobností dp_N , resp.

$$P_N(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (dp_N)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \sigma n dx)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sigma n x}{m}\right)^m, \quad (2.13)$$

kde jsme využili toho, že $dx = x/m$.

³Přítomnost normalizačního faktoru $1/Ze$ nebývá některými autory explicitně uvažována.

- Poslední limita je pak známým vztahem pro mocninu Eulerova čísla s exponentem $-\sigma n x$, a tedy pravděpodobnost toho, že částice nebude interagovat s prostředím na úseku délky x je

$$\boxed{P_N(x) = e^{-\sigma n x}}. \quad (2.14)$$

- Ekvivalentně vztahu (2.14), pravděpodobnost, že částice bude interagovat s prostředím na úseku délky x je

$$\boxed{P_A(x) = 1 - e^{-\sigma n x}}. \quad (2.15)$$

Poznámka č. 4.

- Všimněme si analogie mezi vztahy (2.14)-(2.15) a vztahy (1.11)-(1.12), kterou můžeme formálně zapsat jako

$$\begin{aligned} \sigma n &\longleftrightarrow \lambda, \\ x &\longleftrightarrow t. \end{aligned}$$

- Tato analogie dává také jasnou paralelu mezi poločasem rozpadu částice (1.13) a polotloušťkou (2.25), střední dobou života částice (1.19) a střední volnou dráhou (2.32). Stejně tak si lze všimnout i podobnosti ve vztazích (1.69) a (2.39).

Poznámka č. 5.

- Vývoj intenzity svazku částic při průchodu homogenním prostředím na dráze délky x je možno popsat diferenciální rovnicí

$$dI(x) = -I(x)\sigma n dx, \quad (2.16)$$

která říká, že úbytek intenzity na levé straně rovnice je přímo úměrný aktuální intenzitě s konstantou úměrnosti rovnou pravděpodobnosti interakce (2.6) na infinitezimálním úseku dx . Poznamenejme, že z důvodu úbytku veličiny na levé straně rovnice musí být na pravé straně mínus.

- Řešení rovnice (2.16) je možné najít ve tvaru

$$\boxed{I(x) = I_0 e^{-\sigma n x}}, \quad (2.17)$$

kde konstanta I_0 je počáteční intenzita svazku, tj. intenzita v okamžiku vstupu svazku do prostředí, tj. $I_0 \equiv I(x = 0)$. Vidíme tak, že vývoj intenzity svazku v závislosti na souřadnici je modulován exponenciálním faktorem, který je identický s pravděpodobností (2.14).

- Uvědomme si, že četnost dR ve vztahu (2.5) je pak jednoduše jako rozdíl intenzit (2.17) na úseku délky dx :

$$I_0 - I(dx) = I_0 - I_0 e^{-\sigma n dx} = I_0(1 - e^{-\sigma n dx}) \doteq I_0 \sigma n dx = dR_{\text{int}}, \quad (2.18)$$

kde jsme využili Taylorova rozvoje exponenciály do prvního řádu kvůli tomu, že $\sigma n dx \ll 1$.

- V případě úseku délky $x \gg dx$ pak vynecháme ve vztahu (2.18) předponu „d“ a píšme četnost interakcí na tomto úseku jako

$$\boxed{R_{\text{int}}(x) = I_0 - I(x)}, \quad (2.19)$$

který lze pohodlně využít k obecné definici pravděpodobnosti interakce jako

$$\boxed{P_A(x) = \frac{R_{\text{int}}(x)}{I_0}}. \quad (2.20)$$

- Podobně jako v případě (2.18) výše, dosazením (2.17) do (2.19) můžeme psát

$$R_{\text{int}}(x) = I_0 - I_0 e^{-\sigma n x} = I_0 (1 - e^{-\sigma n x}), \quad (2.21)$$

přičemž, pokud je exponent v exponenciále dostatečně malý, tj. $\sigma n x \ll 1$, pak

$$\boxed{R_{\text{int}}(x) \doteq I_0 \sigma n x}. \quad (2.22)$$

- Vraťme se ještě ke vztahu (2.19). Vzpomeneme-li si (viz diskuse okolo vztahu (2.4)), že intenzita znamená počet částic dopadajících na aktivní plochu za jednotku času, pak vynásobením vztahu (2.19) časem t , po který k interakcím může docházet, získáme celkový výtěžek, neboli celkový počet interakcí $N_{\text{int}}(x)$, ke kterým došlo na úseku x . Tedy, platí

$$\boxed{N_{\text{int}}(x) = N_0 - N(x)}, \quad (2.23)$$

kde pro počet částic $N(x)$ platí ekvivalentní vztah jako pro intenzitu, viz (2.17).

Příklad č. 22. Jaká je polotloušťka $x_{1/2}$ terčíku a střední volná dráha ℓ částice, interagující s homogenním terčem o konstantní hustotě terčkových center n s účinným průřezem σ ?

Řešení

- Začněme nejdříve s odvozením polotloušťky terčíku.
 - Polotloušťkou $x_{1/2}$ materiálu rozumíme takovou vzdálenost, po jejímž průchodu částicí je pravděpodobnost interakce částice s prostředím stejná jako pravděpodobnost toho, že k interakci nedojde. Jinými slovy,

$$P_A(x_{1/2}) = P_N(x_{1/2}), \quad (2.24)$$

kde jednotlivé pravděpodobnosti jsou dány vztahy (2.14)-(2.15).

- Dosazením za $x_{1/2}$ namísto x v těchto vztazích a vyřešením této rovnice pak jednoduše máme hledaný vztah pro polotloušťku

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\sigma n}}. \quad (2.25)$$

- Nyní odvodíme střední volnou dráhu částice.

- Formálně řečeno, střední volná dráha ℓ je průměrná vzdálenost, kterou částice urazí mezi dvěma po sobě následujícími interakcemi.
- Na střední volnou dráhu lze taktéž nahlížet jako na střední hodnotu souřadnice x (z hlediska statistiky se jedná o tzv. první moment náhodné veličiny x), a můžeme tak pro ní psát

$$\ell = \int_0^{\infty} x \rho(x) dx, \quad (2.26)$$

kde $\rho(x)$ je tzv. hustota pravděpodobnosti interakce v infinitezimálním okolí bodu x , udávající pravděpodobnostní charakter střední volné dráhy, a kde integrujeme přes všechny možné hodnoty souřadnice x .

- Hustotu pravděpodobnosti interakce definujeme následovně. Spočtíme nejdříve, jaká je pravděpodobnost $dP_A(x)$ toho, že částice bude s homogenním prostředím terče interagovat na infinitezimálním okolí bodu x . Taková pravděpodobnost je určena dvěma faktory. Prvním faktorem je pravděpodobnost $P_N(x)$ toho, že částice projde dráhu x bez interakce s prostředím. Druhým faktorem je pak pravděpodobnost $dp_A(x)$, že částice zainteraguje na infinitezimálním okolí bodu x právě až po projití dráhy x . Jelikož celková pravděpodobnost $dP_A(x)$ je podmíněná splněním platností obou zmíněných faktorů, můžeme užitím vztahů (2.6) a (2.14) pro hledanou pravděpodobnost psát

$$dP_A(x) = P_N(x) dp_A(x) = \sigma n e^{-\sigma n x} dx, \quad (2.27)$$

přičemž hustotu pravděpodobnosti interakce v infinitezimálním okolí bodu x definujeme jako

$$dP_A(x) \equiv \rho(x) dx,$$

a tedy

$$\boxed{\rho(x) = \sigma n e^{-\sigma n x}}. \quad (2.28)$$

- Dosazením (2.28) do definičního vztahu (2.26) máme

$$\ell = \sigma n \int_0^{\infty} x e^{-\sigma n x} dx, \quad (2.29)$$

kde jsme před integrál vytknuli na souřadnici nezávislé veličiny.

- Zbývá nám tak vyčíslit příslušný integrál ve vztahu (2.29). Připomeňme schematicky známý vztah tzv. integrace per-partes,

$$\int_a^b u v' = [u v]_a^b - \int_a^b u' v, \quad (2.30)$$

přičemž v našem případě označme $u \equiv x$ a $v' \equiv e^{-\sigma n x}$. Pak tedy platí $u' = 1$ a $v = -\frac{1}{\sigma n} e^{-\sigma n x}$. Integrál ve vztahu (2.29) tak lze spočítat jako

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-\sigma n x} dx &= -\frac{1}{\sigma n} \underbrace{[x e^{-\sigma n x}]_0^{\infty}}_{= 0} + \frac{1}{\sigma n} \int_0^{\infty} e^{-\sigma n x} dx \\ &= -\frac{1}{(\sigma n)^2} \underbrace{[e^{-\sigma n x}]_0^{\infty}}_{= -1} = \frac{1}{(\sigma n)^2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

– Konečně, dosazením (2.31) do (2.29) máme hledaný vztah pro střední volnou dráhu částice

$$\boxed{\ell = \frac{1}{\sigma n}}. \quad (2.32)$$

Poznámka č. 6.

- Poznamenejme rovněž, že jako tenký terčik označujeme takový terčik, pro jehož tloušťku dx platí, že $dx \ll \ell$.
- Souvislosti mezi polotloušťkou a střední volnou dráhou je evidentně, dle (2.25) a (2.32),

$$x_{1/2} = \ell \ln 2.$$

- Pro úplnost zmiňme, že vztah (2.25) je možné odvodit rovněž ze znalosti faktu, že po projití dráhy o délce polotloušťky klesne původní intenzita svazku částic na polovinu. Platí tak

$$I(x_{1/2}) = \frac{1}{2} I_0,$$

kde levá strana této rovnice je dána vztahem (2.17).

Příklad č. 23. Na terčik o tloušťce d dopadá kolmo homogenní svazek částic a interaguje s médiem terče s účinným průřezem σ . Odvoďte zákon, jimž se řídí průchod částic médiem o hustotě terčkových center $n(x)$ závislé na souřadnici ve směru svazku dopadajících částic. Jaká je polotloušťka terčíku $x_{1/2}$ a střední volná délka ℓ částice v médiu?

Řešení

- Začněme nejdříve s odvozením zákona, jimž se řídí průchod částic médiem s parametry ze zadání.
 - Vyjdeme z diferenciální rovnice (2.16), ve které ovšem musíme původně konstantní objemovou hustotu terčkových center n zaměnit za na souřadnici závislou funkci $n(x)$. Máme tak

$$dI(x) = -I(x)\sigma n(x) dx,$$

jejímž řešením je funkce $I(x)$, popisující změnu původní intenzity I_0 s průchodem svazku prostředím do souřadnice x , přičemž

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma m(x)}, \quad (2.33)$$

kde však nyní je proměnná v exponentu exponenciály dána jako

$$m(x) = \int_0^x n(x') dx'. \quad (2.34)$$

- Nyní odvodíme polotloušťku terčíku. Vyjdeme ze vztahu (2.24), kde si ovšem příslušné pravděpodobnosti musíme vhodně modifikovat z důvodu na souřadnici závislé objemové hustotě $n(x)$.

- Známe-li obecnou závislost intenzity $I(x)$ na souřadnici dle vztahu (2.33), můžeme využít definici (2.20) pro pravděpodobnost interakce částice po průchodu dráhou x , díky čemuž máme⁴

$$P'_A(x) = 1 - e^{-\sigma m(x)}$$

a

$$P'_N(x) = e^{-\sigma m(x)},$$

což je ekvivalentním vztahům (2.14)-(2.15) po záměně $nx \rightarrow m(x)$.

- Nyní je již možné užít ekvivalentního vztahu k (2.24) a psát

$$P'_A(x_{1/2}) = P'_N(x_{1/2}),$$

přičemž řešení této rovnosti je integrální rovnice pro $x_{1/2}$ ve tvaru

$$m(x_{1/2}) = \frac{\ln 2}{\sigma}, \quad (2.35)$$

resp.

$$\int_0^{x_{1/2}} n(x) dx = \frac{\ln 2}{\sigma},$$

a tedy analytické řešení pro polotloušťku $x_{1/2}$ je možné najít až po zadání konkrétní funkce $n(x)$.

- Nyní odvodíme střední volnou dráhu částice.
 - Podobně jako v příkladu č. 22, i nyní je třeba začít definicí hustoty pravděpodobnosti interakce. Pravděpodobnost toho, že částice proletí dráhu x bez interakce a zainteraguje až na infinitezimálním okolí bodu x je ekvivalentně vztahu (2.27), je dána jako

$$dP'_A(x) = \sigma n(x) e^{-\sigma m(x)} dx,$$

⁴Užíváme apostrofu k odlišení těchto pravděpodobností od těch ze vztahů (2.14)-(2.15), u kterých je objemová hustota konstantní. Podobně tak odlišujeme i další veličiny níže.

kde jsme provedli evidentní záměny v podobě $n \rightarrow n(x)$ a $nx \rightarrow m(x)$. Pro hustotu pravděpodobnosti interakce v infinitezimálním okolí bodu x pak máme

$$\boxed{\rho'(x) = \sigma n(x) e^{-\sigma m(x)},} \quad (2.36)$$

ekvivalentně vztahu (2.28).

- Dosazením (2.36) do definičního vztahu (2.26) pak pro střední volnou délku máme

$$\boxed{\ell' = \sigma \int_0^\infty x n(x) e^{-\sigma m(x)} dx.} \quad (2.37)$$

Příklad č. 24. Jaká je střední hloubka vniknutí částice do terčíku a jeho polotloušťka, ubývá-li hustota terčíkových center ve směru svazku jako $n(x) = \frac{1}{\sigma(2d-x)}$ pro $x \in \langle 0, d \rangle$, kde d je tloušťka terčíku a σ je účinný průřez?

Řešení

- Začneme nejdříve s odvozením střední hloubky vniknutí částice do terčíku.
 - Nejdříve je třeba určit parametr $m(x)$, pro který dle jeho definice (2.34) platí

$$m(x) = \frac{1}{\sigma} \int_0^x \frac{dx'}{2d-x'} = -\frac{1}{\sigma} [\ln |x' - 2d|]_0^x = -\frac{1}{\sigma} \ln \frac{2d-x}{2d},$$

kde jsme ve druhém kroku využili faktu, že není třeba v argumentu logaritmu psát absolutní hodnotu, jelikož $x \in \langle 0, d \rangle$. Tedy, po drobné úpravě,

$$m(x) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{2d}{2d-x}. \quad (2.38)$$

- Nyní je možné dosadit (2.38) do vztahu (2.37) pro střední hloubku vniknutí. Opětovně připomeňme, že $x \in \langle 0, d \rangle$, a tak není třeba ve vztahu (2.37) integrovat do nekonečna, ale pouze do d . Máme tak, s užitím vlastnosti $e^{\ln a} = a$ pro $a > 0$,

$$\ell' = \sigma \int_0^d x \frac{1}{\sigma(2d-x)} \frac{2d-x}{2d} dx = \frac{1}{2d} \int_0^d x dx,$$

a tedy

$$\boxed{\ell' = \frac{d}{4}.}$$

- Nyní odvodíme střední polotloušťku terčíku.
 - Užijeme vztahu (2.35) a pro tento příklad konkrétního výrazu (2.38), přičemž

$$\frac{\ln 2}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{2d}{2d-x_{1/2}},$$

odkud pak jednoduše plyne

$$\boxed{x_{1/2} = d.}$$

Poznámka č. 7.

- Jak jsme již v řešení výše uvedeného příkladu opakovaně zmínili, jelikož je rozměr terčiku d , odpovídající souřadnice x nabývá hodnot v intervalu $\langle 0, d \rangle$ a proto není třeba pro výpočet střední volné dráhy ve vztahu (2.37) integrovat od nuly do nekonečna. Z tohoto důvodu jsme oprávněni předpokládat, že pro $x > d$ je $n(x) = 0$ ze samotné povahy této úlohy, jelikož v takovém případě je svazek mimo terčik a jeho rozptylová centra zde již nejsou přítomna. Uvědomme si také, že pokud bychom uvedený argument nepřijali, pro $x > d$ by zadaná hustota terčíkových center byla dle zadání záporná, což by nemělo fyzikální smysl.
- V některých úlohách, s vhodně nastavenými parametry (typicky s malými účinnými průřezy a vysokými objemovými hustotami částic), je často možné střední volnou dráhu částice v daném médiu určit vskutku jako integrál jen přes část integračního oboru — jako ilustraci uveďme první domácí úkol B.1, resp. vztah (B.6).

Příklad č. 25. Jaká je pravděpodobnost, že při elastickém rozptylu na malé úhly v homogenním médiu s hustotou n terčíkových center interaguje částice s rozptylovými centry na dráze L právě k -krát? Účinný průřez zkoumané interakce je σ .

Řešení

- Elastický rozptyl do malých úhlů znamená, že trajektorie částice se nepřilíší od úsečky. Dle zadání tak víme, že jde o úlohu ekvivalentní příkladu č. 14 — zatímco v takové úloze šlo o pomyslný pohyb částice podél časové osy, nyní se jedná o skutečný pohyb od počátku po koncový bod L . Řešení tohoto příkladu tak bude inspirováno řešením úlohy č. 14.
- Uvažujme úsek homogenního média o délce L rozdělený na $k - 1$ intervalů s k dělicími body $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, které chronologicky odpovídají okamžikům, na jejichž infinitezimálních okolích postupně došlo ke k elastickým rozptylům dané částice na malé úhly. Schematicky toto dělení zmíněného úseku můžeme zapsat jako sjednocení jednotlivých intervalů,

$$\langle 0, L \rangle = \langle 0, x_1 \rangle \cup (x_1, x_2) \cup (x_2, x_3) \cup \dots \cup (x_{k-1}, x_k) \cup (x_k, L),$$

kde naznačené střídání zprava uzavřeného a zleva otevřeného intervalu symbolizuje rozptyl částice na infinitezimálním okolí příslušného okamžiku.

- Celková hledaná pravděpodobnost $P_k(L)$ je pak dána součinem pravděpodobností rozptylů na jednotlivých intervalech. Konkrétně máme následující příspěvky, které detailně popíšeme.

- Interval $\langle 0, x_1 \rangle$. Zopakujme nejprve pravděpodobnosti jednotlivých dějů. Pravděpodobnost, že částice na ose doletí bez rozptylu z počátku do bodu x_1 je $e^{-\sigma n x_1}$. Dále, pravděpodobnost toho, že dojde k rozptylu této částice na infinitezimálním okolí bodu x_1 je $\sigma n dx_1$. Tedy, pravděpodobnost události, že částice doletí bez rozptylu z počátku do bodu x_1 a následně se na infinitezimálním okolí tohoto okamžiku rozptýlí, je $\sigma n e^{-\sigma n x_1} dx_1$ (viz též vztah (2.28)). Jelikož však bod x_1 může ležet kdekoli mezi počátkem a koncem L úseku, je příspěvek intervalu $\langle 0, x_1 \rangle$ do celkové pravděpodobnosti $P_k(L)$ určen vztahem

$$\sigma n \int_0^{x_1} e^{-\sigma n x_1} dx_1 .$$

- Interval $\langle x_1, x_2 \rangle$. Jelikož pravidlo, podle kterého je možné zapsat příslušný příspěvek tohoto intervalu do pravděpodobnosti $P_k(L)$, je již zřejmé, napíšeme jej rovnou jako

$$\sigma n \int_{x_1}^L e^{-\sigma n(x_2-x_1)} dx_2 ,$$

kde jsme vzali do úvahy, že bod x_2 druhého rozptylu musí následovat až po x_1 a může nastat kdykoliv před L .

- Interval $\langle x_2, x_3 \rangle$. Podobně jako v předchozích případech, příspěvek pravděpodobnosti, že po rozptylu na infinitezimálním okolí bodu x_2 doletěla částice bez rozptylu do bodu x_3 a rozptýlila se na jeho infinitezimálním okolí, je

$$\sigma n \int_{x_2}^L e^{-\sigma n(x_3-x_2)} dx_3 ,$$

jelikož bod x_3 může ležet kdekoli mezi bodem x_2 druhého rozptylu a koncovým bodem L .

- Interval $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$. Způsobem popsaným výše bychom mohli postupovat dále pro všechny zbývající intervaly. Z formálních důvodů však zapíšeme až příspěvek pravděpodobnosti, že po rozptylu na infinitezimálním okolí bodu x_{k-1} doletěla částice bez rozptylu do bodu x_k a rozptýlila se na jeho infinitezimálním okolí:

$$\sigma n \int_{x_{k-1}}^L e^{-\sigma n(x_k-x_{k-1})} dx_k .$$

- Interval $\langle x_k, L \rangle$. Uvědomme si, že před začátkem tohoto intervalu již došlo ke k rozptylům dané částice. Vyžadujeme tak, aby tato částice z infinitezimálního okolí bodu x_k do koncového bodu L už doletěla bez rozptylu. Pravděpodobnost toho je dle vztahu (2.14) jednoduše

$$e^{-\sigma n(L-x_k)} ,$$

a kde již, z výše uvedeného důvodu, žádná integrace neprobíhá.

- Z výše uvedených jednotlivých příspěvků pravděpodobností si všimněme, že každý z k rozptylů na infinitezimálních okolích příslušných bodů přispívá faktorem σn a náležitou integrací. Výsledný vztah pro pravděpodobnost $P_k(L)$ tak obsahuje, mimo jiné, faktor $(\sigma n)^k$ a k -dimenzionální integraci. Konkrétně, platí

$$P_k(L) = (\sigma n)^k \int_0^L e^{-\sigma n x_1} \int_{x_1}^L e^{-\sigma n(x_2-x_1)} \int_{x_2}^L e^{-\sigma n(x_3-x_2)} \dots \dots \int_{x_{k-1}}^L e^{-\sigma n(x_k-x_{k-1})} e^{-\sigma n(L-x_k)} dx_k \dots dx_3 dx_2 dx_1,$$

kde se však většina exponenciálních členů vzájemně vyruší, což lze pro úplnost názorně ukázat sečtením jednotlivých exponentů:

$$-\sigma n x_1 - \sigma n(x_2 - x_1) - \sigma n(x_3 - x_2) - \dots - \sigma n(x_k - x_{k-1}) - \sigma n(L - x_k) = -\sigma n L.$$

Jedinou zbývající exponenciálou je tak $e^{-\sigma n L}$, na níž samozřejmě integrace nezávisí.

- Máme tedy

$$P_k(L) = (\sigma n)^k e^{-\sigma n L} \int_0^L \int_{x_1}^L \int_{x_2}^L \dots \int_{x_{k-1}}^L dx_k \dots dx_3 dx_2 dx_1,$$

kde však již poznáváme známý integrál ze vztahu (1.68), pro který tak platí

$$\int_0^L \int_{x_1}^L \int_{x_2}^L \dots \int_{x_{k-1}}^L dx_k \dots dx_3 dx_2 dx_1 = \frac{L^k}{k!}.$$

- Celkově nám pak vyjde, že pravděpodobnost k elastických rozptylů na malé úhly na dráze délky L je tedy

$$P_k(L) = \frac{(\sigma n L)^k}{k!} e^{-\sigma n L}, \quad (2.39)$$

což je známý vztah pro Poissonovo pravděpodobnostní rozdělení s parametrem $\sigma n L$.

Poznámka č. 8.

- K řešení lze dojít i bez použití integrace přes všechny možné úseky výskytu jednotlivých bodů interakce x_1, \dots, x_k . Analogicky s příkladem č. 21 rozdělme úsek délky L na m infinitezimálních úseků dx , přičemž $dx = L/m$ a $m \rightarrow \infty$.
- Dle zadání tak k interakcím dojde právě na k infinitezimálních úsecích, zatímco na $m - k$ nikoliv. Celková pravděpodobnost $P_k(L)$ je tak přímo úměrná součinu k -krát vynásobené pravděpodobnosti interakce (2.6) s $(m - k)$ -krát vynásobenou pravděpodobností neinterakce (2.7).
- Zbývá tak určit tuto konstantu úměrnosti. Uvědomme si, že vybíráme k intervalů z celkového počtu m . Každý z intervalů, na kterém k interakci dojde, je v tomto výběru zastoupen právě jednou (v souladu s tím, co bylo řečeno o tenkém terčíku, předpokládáme, že na infinitezimálním úseku může dojít k interakci nejvýše jednou) a na jeho pořadí ve výběru nám nezáleží (nevybíráme tyto intervaly nutně v tom pořadí, v jakém na nich došlo k interakci). Evidentně tak jde o počet kombinací výběru k prvků z m bez opakování, který je určen kombinačním číslem $\binom{m}{k}$.

- Tedy, pro hledanou pravděpodobnost máme

$$P_k(L) = \lim_{m \rightarrow \infty} \binom{m}{k} \left(\frac{\sigma n L}{m} \right)^k \left(1 - \frac{\sigma n L}{m} \right)^{m-k}.$$

- Výpočet této limity je pak možno provést v následujících krocích. Rozepíšeme kombinační číslo, před znaménko limity přesuneme část, na kterou limita nepůsobí, a poslední člen upravíme jako součin dvou faktorů. Máme tak

$$\begin{aligned} P_k(L) &= \frac{(\sigma n L)^k}{k!} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{(m-k)! m^k} \underbrace{\left(1 - \frac{\sigma n L}{m} \right)^m}_{\rightarrow e^{-\sigma n L}} \underbrace{\left(1 - \frac{\sigma n L}{m} \right)^{-k}}_{\rightarrow 1}, \\ &= \frac{(\sigma n L)^k}{k!} e^{-\sigma n L} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{(m-k)! m^k}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

kde jsme již využili toho, že člen s m -tou mocninou již známe, viz (2.13), a že poslední člen je z hlediska limitního přechodu bezpečný a limitně se blíží jedničce.

- Zbývající limitu však již známe a víme, že je rovna jedné — viz vztah (1.71). Vidíme tedy, že vztah (2.40) vskutku reprodukuje výsledek (2.39).

Poznámka č. 9.

- Mnohonásobný rozptyl potkáme ve Fyzikálním praktiku IV u úlohy č. A5 (Spektrometrie záření α), Poissonovo rozdělení pak u úlohy č. A7 (Pozitronová emisní tomografie).

Příklad č. 26. Jaká je střední vzdálenost mezi dvěma pružnými srážkami protonů ve vodíkové bublinové komoře, je-li účinný průřez pružného rozptylu protonu na protonu $\sigma_{pp} = 0,7 \text{ fm}^2$, hustota kapalného vodíku $\rho_{\text{H}_2} = 63 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a kilomolová hmotnost vodíku $M_{\text{H}_2} = 2,016 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$? Jaká je pravděpodobnost, že ve vodíkové bublinové komoře délky $L = 1 \text{ m}$ je vidět dráhu s právě dvěma pružnými srážkami, jestliže rozptýlený proton vyletuje pod malým úhlem?

Řešení

- Začneme se střední volnou vzdáleností mezi dvěma pružnými srážkami.
 - Nejprve si převedeme jednotky účinného průřezu a kilomolové hmotnosti vodíku jednoduše jako

$$\begin{aligned} \sigma_{pp} &= 0,7 \text{ fm}^2 = 0,7 \cdot (10^{-15} \text{ m})^2 = 7 \cdot 10^{-31} \text{ m}^2, \\ M_{\text{H}_2} &= 2,016 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 2,016 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 2,016 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}. \end{aligned}$$

- Známe-li účinný průřez interakce dvou protonů, k určení střední volné vzdálenosti mezi srážkami potřebujeme zjistit jejich objemovou hustotu. Plynný vodík se vyskytuje ve dvouatomové molekule H_2 , která je tak tvořena dvěma protony. Jinými slovy, objemová hustota protonů je dána dvojnásobkem objemové hustoty vodíku, a tedy dle (2.3)

$$n_p = 2 \frac{\rho_{\text{H}_2} N_A}{M_{\text{H}_2}} \doteq 3,75 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

- Dosazením do (2.32) pak pro střední volnou dráhu platí

$$\ell = \frac{1}{\sigma_{pp} n_p} \doteq 38,1 \text{ m}. \quad (2.41)$$

- Pravděpodobnost pozorování dvou pružných srážek do malých úhlů je jednoduše dána již dříve odvozeným obecným výrazem (2.39), přičemž v našem případě je $k = 2$ a $L = 1 \text{ m}$. Máme tak

$$P_2(L = 1 \text{ m}) = \frac{(\sigma_{pp} n_p L)^2}{2} e^{-\sigma_{pp} n_p L}.$$

- Užitím vztahu (2.41) a již známé numerické hodnoty jeho výsledku pak máme

$$P_2(L = 1 \text{ m}) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\ell} \right)^2 e^{-L/\ell} \doteq 3,4 \cdot 10^{-4},$$

a tedy hledaná pravděpodobnost je $P_2(L = 1 \text{ m}) \doteq 0,034\%$.

Příklad č. 27. Jaký počet protonů musí být vpuštěn do vodíkové bublinové komory dlouhé $L_{\text{H}_2} = 1 \text{ m}$, aby bylo vidět $N_{\text{H}_2}^{\text{int}} = 5$ nepružných interakcí? Hustota kapalného vodíku je $\rho_{\text{H}_2} = 63 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $M_{\text{H}_2} = 2,016 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ je kilomolová hmotnost vodíku. Účinný průřez nepružné interakce při zadané energii je $\sigma_{pp} = 3,2 \text{ fm}^2$. Kolik protonů ze stejného svazku by nepružně interagovalo v železné (^{56}Fe) stěně komory tlusté $L_{\text{Fe}} = 5 \text{ cm}$, je-li účinný průřez nepružné interakce protonů v železném mediu $\sigma_{p\text{Fe}} = 50 \text{ fm}^2$? Hustota železa je $\rho_{\text{Fe}} = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $M_{\text{Fe}} = 56 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ je kilomolová hmotnost železa.

Řešení

- Nejprve si převedeme jednotky příslušných veličin na vhodnější tvar:

$$M_{\text{H}_2} = 2,016 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 2,016 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 2,016 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$\sigma_{pp} = 3,2 \text{ fm}^2 = 3,2 \cdot (10^{-15} \text{ m})^2 = 3,2 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2,$$

$$L_{\text{Fe}} = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$\sigma_{p\text{Fe}} = 50 \text{ fm}^2 = 50 \cdot (10^{-15} \text{ m})^2 = 5 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2,$$

$$M_{\text{Fe}} = 56 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 56 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- Věnujme se nyní výpočtu počátečního počtu protonů, který je zapotřebí k detekci $N_{\text{H}_2}^{\text{int}} = 5$ nepružných interakcí.

– Ze zadání je zřejmé, že se jedná o úlohu na aplikaci vztahu (2.23), kde levá strana této rovnice je žádoucí počet nepružných interakcí na dráze L_{H_2} a hledanou veličinou je počáteční počet protonů N_0 .

– Dosazením do vztahu (2.23) a užitím (2.17) tak máme

$$N_{\text{H}_2}^{\text{int}} = N_0 - N(L_{\text{H}_2}) = N_0 - N_0 e^{-\sigma_{pp} n_p L_{\text{H}_2}} = N_0 \left(1 - e^{-\sigma_{pp} n_p L_{\text{H}_2}} \right),$$

tedy

$$N_0 = \frac{N_{\text{H}_2}^{\text{int}}}{1 - e^{-\sigma_{pp} n_p L_{\text{H}_2}}},$$

kde n_p je objemová hustota protonů.

– Stejně jako v minulém případě, i zde pro objemovou hustotu protonů ve vodíkové bublinové komoře platí (2.2), a tak

$$N_0 = \frac{N_{\text{H}_2}^{\text{int}}}{1 - \exp\left(-\frac{2\sigma_{pp} \rho_{\text{H}_2} N_A L_{\text{H}_2}}{M_{\text{H}_2}}\right)} \doteq 44, 2.$$

– K pozorování 5 nepružných interakcí je tak třeba do vodíkové bublinové komory vpustit právě 44 protonů.

- Uvažujeme-li svazek o počtu $N_0 = 44$ protonů, jak jsme spočítali výše, pak po záměně (H_2, σ_{pp}) \rightarrow ($\text{Fe}, \sigma_{p\text{Fe}}$) dostaneme

$$N_{\text{Fe}}^{\text{int}} = N_0 \left(1 - e^{-\sigma_{p\text{Fe}} n_{\text{Fe}} L_{\text{Fe}}} \right),$$

kde

$$n_{\text{Fe}} = \frac{\rho_{\text{Fe}} N_A}{M_{\text{Fe}}} \doteq 8, 4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

je objemová hustota železa.

- Tedy, v železné stěně komory by interagovalo

$$N_{\text{Fe}}^{\text{int}} = N_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma_{p\text{Fe}} \rho_{\text{Fe}} N_A L_{\text{Fe}}}{M_{\text{Fe}}}\right) \right] \doteq 8, 3,$$

tj. asi 8 protonů.

Příklad č. 28. Jaká je maximální pravděpodobnost interakce neutrína o energii $E_\nu \simeq 10 \text{ GeV}$ při průletu Zemí, je-li účinný průřez interakce neutrína s nukleonem $\sigma = 10^{-42} \text{ m}^2$? Průměrná hustota Země je $\rho = 5\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a její poloměr je $R_Z = 6\,378 \text{ km}$. Kilomolová hmotnost nukleonové látky je $M = 1 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Jde o úlohu na aplikaci vztahu (2.15), přičemž abychom určili maximální pravděpodobnost interakce neutrína při průletu Zemí, je nutno předpokládat, že takové neutrino prochází po co nejdelší dráze, tj. dráze rovné průměru Země, neboli $2R_Z$.
- Převedením kilomolové hmotnosti nukleonové látky,

$$M = 1 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1},$$

pak lze jednoduše získat objemovou hustotu rozptylových center v jednotkovém objemu zemského materiálu jako

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = 3,3 \cdot 10^{30} \text{ m}^{-3}.$$

- Dosazením do vztahu (2.15) pak pro maximální pravděpodobnost máme

$$P_A(2R_Z) = 1 - e^{-2\sigma n R_Z} = 1 - \exp\left(-\frac{2\sigma \rho N_A R_Z}{M}\right) \doteq 4,2 \cdot 10^{-5}.$$

- Vidíme tak, že pro slabě interagující neutrino je Země takřka průhledná a maximální pravděpodobnost interakce je $4,2 \cdot 10^{-3} \%$.

Příklad č. 29. Odhadněte hustotu toku neutrin o energii $E_\nu \approx 1 \text{ GeV}$ nutnou k tomu, aby byla pozorována jedna interakce neutrína s nukleonem za hodinu v detektoru o hmotnosti $m = 10 \text{ t}$. Účinný průřez interakce neutrína s nukleonem je při této energii $4 \cdot 10^{-43} \text{ m}^2$ a kilomolová hmotnost nukleonové látky je $M_{\text{mol}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Dle zadání by již mělo být zřejmé, že jde o úlohu na aplikaci vztahu (2.21).
- Jako vždy, nejprve převedeme jednotky těch veličin, které nejsou v základních jednotkách:

$$m = 10 \text{ t} = 10 \cdot (10^3 \text{ kg}) = 10^4 \text{ kg},$$

$$M_{\text{mol}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- Uvědomme si, že známe požadovanou četnost interakce, kterou je jedna detekovaná událost za hodinu, tj.

$$R_{\text{int}} = 1 \text{ hod}^{-1} = (3600 \text{ s})^{-1} \doteq 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

- Máme-li určit hustotu toku j_0 neutrin, pak pro intenzitu toku těchto neutrin platí $I_0 = j_0 S$, kde S je aktivní plocha detektoru, na kterou svazek neutrin dopadá.
- Z předchozích úloh je zřejmé, že v příkladech tohoto typu bude třeba dříve či později určit objemovou hustotu n rozptylových center v detektoru. Nicméně, v zadání nemáme informaci o hustotě materiálu detektoru ani o jeho objemu, známe pouze jeho hmotnost. Předpokládejme tak, že pro hmotnost tohoto detektoru platí $m = \rho V$, přičemž šířka detektoru je x a jeho plošný rozměr je dán již zmíněnou aktivní plochou S , tj. $V = Sx$.
- Upravme si tak nejprve součin $\sigma n x$, tj. i s naznačenými úpravami postupně máme

$$\sigma n x = \sigma \left(\frac{\rho N_A}{M_{\text{mol}}} \right) x \Big|_{\rho = \frac{m}{V}} = \frac{\sigma m N_A x}{M_{\text{mol}} V} \Big|_{V = Sx} = \frac{\sigma m N_A x}{M_{\text{mol}} S x} = \frac{\sigma m N_A}{M_{\text{mol}} S},$$

tj. po dosazení numerických hodnot zadaných veličin platí

$$\sigma n x = \frac{2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2}{S}.$$

- Jak je zvykem v úlohách tohoto typu, předpokládáme, že se jedná o reálné zadání, tj. že aktivní plocha detektoru má „rozumnou“ velikost. Můžeme pak zcela jistě předpokládat, že $\sigma n x \ll 1$, a místo vztahu (2.21) pak lze pro četnost uvažovat vztah (2.22), a tedy

$$R_{\text{int}} = I_0 \sigma n x \Big|_{I_0 = S j_0} = (S j_0) \left(\frac{\sigma m N_A}{M_{\text{mol}} S} \right) = \frac{j_0 \sigma m N_A}{M_{\text{mol}}}.$$

- Pro hledanou hustotu toku tak konečně máme

$$\boxed{j_0 = \frac{R_{\text{int}} M_{\text{mol}}}{\sigma m N_A} \doteq 1,16 \cdot 10^8 \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}.} \quad (2.42)$$

Poznámka č. 10.

- Jak jsme již v řešení tohoto příkladu zdůraznili, o námi probíraných úlohách explicitně předpokládáme, že jejich zadání jsou „rozumná“ v tom smyslu, že mají reálný základ, vycházející ze skutečných předloh. Jinými slovy, často předpokládáme, že podmínka $\sigma n x \ll 1$ je v takových případech splněna, ačkoliv není na škodu se o tom přesvědčit výpočtem.

- Dále je pak třeba zmínit, že v řešení úloh tohoto typu se můžeme setkat s tím, že detektoru přisoudíme neznámý podélný, příčný nebo plošný rozměr. Obvykle tak činíme proto, abychom dokázali zkombinovat veličiny rozměru d , plochy S nebo objemu V se vztahem (2.2) pro intenzitu nebo s výrazem $m = \rho V$. Tento postup samozřejmě předpokládá, že některá z uvedených veličin bývá známá ze zadání a námi zavedený parametr se musí vhodně „absorbovat“, aby na něm výsledek nezávisel.

Příklad č. 30. Hustota toku atmosférických neutrin tvořených při interakci částic kosmického záření s atmosférou je na povrchu Země asi $j_\nu \approx 10^5 \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Kolik událostí je možné pozorovat v pozemském detektoru o hmotnosti $m = 1 \text{ t}$ za rok, je-li energie atmosférických neutrin $E_\nu \approx 1 \text{ GeV}$? Účinný průřez interakce neutrina s nukleonem je při této energii $4 \cdot 10^{-43} \text{ m}^2$ a kilomolová hmotnost nukleonové látky je $M_{\text{mol}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Typově se jedná o úlohu totožnou s příkladem č. 29. Vskutku, rozdíl je akorát v tom, že zatímco v předchozím příkladu jsme znali četnost a hledali hustotu toku, nyní známe hustotu toku a hledáme četnost, resp. přesněji celkový počet interakcí za určitou dobu.
- Z analytického výsledku (2.42) tak můžeme okamžitě vyjádřit vztah pro četnost jako

$$R_{\text{int}} = \frac{j_0 \sigma m N_A}{M_{\text{mol}}} . \quad (2.43)$$

- Než budeme moci do předchozího vztahu dosadit, opětovně převedeme jednotky některých veličin na základní tvar:

$$m = 1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg} , \\ M_{\text{mol}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} .$$

- Nyní je tak možné dosadit do (2.43), přičemž

$$R_{\text{int}} \doteq 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} .$$

- Uvědomme si však, že tento výsledek udává četnost interakcí za jednotku času. Jelikož chceme znát počet interakcí za 1 rok, je třeba jej vynásobit počtem sekund v jednom roce, tj. $t_{(1\text{y})} = 3600 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s}$. Hledaným počtem interakcí za 1 rok je tak⁵

$$N_{\text{int}} = R_{\text{int}} t_{(1\text{y})} \doteq 0,76 .$$

⁵Připomeňme, že číselnou hodnotu $t_{(1\text{y})}$ lze aproximovat známým vztahem $t_{(1\text{y})} \doteq \pi \cdot 10^7 \text{ s}$.

2.3 Cvičení č. 4 (22. 11. 2021)

Příklad č. 31. Terčíkem z kapalného vodíku o objemu $V = 10^{-4} \text{ m}^3$ a hustotě $\rho_{\text{H}_2} = 63 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ prochází široký monoenergetický svazek pionů π^- o hustotě toku $j_0 = 10^7 \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Piony π^- interagují s jádry vodíku v interakci $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ o účinném průřezu $\sigma_{\pi^-p} = 45 \text{ mb}$. Jakou četnost γ -kvant z rozpadu $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ lze pozorovat? Kilomolová hmotnost vodíku je $M_{\text{H}_2} = 2,016 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Převědme nejprve jednotky některých veličin na základní tvar:

$$\sigma_{\pi^-p} = 45 \text{ mb} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ b} = 45 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 = 4,5 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2,$$

$$M_{\text{H}_2} = 2,016 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 2,016 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 2,016 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- Evidentně, jde o úlohu na aplikaci vztahu (2.21) pro četnost. Předpokládejme, že pro objem V terčíku platí, že $V = Sd$, kde d je podélný rozměr a S je aktivní plocha terčíku, na který dopadá zmíněný svazek pionů o hustotě toku j_0 . Můžeme tak, díky vztahu (2.2), uvažovat intenzitu I_0 toku pionů jako $I_0 = j_0 S$. Zajímá-li nás, jakou četnost γ -kvant lze pozorovat, je třeba nechat piony interagovat s terčíkem po celé jeho šířce d .
- Předpokládáme-li, že situace v zadání je založena na reálné předloze, a tedy, že rozměry terčíku jsou dostatečně „rozumné“, zkusme ověřit, zdalipak $\sigma_{\pi^-p} n_p d \ll 1$, kde n_p je objemová hustota protonů. Jelikož se plynný vodík se vyskytuje ve dvouatomové molekule H_2 , platí

$$n_p = 2 \frac{\rho_{\text{H}_2} N_A}{M_{\text{H}_2}} = 3,75 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, \quad (2.44)$$

z čehož je zřejmé, že $\sigma_{\pi^-p} n_p \ll 1$. Dále, pokud by se jednalo o terčík ve tvaru krychle, jeho charakteristický rozměr by byl $d \doteq 4,6 \text{ cm}$. Zcela jistě tak výše uvedená podmínka platí a jsme tedy oprávněni namísto vztahu (2.21) užít jeho aproximativní verzi (2.22).

- Uvědomme si dále, že interakce $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ produkuje jeden neutrální pion π^0 , který se pak rozpadá na dvě γ -kvanta. Četnost R_γ produkce γ -kvant je tak rovna dvojnásobku četnosti R_{π^0} produkce π^0 , která je rovna četnosti interakce nabitých pionů π^- s jádry vodíku, tj. s protony.
- Dle výše uvedeného a vztahu (2.22) tak máme

$$R_\gamma = 2R_{\pi^0} = 2I_0 \sigma_{\pi^-p} n_p d \Big|_{I_0=j_0 S} = 2j_0 S \sigma_{\pi^-p} n_p d \Big|_{V=Sd} = 2j_0 \sigma_{\pi^-p} n_p V,$$

a tedy, po dosazení za n_p dle (2.44),

$$R_\gamma = 4j_0 \sigma_{\pi^-p} \frac{\rho_{\text{H}_2} N_A}{M_{\text{H}_2}} V \doteq 337,5 \text{ s}^{-1}.$$

- Každou sekundu je registrováno zhruba 338 γ -kvant pocházejících z rozpadu π^0 , vznikajícího v reakci $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$.

Příklad č. 32. Hustota bóru ^{10}B je $\rho_{\text{B}} = 2\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, jeho kilomolová hmotnost je $M_{\text{B}} = 10,811 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ a jeho účinný průřez pro záchyt tepelných neutronů, které jsou v termodynamické rovnováze s prostředím, je při pokojové teplotě $\sigma_{n\text{B}} = 4 \cdot 10^{-26} \text{ m}^2$. Jak tlustá vrstva bóru ^{10}B pohltí 99% ze svazku dopadajících tepelných neutronů?

Řešení

- Označme si obecně poměrnou část pohlcených dopadajících neutronů ze svazku jako f a tloušťku vrstvy nutnou k pohlcení frakce f svazku jako d_f . Dále, označme původní intenzitu svazku jako I_0 , přičemž intenzita tohoto svazku po průchodu vrstvou o tloušťce d_f bude, dle vztahu (2.17),

$$I(d_f) = I_0 e^{-\sigma_{n\text{B}} n_{\text{B}} d_f},$$

kde n_{B} je objemová hustota bóru,

$$n_{\text{B}} = \frac{\rho_{\text{B}} N_{\text{A}}}{M_{\text{B}}} \doteq 1,39 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}.$$

- Četnost interakcí tepelných neutronů při průchodu vrstvou bóru o tloušťce d_f je pak dána, dle vztahu (2.19), jako rozdíl $I_0 - I(d_f)$, přičemž zmíněná frakce f je pak přirozeně určena jako poměr této četnosti vůči původní intenzitě. Máme tak

$$f = \frac{I_0 - I(d_f)}{I_0} = \frac{I_0 - I_0 e^{-\sigma_{n\text{B}} n_{\text{B}} d_f}}{I_0} = 1 - e^{-\sigma_{n\text{B}} n_{\text{B}} d_f}, \quad (2.45)$$

což dává zcela obecný vztah ve tvaru

$$d_f = -\frac{\ln(1-f)}{\sigma_{n\text{B}} n_{\text{B}}}.$$

- Pro frakci $f = 0,99$ ze zadání pak máme

$$d_{0,99} = -\frac{\ln(1-0,99)}{\sigma_{n\text{B}} n_{\text{B}}} \doteq 0,83 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

- Tedy, k pohlcení 99% svazku tepelných neutronů stačí vrstva bóru tlustá 0,83 mm.

Příklad č. 33. Účinný průřez silně interagujícího protonu s protonem je $\sigma_{pp} = 40 \text{ mb}$. Jaká relativní část protonů je rozptýlena, když kolimovaný svazek protonů je vyslán skrz kapalnou vodíkový terčik o tloušťce $d = 0,3 \text{ m}$? Hustota kapalného vodíku je $\rho_{\text{H}_2} = 63 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a jeho kilomolová hmotnost $M_{\text{H}_2} = 2,016 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Nejdříve převedeme jednotky následujících veličin:

$$\begin{aligned}\sigma_{pp} &= 40 \text{ mb} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ b} = 40 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 = 4 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2, \\ M_{\text{H}_2} &= 2,016 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 2,016 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 2,016 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.\end{aligned}$$

- Všimněme si, že jde o úlohu ekvivalentní předchozímu příkladu č. 32. Zatímco v minulé úloze jsme znali relativní část svazku, která se absorbuje v materiálu, a hledali tomu odpovídající tloušťku tohoto materiálu, nyní známe tloušťku terče a hledáme relativní část svazku, která se v něm rozptýlí.
- Můžeme tak vyjít ze vztahu (2.45), který přepíšeme v aktuálním označení jako

$$f = 1 - e^{-\sigma_{pp} n_p d}, \quad (2.46)$$

kde

$$n_p = 2 \frac{\rho_{\text{H}_2} N_A}{M_{\text{H}_2}} \doteq 3,75 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

je objemová hustota protonů ve vodíkovém terči.

- Dosazením do vztahu (2.46) máme

$$f \doteq 0,044,$$

tj. rozptýlí se asi 4,4% protonů ve svazku.

Příklad č. 34. Bublinová komora o příčném průřezu $S = 1 \text{ m}^2$ obsahuje $m = 100 \text{ kg}$ propanu (C_3H_8). Mionová neutrina o energii 10 GeV produkovaná ve shlucích v urychlovači dopadají kolmo na příčný průřez komory, která expanduje synchronně s výletem shluku ν_μ z urychlovače. Kolik je třeba mionových neutrin v jednom shluku, aby byla pozorována jedna interakce ν_μ v bublinové komoře na 100 jejích expanzích, je-li účinný průřez interakce ν_μ s nukleonem $\sigma_{\nu N}(E = 10 \text{ GeV}) = 7 \cdot 10^{-42} \text{ m}^2$? Jaká je střední volná dráha mionových neutrin v bublinové komoře, je-li hustota propanu $\rho = 300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a jeho kilomolová hmotnost $M = 44 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$?

Řešení

- Evidentně jde opět o úlohu na aplikaci vztahu (2.21), přičemž zadaná četnost detekce neutrin je $R_\nu = \frac{1}{100} \text{ shluk}^{-1}$. Po převedení kilomolové hmotnosti propanu,

$$M = 44 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 44 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1},$$

začneme tím, že si spočítáme objemovou hustotu nukleonů v propanu. Propan, neboli (C_3H_8), se skládá z $3 \times 12 + 8 \times 1 = 44$ nukleonů. Pro zmíněnou objemovou hustotu tak máme

$$n_N = 44 \frac{\rho N_A}{M} = 1,8 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}. \quad (2.47)$$

- Jelikož známe hmotnost m a hustotu hmotnosti ρ propanu, můžeme stanovit jeho objem V . Pro tento objem pak platí, že $V = Sd$, kde d je podélný rozměr bublinové komory a S je její aktivní plocha. Z údajů ze zadání získáme, že platí

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho S} \doteq 0,33 \text{ m}.$$

- Evidentně tak platí, že $\sigma_{\nu N} n_N d \ll 1$ a tedy jsme oprávněni užít namísto vztahu (2.21) vztah (2.22). Z něj pak pro hledanou intenzitu toku neutrin platí

$$I_0 = \frac{R_\nu}{\sigma_{\nu N} n_N d} \Big|_{d = \frac{m}{\rho S}} \frac{R_\nu \rho S}{\sigma_{\nu N} n_N m} \doteq 2,4 \cdot 10^{10} \text{ shluk}^{-1}.$$

- Dosazením velikosti účinného průřezu $\sigma_{\nu N}$ interakce neutrina na nukleonu a objemové hustoty (2.47) do vztahu (2.32) dostaneme střední volnou dráhu neutrin v bublinové komoře jako

$$\ell = \frac{1}{\sigma_{\nu N} n_N} \doteq 7,9 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Příklad č. 35. Odhadněte kinetickou energii, kterou potřebuje α -částice, aby se přiblížila na hranici atomového jádra stříbra (na dosah jaderných sil). Protonové číslo α -částice je $Z_\alpha = 2$, zatímco hmotnostní a protonové číslo stříbra je $A_{\text{Ag}} = 107$ a $Z_{\text{Ag}} = 47$. Poloměr atomového jádra je $R = R_0 A^{1/3}$, kde A je hmotnostní číslo jádra atomu a $R_0 = 1,2 \text{ fm}$ je empirický parametr.

Řešení

- Aby se α -částice mohla přiblížit hranici atomového jádra stříbra, musí mít takovou kinetickou energii, která se vyrovná velikosti potenciální energie na poloměru tohoto jádra v poli elektrostatické síly, tj.

$$T_\alpha = V(R_{\text{Ag}}).$$

- Pro takovou potenciální energii platí známý vztah, který si postupně upravíme dle definice (2.9) pro konstantu jemné struktury:⁶

$$V(R_{\text{Ag}}) = \frac{Q_\alpha Q_{\text{Ag}}}{4\pi\epsilon_0 R_{\text{Ag}}} = \frac{e^2 Z_\alpha Z_{\text{Ag}}}{4\pi\epsilon_0 R_{\text{Ag}}} = \frac{\alpha\hbar c Z_\alpha Z_{\text{Ag}}}{R_{\text{Ag}}},$$

kde $Q_\alpha = eZ_\alpha$ a $Q_{\text{Ag}} = eZ_{\text{Ag}}$ jsou elektrické náboje α -částice a jádra stříbra, definované pomocí elementárního náboje e a příslušných protonových čísel.

- Užitím vztahu pro poloměr jádra ze zadání tak máme dostačující kinetickou energii α -částice určenou jako

$$T_\alpha = \frac{\alpha\hbar c Z_\alpha Z_{\text{Ag}}}{R_0 A_{\text{Ag}}^{1/3}} \doteq 23,7 \text{ MeV}.$$

Příklad č. 36. Jaký je integrální účinný průřez Rutherfordova rozptylu?

Řešení

- K určení integrálního účinného průřezu σ_{R} Rutherfordova rozptylu je třeba vyintegrovat diferenciální účinný průřez (2.8) přes všechny úhly:

$$\sigma_{\text{R}} = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) \right)_{\text{R}} d\Omega.$$

- Užitím označení (2.11), pro integrální účinný průřez tak máme

$$\sigma_{\text{R}} = \frac{K}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (2.48)$$

- K provedení naznačené integrace uvažujme sférickou soustavu souřadnic, kde pro úhlový element $d\Omega$ platí

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (2.49)$$

kde polární úhel, shodný s úhlem rozptylu, nabývá hodnot $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$, zatímco pro azimutální úhel platí $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

- Dosazením do (2.49) do (2.48) tak postupně máme

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{R}} &= \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = K \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = 2K \int_0^\pi \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin \frac{\vartheta}{2} \equiv t \\ \frac{1}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta \equiv dt \end{array} \right| = 4K \int_0^1 \frac{dt}{t^3} = -2K \left[\frac{1}{t^2} \right]_0^1, \end{aligned} \quad (2.50)$$

⁶Laskavý čtenář jistě omluví drobnou „nekonzistenci“ v označení — zatímco α značí konstantu jemné struktury, veličina Z_α udává protonové číslo α -částice. Koneckonců, dějí se i horší věci.

kde jsme nejprve provedli triviální integraci přes φ , pak využili vztahu pro sinus dvojnásobného argumentu, tj. $\sin \vartheta = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$, a následně zavedli substituci, která změnila integrační obor $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle \rightarrow t \in \langle 0, 1 \rangle$.

- Tedy, po vyčíslení posledního vztahu v předchozím výrazu zjistíme, že integrální účinný průřez Rutherfordova rozptylu je

$$\boxed{\sigma_{\text{R}} = \infty},$$

tj. nekonečný, resp. divergentní. Tento fakt svědčí o nekonečném dosahu interakce mezi dvěma elektricky nabitými objekty.

Příklad č. 37. Kolik procent nalétajících částic se pružně rozptýlí do úhlů menších než $\vartheta_x = 20^\circ$, je-li účinný průřez interakce částice s terčem dán vztahem $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{R}} = \frac{K}{2\pi} \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2} \text{ cm}^2$, kde $K = 3,2 \cdot 10^{-23}$, a plošná hustota rozptylových center v terčičku je $m = 6 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-2}$?

Řešení

- Ze zadání známe diferenciální účinný průřez (2.8) pro konkrétní hodnotu konstanty K , viz (2.11), která je určena volbou protonových čísel terčičkové částice a projektilu a jeho počáteční kinetickou energií. Dle rozměru plošné hustoty je zřejmé, že tato veličina udává počet rozptylových center daného prostředí vztážený na jednotku plochy. De facto se jedná o součin objemové hustoty těchto center a charakteristického rozměru délky tohoto prostředí — je to fragment nx z nám již známého součinu σnx .
- Hledaná frakce $f_{\langle 0, \vartheta_x \rangle}$ takových nalétajících částic, které se pružně rozptýlí do úhlů $\vartheta \in \langle 0, \vartheta_x \rangle$, je dána poměrem četnosti $R_{\langle 0, \vartheta_x \rangle}$ těchto rozptylů vůči celkové intenzitě I_0 nalétajících částic, tj.

$$f_{\langle 0, \vartheta_x \rangle} = \frac{R_{\langle 0, \vartheta_x \rangle}}{I_0}. \quad (2.51)$$

Uvědomme si také, že četnost $R_{\langle 0, \pi \rangle}$ částic rozptýlených do všech úhlů odpovídá intenzitě toku I_0 těchto částic nalétávajících na terč.

- Pokud bychom chtěli spočítat výše uvedenou četnost $R_{\langle 0, \vartheta_x \rangle}$, museli bychom znát účinný průřez $\sigma_{\langle 0, \vartheta_x \rangle}$ rozptylu částic do úhlů menších než ϑ_x . Z příkladu č. 36 však víme, že takový účinný průřez diverguje — důvodem je vyčíslení příslušné primitivní funkce k (2.8) v $\vartheta = 0^\circ$, viz (2.50). Je třeba si tak četnost $R_{\langle 0, \vartheta_x \rangle}$ vyjádřit pomocí rozdílu celkové četnosti rozptylu, tj. intenzity toku částic, a četnosti rozptylu doplňkového procesu, kdy se částice rozptylují do úhlů $\langle \vartheta_x, \pi \rangle$. Máme tak

$$R_{\langle 0, \vartheta_x \rangle} = I_0 - R_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle}. \quad (2.52)$$

- Pro četnost $R_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle}$ pak platí výraz ekvivalentní vztahu (2.19):

$$R_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle} = I_0 - I_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle} = I_0 - I_0 e^{-\sigma_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle} m} = I_0 (1 - e^{-\sigma_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle} m}). \quad (2.53)$$

- Dosazením (2.53) do (2.52) tak máme, s využitím vztahu (2.51),

$$f_{\langle 0, \vartheta_x \rangle} = e^{-\sigma_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle} m}. \quad (2.54)$$

- Zbývá tedy spočítat účinný průřez $\sigma_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle}$ pro rozptyl do úhlů větších než ϑ_x . Integrací vztahu (2.8) v uvedených mezích úhlu rozptylu ϑ ve sférických souřadnicích tak máme, s využitím vztahu (2.49) a již známého postupu z příkladu č. 36,

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle} &= \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R d\Omega = \frac{K}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\vartheta_x}^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \\ &= K \int_{\vartheta_x}^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = 2K \int_{\vartheta_x}^{\pi} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} = \left| \begin{array}{l} \sin \frac{\vartheta}{2} \equiv t \\ \frac{1}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta \equiv dt \end{array} \right| \\ &= 4K \int_{\sin \frac{\vartheta_x}{2}}^1 \frac{dt}{t^3} = -2K \left[\frac{1}{t^2} \right]_{\sin \frac{\vartheta_x}{2}}^1 = -2K \left(1 - \sin^{-2} \frac{\vartheta_x}{2} \right), \end{aligned}$$

kde jsme po substituci zaměnili integrační obor $\vartheta \in \langle \vartheta_x, \pi \rangle \rightarrow t \in \langle \sin \frac{\vartheta_x}{2}, 1 \rangle$.

- Po jednoduché úpravě a užití „goniometrické jedničky“ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pak máme

$$\sigma_{\langle \vartheta_x, \pi \rangle} = 2K \cot^2 \frac{\vartheta_x}{2} \doteq 2,1 \cdot 10^{-21} \text{ cm}^2. \quad (2.55)$$

- Dosazením číselné hodnoty (2.55) a zadané velikosti plošné hustoty m do vztahu (2.54) vyjde

$$f_{\langle 0, \vartheta_x \rangle} \doteq 0,88,$$

a tedy, že do úhlů menších než $\vartheta = 20^\circ$ se rozptýlí asi 88% všech částic.

Příklad č. 38. Při záměně zlaté fólie fólií stříbrnou o stejné tloušťce $d = 10^{-4} \mu\text{m}$ se počet zaregistrovaných pružně rozptýlených α -částic o kinetické energii T_α vylétávajících pod úhlem ϑ změnil 2,84-krát. Určete protonové číslo Z_{Ag} stříbra, je-li $Z_{\text{Au}} = 79$, $\rho_{\text{Ag}} = 10\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{\text{Au}} = 19\,320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Kilomolové hmotnosti stříbra a zlata jsou $M_{\text{Ag}} = 107,9 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ a $M_{\text{Au}} = 197,2 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Řešení

- Označme uvedený poměr počtu zaregistrovaných pružně rozptýlených částic jako P , tj. $P = 2,84$.
- Tento poměr je dán poměrem diferenciálních četností, příslušejících situacím při rozptylu α -částic na zlaté a stříbrné fólii. Diferenciální četností rozumíme takovou četnost dle vztahu (2.22), kde je však účinný průřez zaměněn za diferenciální účinný

průřez Rutherfordova rozptylu (2.8). Máme tak

$$P = \frac{\left(\frac{dR}{d\Omega}\right)_{\text{Au}}}{\left(\frac{dR}{d\Omega}\right)_{\text{Ag}}}. \quad (2.56)$$

- Uvědomme si, že v této úloze jde pouze o výměnu materiálu terčíku (se zachováním jeho tloušťky d) a nikoliv o modifikaci toku I_0 na něj dopadajících α -částic. Evidentně tak zmíněné veličiny d a I_0 zůstávají stejné pro obě diferenciální četnosti a v poměru (2.56) se vzájemně vykrátí. Po této úpravě pak platí

$$P = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{R, Au}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{R, Ag}}} \cdot \frac{n_{\text{Au}}}{n_{\text{Ag}}}, \quad (2.57)$$

kde n_{Au} a n_{Ag} jsou objemové hustoty zlata a stříbra, přičemž

$$\begin{aligned} n_{\text{Au}} &= \frac{\rho_{\text{Au}} N_A}{M_{\text{Au}}}, \\ n_{\text{Ag}} &= \frac{\rho_{\text{Ag}} N_A}{M_{\text{Ag}}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

- Nyní je možné jednoduše dosadit do výrazu (2.57) za diferenciální účinný průřez Rutherfordova rozptylu dle (2.8). Opět si však uvědomme, že se nijak nemění ani kinetická energie α -částic. Jediné, v čem se tyto diferenciální účinné průřezy liší, jsou protonová čísla zlata a stříbra. Po jednoduché úpravě proto dostaneme

$$P = \frac{Z_{\text{Au}}^2 n_{\text{Au}}}{Z_{\text{Ag}}^2 n_{\text{Ag}}},$$

přičemž po dosazení za jednotlivé objemové hustoty dle (2.58) máme

$$P = \frac{Z_{\text{Au}}^2 \rho_{\text{Au}} M_{\text{Ag}}}{Z_{\text{Ag}}^2 \rho_{\text{Ag}} M_{\text{Au}}}.$$

- Vyjádřením protonového čísla stříbra z předchozího vztahu tak konečně máme

$$\boxed{Z_{\text{Ag}} = \sqrt{\frac{Z_{\text{Au}}^2 \rho_{\text{Au}} M_{\text{Ag}}}{\rho_{\text{Ag}} M_{\text{Au}} P}} \doteq 47.}$$

- Hledané protonové číslo stříbra je tedy 47.

Příklad č. 39. Určete form faktor pro pružný rozptyl částic na jádře o celkovém náboji Ze , které je popsáno sféricky symetrickou hustotou náboje $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$. Diskutujte výsledek v limitě malých úhlů rozptylu.

Řešení

- Úkolem je spočítat form faktor dle obecného vztahu (2.12) pro sféricky symetrickou hustotu náboje. Připomeňme, že taková hustota náboje nezávisí na úhlech, ale pouze na velikosti vzdálenosti od počátku souřadnic. Dle zadání tedy platí $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$.
- Než přejdeme k výpočtu samotnému, zdefinujme si vhodný systém souřadnic, ve kterém provedeme integraci přes celý objem V , ve kterém je celkový náboj Ze uzavřen. Zvolíme si sférickou soustavu souřadnic takovou, že polární úhel mezi vektorem přeneseného impulsu \mathbf{q} a průvodičem \mathbf{r} je shodný s úhlem rozptylu ϑ , a tedy

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = qr \cos \vartheta. \quad (2.59)$$

- V takové soustavě souřadnic pak pro objemový element dV ve vztahu (2.12) platí

$$dV = r^2 dr d\Omega = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr, \quad (2.60)$$

kde jsme využili vztahu (2.49) pro úhlový element $d\Omega$ ve sférických souřadnicích. Pro uvedené proměnné pak platí, že $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $r \in \langle 0, \infty \rangle$.

- Dosazením (2.59) a (2.60) do vztahu (2.12) pak máme

$$\begin{aligned} F(q) &= \frac{1}{Ze} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(r) \exp\left(\frac{iqr \cos \vartheta}{\hbar}\right) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{Ze} \int_0^\infty \rho(r) r^2 \underbrace{\int_0^\pi \exp\left(\frac{iqr \cos \vartheta}{\hbar}\right) \sin \vartheta d\vartheta}_{\equiv I_1} dr, \end{aligned} \quad (2.61)$$

kde jsme vyintegrovali přes azimutální úhel φ a vhodně přeuspořádali některé členy dle jejich konkrétní závislosti na integrační proměnné.

- Věnujme se nyní výpočtu integrálu I_1 ze vztahu (2.61). Pro úhlednost zápisu nejdříve označme $a \equiv qr/\hbar$ a zaveďme zřejmou substituci pro vyintegrovaní přes ϑ . Platí

$$I_1 = \int_0^\pi e^{ia \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta \equiv t \\ -\sin \vartheta d\vartheta \equiv dt \end{array} \right| = - \int_1^{-1} e^{iat} dt = \int_{-1}^1 e^{iat} dt, \quad (2.62)$$

kde jsme po substituci modifikovali integrační obor $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle \rightarrow t \in \langle 1, -1 \rangle$ a v následném kroku využili záměny počátečního a koncového bodu integračního oboru na základě změny celkového znaménka.

- Pro integrál (2.62) pak máme

$$I_1 = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{ia} = \frac{2}{a} \underbrace{\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}}_{= \sin a},$$

kde jsme vzniknuvší výraz vhodně upravili, což nám v něm umožnilo identifikovat funkci sinus. Platí tedy

$$I_1 = \frac{2\hbar}{qr} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right). \quad (2.63)$$

- Dosazením (2.63) do (2.61) tak máme hledaný výraz pro form faktor pro sféricky symetrickou hustotu náboje ve tvaru⁷

$$F(q) = \frac{4\pi}{Ze} \int_0^\infty \frac{\hbar}{qr} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \rho(r) r^2 dr. \quad (2.64)$$

- Limita malých úhlů rozptylu znamená, že velikost předané hybnosti q je rovněž malá. Ve vztahu (2.64) tak můžeme využít Taylorova rozvoje integrandu v proměnné q okolo nuly. Platí

$$\frac{\hbar}{qr} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 r^2 + \mathcal{O}(q^4), \quad (2.65)$$

kde zanedbáváme členy vyšších řádů.

- Dosazením (2.65) do (2.64) tak máme

$$\begin{aligned} F(q) &= \frac{4\pi}{Ze} \int_0^\infty \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 r^2\right] \rho(r) r^2 dr \\ &= \underbrace{\frac{4\pi}{Ze} \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr}_{\equiv I_2} - \frac{q^2}{6\hbar^2} \underbrace{\frac{4\pi}{Ze} \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr}_{\equiv I_3}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

- Věnujme se nyní výpočtu integrálu I_2 . Uvědomme si, že celkový náboj Ze , uzavřený v oblasti V , je hustota náboje přintegrována přes tento objem V . Pro sféricky symetrickou hustotu náboje tak platí, dle (2.60),

$$Ze = \int \rho(r) dV = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(r) r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr, \quad (2.67)$$

odkud pak zřejmě plyne

$$I_2 = 1. \quad (2.68)$$

- Nyní spočítáme integrál I_3 . Začneme s definicí střední hodnoty $\langle r^2 \rangle$ pro sféricky symetrickou hustotu náboje $\rho(r)$, přičemž uijeme definici vyskytující se často v jaderné fyzice, která užívá normalizace na celkový náboj, a je tak odlišná od jiné varianty definice střední hodnoty určité veličiny, kterou jsme užili např. k výpočtu střední volné dráhy, viz (2.26). Pišme tak, dle (2.60) a (2.67),

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int \rho(r) r^2 dV}{\int \rho(r) dV} = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(r) r^4 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr}{Ze} = \frac{4\pi}{Ze} \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr,$$

⁷Integrand ve vztahu (2.63) by bylo možné dále upravit — vytknout faktor \hbar/q před integrál a pokrátit závislostí na r . Nečiníme tak jen z estetických důvodů.

tedy

$$I_3 = \langle r^2 \rangle. \quad (2.69)$$

- Dosazením (2.68) a (2.69) do (2.66) pak platí

$$F(q) = 1 - \frac{q^2}{6\hbar^2} \langle r^2 \rangle,$$

což je hledaný vztah pro form faktor pro sféricky symetrickou hustotu náboje v limitě malých úhlů rozptylu a vidíme, že takový form faktor závisí na tzv. středním kvadratickém poloměru $\langle r^2 \rangle$.

Příklad č. 40. Určete form faktor pro pružný rozptyl částic na jádře o celkovém náboji Ze , které je popsáno sféricky symetrickou hustotou náboje ve tvaru $\rho(\mathbf{r}) = \rho_N$ pro $r \leq R$ a $\rho(\mathbf{r}) = 0$ pro $r > R$, kde R je poloměr jádra.

Řešení

- Dříve, než přejdeme k samotnému výpočtu form faktoru, uvědomme si, že v tomto případě bude integrace přes velikost průvodiče r probíhat přes interval $\langle 0, R \rangle$, a nikoliv přes $\langle 0, \infty \rangle$, jako tomu bylo v příkladu č. 39.
- Spočtěme si nejprve celkový náboj Ze s konstantní hustotou náboje ρ_N , uzavřený v oblasti V . Podobně jako ve vztahu (2.67), platí

$$Ze = \int \rho_N dV = \rho_N \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 4\pi\rho_N \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi}{3}\rho_N R^3,$$

a tedy

$$\frac{4\pi}{Ze}\rho_N = \frac{3}{R^3}. \quad (2.70)$$

- Nyní tak přistoupíme k výpočtu příslušného form faktoru, přičemž vyjdeme ze vztahu (2.64), modifikovaného pro tento konkrétní případ. S využitím vztahu (2.70) platí

$$F(q) = \frac{3}{R^3} \int_0^R \frac{\hbar}{qr} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) r^2 dr = \left| \begin{array}{l} \frac{qr}{\hbar} \equiv t \\ \frac{q}{\hbar} dr \equiv dt \end{array} \right| = 3 \left(\frac{\hbar}{qR}\right)^3 \int_0^{\frac{qR}{\hbar}} t \sin t dt, \quad (2.71)$$

kde jsme zaměnili interační obor $r \in \langle 0, R \rangle \rightarrow t \in \langle 0, \frac{qR}{\hbar} \rangle$.

- Výpočet integrálu v (2.71) provedeme metodou per-partes, tj. dle vztahu (2.30). V této souvislosti označíme $u \equiv t$ a $v' \equiv \sin t$, a tedy $u' = 1$ a $v = -\cos t$. Platí

$$\int_0^{\frac{qR}{\hbar}} t \sin t dt = -[t \cos t]_0^{\frac{qR}{\hbar}} + \int_0^{\frac{qR}{\hbar}} \cos t dt = \sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) - \frac{qR}{\hbar} \cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right). \quad (2.72)$$

- Dosazením (2.72) do (2.71) a po drobné úpravě tak máme

$$F(q) = 3 \frac{\sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) - \frac{qR}{\hbar} \cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right)}{\left(\frac{qR}{\hbar}\right)^3}. \quad (2.73)$$

- Shodou okolností má předchozí výsledek (2.73) pro form faktor konstantní hustoty náboje tvar Besselovy funkce prvního druhu j_1 (s příslušným argumentem), takže vztah (2.73) můžeme přepsat jako

$$F(q) = j_1\left(\frac{qR}{\hbar}\right).$$

3 Kinematika

Ve třetí kapitole, odpovídající pátému a šestému cvičení, se budeme zabývat kinematikou, a to především kinematikou relativistickou. Oproti nerelativistickému newtonovskému přístupu si kinematické stavy částic zadefinujeme pomocí čtyř-hybností v Minkowskio časoprostoru, což nám umožní výpočty zjednodušit. Budeme se tak věnovat především výpočtům různých atributů částic, tj. jejich energiím či hybnostem, přičemž hlavní roli bude hrát vhodná volba vztažné soustavy, vůči které budeme naše výpočty formulovat.

3.1 Teorie

Jednotky

- V částicové fyzice se často užívá konvence, kdy se velikost rychlosti světla ve vakuu bera rovna jedničce, tj.

$$\boxed{c = 1,} \tag{3.1}$$

což má za následek to, že veškeré vztahy jsou „odcěčkované“. Chceme-li je opět „ocěčkovat“, je třeba ke každému faktoru hmotnosti přidat c^2 , tj. $m \rightarrow mc^2$, a ke každému faktoru hybnosti přidat c , tj. $p \rightarrow pc$.

- Oproti klasické fyzice se v částicové fyzice užívá namísto joulu, jakožto jednotky energie, elektronvolt. Jde o energii, kterou získá jednotkový elementární náboj urychlený ve vakuu napětím jednoho voltu. Platí, že

$$\boxed{1 \text{ eV} \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J},}$$

přičemž spíše se setkáme s násobky řádů MeV a GeV.

Rychlost, hybnost, hmotnost a energie

- Rychlost \mathbf{v} a hybnost \mathbf{p} částice jsou tří-vektory, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ a $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Zatímco v textu je značíme tučně, na tabuli a na papíře je pro pořádek píšeme se šipkou nad nimi, tj. $\mathbf{v} \equiv \vec{v}$ a $\mathbf{p} \equiv \vec{p}$. Velikosti těchto tří-vektorů pak píšeme obyčejně kurzívou, tj. $|\mathbf{v}| \equiv v$ a $|\mathbf{p}| \equiv p$.
- Podobně jako ve speciální teorii relativity, i v částicové fyzice definujeme tzv. redukovanou rychlost β , která je dána jako rychlost \mathbf{v} normovaná rychlostí světla, a tzv. Lorentzův faktor γ . Dle konvence (3.1) tak máme⁸

$$\boxed{\beta = \mathbf{v},} \tag{3.2}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},} \tag{3.3}$$

kde jsme, podobně jako výše, označili velikost $|\beta|$ redukované rychlosti jako β .

⁸Vztah (3.2) může kvůli užití konvenci (3.1) působit nejasně, resp. nadbytečně. Připomeňme proto, že mimo naši konvenci — jak již bylo explicitně zmíněno výše — je parametr β definován jako v/c .

- Parametry (3.2) a (3.3) nabývají hodnot $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\gamma \in \langle 1, \infty \rangle$.
- V částicové fyzice je třeba rozlišovat mezi klidovou hmotností m a relativistickou hmotností γm , které se liší relativistickým γ -faktorem.⁹
- Pro celkovou energii E a hybnost \mathbf{p} částice o klidové hmotnosti m , pohybující se rychlostí β , platí:

$$\boxed{E = \gamma m,} \quad (3.4)$$

$$\boxed{\mathbf{p} = \gamma m \boldsymbol{\beta},} \quad (3.5)$$

odkud tedy pro velikost rychlosti β této částice plyne

$$\boxed{\beta = \frac{p}{E}.} \quad (3.6)$$

- Souvislost mezi klidovou energií m , celkovou energií (3.4) a hybností (3.5) částice je dána tzv. relativistickým vztahem energie–hybnost, kterému se občas v literatuře říká rovněž „Pythagorova věta o energii“. Platí:

$$\boxed{E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2.} \quad (3.7)$$

- Platnost vztahu (3.7) je možné ukázat přímým výpočtem. Začneme s levou stranou (3.7), tj. spočteme kvadrát celkové energie dle (3.4) a dosadíme za Lorentzův γ -faktor užitím definičního vztahu (3.3):

$$E^2 = (\gamma m)^2 = \frac{m^2}{1 - \beta^2}. \quad (3.8)$$

- Dále, spočteme kvadrát hybnosti \mathbf{p} dle (3.5) s užitím vztahu (3.3):

$$\mathbf{p}^2 = (\gamma m \boldsymbol{\beta})^2 = \frac{m^2}{1 - \beta^2} - m^2. \quad (3.9)$$

- Skutečně, přičtením m^2 k výrazu (3.9) dostaneme rovnost s pravou stranou (3.8), čímž je platnost relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) dokázána.
- Jak již bylo řečeno, ve vztazích (3.4) a (3.7) značí E celkovou energii částice. Zřejmě tak jde o součet klidové energie m (kdy $\beta = 0$ a tedy ve vztahu (3.4) je $\gamma = 1$) a kinetické energie T částice, tj.

$$\boxed{E = m + T.} \quad (3.10)$$

- Vztah (3.10) nám de facto dává definiční vztah pro kinetickou energii T . Užitím (3.4) pak pro ni můžeme psát

$$T = m(\gamma - 1).$$

⁹Připomeňme, že v přednáškách speciální teorie relativity byla klidová hmotnost patrně značena s nulovým indexem, tj. jako m_0 . My budeme tento index úmyslně vynechávat, jelikož by nám jeho přítomnost přišla matoucí, až bude třeba v početních úlohách indexem specifikovat hmoty různých druhů částic.

- V nerelativistické limitě, kdy $\beta \ll 1$, tj. $\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4)$, platí známý vztah pro kinetickou energii (členy řádu $\mathcal{O}(\beta^4)$ již nevypisujeme)

$$T = \frac{1}{2}m\beta^2,$$

což, dosazením uvedeného rozvoje pro γ do vztahu (3.5), lze přepsat jako

$$T = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.11)$$

- Dosud jsme zmiňovali pouze částice s nenulovou hmotností — uvažujme tedy případ, kdy klidová hmotnost částice je nulová, tj. $m = 0$. Ze vztahu (3.10) plyne, že celková energie částice s nulovou klidovou hmotností je dána její kinetickou energií, která se dle (3.7) rovná velikosti hybnosti této částice. Platí tak¹⁰

$$\boxed{m = 0 : \quad E = T = p.} \quad (3.12)$$

- Energií reakce Q rozumíme rozdíl součtu klidových energií částic v počátečním stavu této reakce („in.“ jako „initial state“) a součtu klidových energií částic v koncovém stavu („fin.“ jako „final state“), tedy

$$\boxed{Q = \sum_{i \in \text{in.}} m_i - \sum_{k \in \text{fin.}} m_k.}$$

Čtyř-hybnost

- Kinematický stav částice o celkové energii E a hybnosti \mathbf{p} je popsán její čtyř-hybností P , kterou značíme velkým písmenem a na rozdíl od hybnosti ji nepíšeme tučně. První složka čtyř-hybnosti (tzv. časová složka) je rovna energii částice, zatímco tři zbývající komponenty (tzv. prostorové složky) jsou dány vektorem hybnosti této částice. Tedy,

$$\boxed{P = (E, \mathbf{p}).}$$

- Celková čtyř-hybnost fyzikálního systému je zachovávaná se veličina v dané soustavě.
- Speciální teorie relativity je formulována v Minkowského prostoročasu s metrikou $g_{\mu\nu}$, kterou budeme používat v tzv. west-coast notaci $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Kvadrát čtyř-hybnosti

$$\boxed{P^2 = P^\mu P^\nu g_{\mu\nu} = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2}$$

je tzv. invariant, a je roven kvadrátu klidové energie dané částice, přičemž v posledním kroku jsme užili vztahu (3.7). Připomeňme, že invariantem nazýváme veličinu, která má stejnou velikost ve všech vztažných soustavách.

¹⁰Mějme na paměti, že částice s nulovou klidovou hmotností $m = 0$ se pohybuje rychlostí světla. Pozorný čtenář si jistě všimne, že v tomto případě je $\beta = 1$ a tedy $\lim_{\beta \rightarrow 1} \gamma = \infty$. Výrazy (3.4) a (3.5) jsou tak formálně neurčitými výrazy typu „ $\infty \cdot 0$ “. Definovat korektně hybnost (3.5) v tomto případě by proto znamenalo uvažovat limitu $m \rightarrow 0$ za současného předpokladu, že součin γm je fixován a jeho hodnota konečná. V každém případě, tato formální manipulace by vskutku vedla ke správnému výrazu $E = p$.

Lorentzova transformace

- Uvažujme soustavu S , ve které má částice čtyř-hybnost (E, \mathbf{p}) . Dále, uvažujme soustavu S' pohybující se v kladném směru osy x soustavy S rychlostí β tak, že v čase $t = 0$ soustavy S a S' splývají. Čtyř-hybnost (E', \mathbf{p}') této částice pozorované ze soustavy S' je pak dána Lorentzovou transformací ve tvaru

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

a tedy pro komponenty čtyř-hybnosti podléhající Lorentzově transformaci platí

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \beta p_x), \\ p'_x &= \gamma(p_x - \beta E). \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Matice (3.13) a vztahy (3.14) jsou speciálním případem obecné Lorentzovy transformace. Pohybuje-li se soustava S' vůči S v libovolném směru rychlostí β , pro čtyř-hybnost zmíněné částice pozorované ze soustavy S' platí

$$E' = \gamma(E - \beta \cdot \mathbf{p}), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + (\gamma - 1) \frac{\beta \cdot \mathbf{p}}{\beta^2} \beta - \gamma E \beta. \quad (3.16)$$

3.2 Cvičení č. 5 (6. 12. 2022)

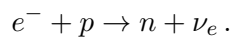
Příklad č. 41. Izotop ${}^7_4\text{Be}$ ($m_{\text{Be}}c^2 \approx 7m_Nc^2$, kde $m_Nc^2 \approx 940 \text{ MeV}$ je klidová energie nukleonu) přechází K-záchytem do základního stavu jádra ${}^7_3\text{Li}$ ($m_{\text{Li}}c^2 \approx 7m_Nc^2$). Určete velikost hybnosti a kinetickou energii odraženého jádra ${}^7_3\text{Li}$ v soustavě, kde mateřské jádro ${}^7_4\text{Be}$ je před svou přeměnou v klidu, je-li energie reakce $Q = 0,87 \text{ MeV}$. Neutrino považujte za nehmotné.

Řešení

- Dle zadání můžeme přechod izotopu berylia K-záchytem do základního stavu izotopu lithia znázornit jako proces vyvolaný interakcí elektronu z K-slupky s jádrem berylia ve tvaru



kde elektronové neutrino na pravé straně reakce je přítomno z důvodu zachování leptonového čísla. Na základě explicitně uvedených atomových a protonových čísel si všimněme, že ve skutečnosti se jedná o interakci elektronu s protonem v jádře berylia, čímž vzniká neutron a elektronové neutrino. Důsledkem toho je snížení protonového čísla o jednotku na pravé straně procesu, a tedy přeměna berylia na lithium. Tedy, proces (3.17) je tak ve skutečnosti interakcí



- Napišme tak zákon zachování energie, tj. rovnost součtu klidových a kinetických energií před a po reakci, přičemž ze zadání víme, že jádro berylia je v klidu a elektronové neutrino lze považovat za nehmotné:

$$m_e + T_e + m_{\text{Be}} = m_{\text{Li}} + T_{\text{Li}} + T_{\nu_e}. \quad (3.18)$$

- Kinetickou energii elektronu z K-slupky lze odhadnout v řádech eV, a tedy ji můžeme oproti klidové energii elektronu zanedbat. Převedení členu m_{Li} na levou stranu rovnice (3.18) pak dá, s užitím definice (3.1) energie reakce, že

$$\underbrace{m_e + m_{\text{Be}} - m_{\text{Li}}}_{= Q} = T_{\text{Li}} + T_{\nu_e}, \quad (3.19)$$

což znamená, že energie reakce (3.17) se spotřebuje na kinetické energie jádra lithia a elektronového neutrina. Vzhledem k velikosti energie reakce dle zadání tak lze jádro lithia považovat za nerelativistické, jelikož $Q \ll m_{\text{Be}}$, zatímco elektronové neutrino relativistické bude z důvodu jeho předpokládané nulové klidové energie.

- V soustavě pevně spojené s mateřským jádrem berylia vyletují jádro lithia a neutrino do opačných směrů, přičemž pro jejich vektory hybností platí $\mathbf{p}_{\text{Li}} + \mathbf{p}_{\nu_e} = \mathbf{0}$, a tedy velikosti jejich hybností jsou stejné, $p_{\text{Li}} = p_{\nu_e} \equiv p$.
- Přepišme tak vztah (3.19) po dosazení explicitních výrazů pro nerelativistickou kinetickou energii T_{Li} dle (3.11) a relativistickou kinetickou energii T_{ν_e} dle (3.12):

$$Q = \frac{p_{\text{Li}}^2}{2m_{\text{Li}}} + p_{\nu_e},$$

což po přeznačení stejné velikosti jednotlivých hybností dle odstavce výše, a vhodné algebraické úpravě, vede na kvadratickou rovnici

$$p^2 + 2m_{\text{Li}}p - 2m_{\text{Li}}Q = 0. \quad (3.20)$$

- Řešením kvadratické rovnice (3.20) jsou dva kořeny, přičemž jeden z nich vede na zápornou velikost hybnosti, a není tak fyzikální. Relevantní řešení je tedy, po drobné úpravě,

$$p = m_{\text{Li}} \left(\sqrt{1 + \frac{2Q}{m_{\text{Li}}}} - 1 \right), \quad (3.21)$$

kde jsme výraz po drobných úpravách přepsali do vhodnějšího tvaru z důvodu malé velikosti zlomku pod odmocninou, přičemž jeho hodnota je $x \equiv \frac{2Q}{m_{\text{Li}}} \doteq 2,6 \cdot 10^{-4}$.

- Nyní využijeme Taylorova rozvoje

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

pro $|x| \ll 1$, což ve vztahu (3.21) dává

$$p = m_{\text{Li}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2Q}{m_{\text{Li}}} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{2Q}{m_{\text{Li}}} \right)^2 + \dots - 1 \right], \quad (3.22)$$

přičemž po drobné úpravě obdržíme velikost hybnosti jádra lithia ${}^7_3\text{Li}$ (a tedy i velikost hybnosti elektronového neutrina) jako

$$p \doteq Q - \frac{Q^2}{2m_{\text{Li}}} \doteq 0,87 \text{ MeV}, \quad (3.23)$$

kde výsledná numerická hodnota se příliš neliší od Q , a proto uvádíme přibližnou hodnotu dle zadání, ačkoliv je samozřejmě zmenšena o velikost členu úměrného Q^2 .

- Kinetickou energii jádra lithia obdržíme ze vztahu (3.19), což po jednotlivých úpravách dává

$$T_{\text{Li}} = Q - T_{\nu_e} = Q - p_{\nu_e} = Q - p. \quad (3.24)$$

- Vidíme tak, že právě přítomnost členu úměrného Q^2 ve vztahu (3.23) je zcela zásadní, jelikož pokud bychom jej v Taylorově rozvoji ve vztahu (3.22) zanedbali, kinetická energie lithia by vyšla dle (3.24) nulová navzdory nenulové velikosti jeho hybnosti. Dosazením dle (3.23) tak máme hledanou kinetickou energii jádra lithia ${}^7_3\text{Li}$ jako

$$T_{\text{Li}} \doteq \frac{Q^2}{2m_{\text{Li}}} \doteq 57,5 \text{ eV}.$$

Poznámka č. 11.

- Uvědomme si, že alternativně lze k výsledku (3.23) dojít také ze vztahu (3.19), aniž by bylo třeba řešit kvadratickou rovnici (3.20). Stačí vyjádřit kinetickou energii lithia ze vztahu (3.10) a následně užít (3.7). Užitím výše uvedeného označení velikostí jednotlivých hybností $p_{\text{Li}} = p_{\nu_e} \equiv p$ máme

$$Q = T_{\text{Li}} + T_{\nu_e} = E_{\text{Li}} - m_{\text{Li}} + T_{\nu_e} = \sqrt{m_{\text{Li}}^2 + p^2} - m_{\text{Li}} + p,$$

odkud pak jednoduše plyne

$$(Q + m_{\text{Li}} - p)^2 = p^2 + m_{\text{Li}}^2. \quad (3.25)$$

- Členy p^2 se ve vztahu (3.25) vykrátí a jako řešení dostaneme

$$p = \frac{Q(Q + 2m_{\text{Li}})}{2(Q + m_{\text{Li}})}.$$

- Vzhledem k poměrné velikosti Q vůči m_{Li} je vhodné předchozí výraz zapsat jako

$$p = Q \frac{1 + \frac{Q}{2m_{\text{Li}}}}{1 + \frac{Q}{m_{\text{Li}}}}$$

a dle výše užitého označení $x \equiv \frac{2Q}{m_{\text{Li}}} \ll 1$ jej přepsat jako

$$p = \frac{Q(4+x)}{2(2+x)} = Q - \frac{Qx}{4} + \mathcal{O}(x^2),$$

což po dosazení za x vskutku reprodukuje výsledek (3.23).

Příklad č. 42. Uvažujme částice a, b, c o klidových energiích $m_a c^2, m_b c^2, m_c c^2$.

- Částice a v klidu se rozpadá na dvě relativistické částice b a c . Určete energie a velikosti hybností vyletujících částic. Diskutujte případ jedné nehmotné vyletující částice a případ, kdy obě vyletující částice jsou totožné.
- Částice a v klidu se rozpadá na dvě relativistické částice b a c . Jaká je jejich relativní rychlost?
- Částice a o celkové energii E_a'' se rozpadá za letu na dvě částice b a c . Jaké jsou maximální energie vyletujících částic b a c v soustavě, kde rozpad pozorujeme?

Řešení

- V soustavě pevně spojené s rozpadající se částicí a , která je v této soustavě v klidu, označme čtyř-hybnosti jednotlivých částic jako $P_a = (m_a, \mathbf{0})$, $P_b = (E_b, \mathbf{p}_b)$ a $P_c = (E_c, \mathbf{p}_c)$, kde E_b, E_c a $\mathbf{p}_b, \mathbf{p}_c$ jsou celkové energie a hybnosti částic b a c , pro které platí, že

$$E_b + E_c = m_a, \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{p}_b + \mathbf{p}_c = \mathbf{0}, \quad (3.26b)$$

přičemž vztah (3.26a) dává podmínku

$$m_a \geq m_b + m_c,$$

zatímco vztah (3.26b) říká, že velikosti hybností p_b, p_c částic b, c jsou stejné, tj.

$$p_b = p_c. \quad (3.27)$$

- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$(P_a - P_b)^2 = P_c^2,$$

přičemž

$$(P_a - P_b)^2 = (m_a - E_b)^2 - \mathbf{p}_b^2 = m_a^2 - 2m_a E_b + E_b^2 - \mathbf{p}_b^2 = m_a^2 - 2m_a E_b + m_b^2 \quad (3.28)$$

a

$$P_c^2 = E_c^2 - \mathbf{p}_c^2 = m_c^2. \quad (3.29)$$

- Porovnáním (3.28) s (3.29) tak pro celkovou energii částice b dostaneme vztah

$$\boxed{E_b = \frac{m_a^2 + m_b^2 - m_c^2}{2m_a}}, \quad (3.30)$$

přičemž ze vztahu (3.26a) plyne pro celkovou energii částice c vztah

$$\boxed{E_c = \frac{m_a^2 + m_c^2 - m_b^2}{2m_a}}. \quad (3.31)$$

- K určení velikosti hybností p_b a p_c částic b a c vyjdeme z relativistického vztahu (3.7) a znalosti faktu (3.27), díky němuž stačí určit velikost hybnosti jen jedné částice. Máme tak

$$\begin{aligned} p_b^2 &= E_b^2 - m_b^2 = \left(\frac{m_a^2 + m_b^2 - m_c^2}{2m_a} \right)^2 - m_b^2 \\ &= \frac{m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 - 2m_a^2 m_b^2 - 2m_a^2 m_c^2 - 2m_b^2 m_c^2}{4m_a^2} = \frac{\lambda_K(m_a^2, m_b^2, m_c^2)}{4m_a^2}, \end{aligned}$$

kde jsme využili stručného zápisu pomocí tzv. Källénovy funkce¹¹

$$\lambda_K(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz,$$

přičemž pro další účely je vhodné si spočítat

$$\lambda_K(x, y, 0) = (x - y)^2, \quad (3.32a)$$

$$\lambda_K(x, y, y) = x^2 - 4xy. \quad (3.32b)$$

- Pro velikosti hybností částic b a c tak platí

$$p_b = p_c = \frac{\sqrt{\lambda_K(m_a^2, m_b^2, m_c^2)}}{2m_a}. \quad (3.33)$$

- Pro rychlosti částic b a c pak dle (3.30)-(3.31) a (3.33) platí

$$\beta_b = \frac{p_b}{E_b} = \frac{\sqrt{\lambda_K(m_a^2, m_b^2, m_c^2)}}{m_a^2 + m_b^2 - m_c^2}, \quad (3.34)$$

$$\beta_c = \frac{p_c}{E_c} = \frac{\sqrt{\lambda_K(m_a^2, m_b^2, m_c^2)}}{m_a^2 + m_c^2 - m_b^2}. \quad (3.35)$$

- Pro případ jedné nehmotné částice zvolme, bez újmy na obecnosti, $m_c = 0$. Vztahy (3.30)-(3.31) a (3.33)-(3.35), s užitím (3.32a), dávají

$$E_b = \frac{m_a^2 + m_b^2}{2m_a}, \quad (3.36)$$

$$E_c = \frac{m_a^2 - m_b^2}{2m_a}, \quad (3.37)$$

$$p_b = p_c = \frac{\sqrt{\lambda_K(m_a^2, m_b^2, 0)}}{2m_a} = \frac{m_a^2 - m_b^2}{2m_a}, \quad (3.38)$$

$$\beta_b = \frac{\sqrt{\lambda_K(m_a^2, m_b^2, 0)}}{m_a^2 + m_b^2} = \frac{m_a^2 - m_b^2}{m_a^2 + m_b^2}, \quad (3.39)$$

$$\beta_c = \frac{\sqrt{\lambda_K(m_a^2, m_b^2, 0)}}{m_a^2 - m_b^2} = 1. \quad (3.40)$$

¹¹Jelikož Källén byl Švéd, správná výslovnost jeho jména může být pro čtenáře nejasná. Uvedme proto, že slabika „käll“ se ve švédštině čte jako v češtině slabika „še“. Dále, všimněme si, že kniha [1] používá méně častou konvenci pro Källénovu funkci.

- Pro případ totožných částic označme $m \equiv m_b = m_c$. Vztahy (3.30)-(3.31) a (3.33)-(3.35), s užitím (3.32b), dávají

$$\begin{aligned}
 E_b = E_c &= \frac{m_a}{2}, \\
 p_b = p_c &= \frac{\sqrt{\lambda_K(m_a^2, m^2, m^2)}}{2m_a} = \frac{\sqrt{m_a^4 - 4m_a^2 m^2}}{2m_a} = \sqrt{\left(\frac{m_a}{2}\right)^2 - m^2}, \\
 \beta_b = \beta_c &= \frac{\sqrt{\lambda_K(m_a^2, m^2, m^2)}}{m_a^2} = \frac{\sqrt{m_a^4 - 4m_a^2 m^2}}{m_a^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2m}{m_a}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

- b) – Vzhledem k netriviálnímu skládání relativistických rychlostí není možné postupovat tak, jak jsme zvyklí z nerelativistické newtonovské fyziky. K určení relativní rychlosti částic b a c je proto nutné zvolit soustavu pevně spojenou s jednou z těchto částic a do této soustavy lorentzovsky transformovat energii a hybnost druhé částice. Rychlost určená z těchto transformovaných veličin dle vztahu (3.6) je pak hledanou relativní rychlostí těchto částic.
- V soustavě pevně spojené s rozpadající se částicí a vyletují částice b a c do vzájemně opačných směrů, viz část a) tohoto příkladu. Označme tuto soustavu pro další účely jako S_a . Uvažujeme-li soustavu S'_b pevně spojenou s částicí b , tato soustava se pohybuje rychlostí β_b vůči soustavě S_a . Celková energie E'_c a hybnost \mathbf{p}'_c částice c v soustavě S'_b jsou pak dány, dle vztahů (3.15)-(3.16), lorentzovským boostem s vektorem rychlosti β_b . Máme tak

$$E'_c = \gamma_b(E_c - \beta_b \cdot \mathbf{p}_c), \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{p}'_c = \mathbf{p}_c + (\gamma_b - 1) \frac{\beta_b \cdot \mathbf{p}_c}{\beta_b^2} \beta_b - \gamma_b E_c \beta_b, \quad (3.41b)$$

kde veličiny na pravé straně uvedených rovnic odpovídají soustavě S_a , přičemž $\beta_b = \frac{p_b}{E_b}$ a $\gamma_b = \frac{E_b}{m_b}$ jsou relativistické faktory částice b a celkové energie E_b , E_c a velikosti hybností p_b , p_c jsou dány vztahy (3.30)-(3.31) a (3.33).

- Spočtíme si nejdříve skalární součin $\beta_b \cdot \mathbf{p}_c$. Jelikož vektory β_b a \mathbf{p}_b míří do stejných směrů, zatímco vektory \mathbf{p}_b a \mathbf{p}_c míří v soustavě S_a do směrů vzájemně opačných (a kosinus úhlu mezi nimi je tak -1), platí

$$\beta_b \cdot \mathbf{p}_c = -\beta_b p_c = -\frac{p_b^2}{E_b}, \quad (3.42)$$

kde jsme následně dosadili za vektor rychlosti dle (3.6) a využili toho, že velikosti hybností částic b a c jsou v soustavě S_a stejné.

- Dosadíme-li z konvenčních důvodů do vztahu (3.41a) předposlední tvar výsledku skalárního součinu, máme celkovou energii částice c v soustavě S'_b danou vztahem

$$E'_c = \gamma_b(E_c + \beta_b p_c). \quad (3.43)$$

- Do vztahu (3.41b) dosadíme poslední tvar výsledku skalárního součinu (3.42) a upravíme užitím vztahu (3.6). Konkrétně, pro člen se skalárním součinem platí

$$\frac{\beta_b \cdot \mathbf{p}_c}{\beta_b^2} \beta_b = -\mathbf{p}_b = \mathbf{p}_c. \quad (3.44)$$

- Jelikož koeficient členu (3.44) je $(\gamma_b - 1)$, dojde k eliminaci obou samostatně stojících vektorů \mathbf{p}_c na pravé straně takto upravené rovnice (3.41b), přičemž výsledkem těchto manipulací je hledaný vektor hybnosti \mathbf{p}'_c částice c v soustavě S'_b ve tvaru

$$\mathbf{p}'_c = \gamma_b(\mathbf{p}_c - E_c \beta_b). \quad (3.45)$$

- Pro velikost vektoru (3.45) platí

$$p'_c = \sqrt{\mathbf{p}'_c \cdot \mathbf{p}'_c} = \gamma_b \sqrt{p_c^2 - 2E_c(\mathbf{p}_c \cdot \beta_b) + E_c^2 \beta_b^2},$$

přičemž, dle předposlední rovnosti ve vztahu (3.42), po drobné úpravě máme

$$p'_c = \gamma_b(p_c + \beta_b E_c). \quad (3.46)$$

- Velikost relativní rychlosti β_r částic b a c je tak dána velikostí rychlosti β'_c částice c v soustavě pevně spojené s částicí b . Neboli, dle vztahů (3.43) a (3.46) platí

$$\beta_r = \beta'_c = \frac{p'_c}{E'_c} = \frac{p_c + \beta_b E_c}{E_c + \beta_b p_c}.$$

- c) – Z části a) tohoto příkladu víme, že v soustavě S_a , tj. v soustavě pevně spojené s částicí a , tato částice stojí a celkové energie částic b a c jsou dány vztahy (3.30) a (3.31). V laboratorní soustavě, kde rozpad pozorujeme, částice a letí a její celková energie je dle zadání E''_a . Označme tuto soustavu S''_a . Pro určení celkových energií částic b a c v soustavě S''_a je tak třeba provést Lorentzovu transformaci příslušných celkových energií (3.30) a (3.31) ze soustavy S_a do S''_a . S ohledem na zákon zachování energie však stačí transformovat, bez újmy na obecnosti, pouze např. celkovou energii částice b .
- Uvědomme si, že soustava S_a se vůči soustavě S''_a pohybuje rychlostí β''_a . Jelikož však provádíme Lorentzovu transformaci z S_a do S''_a , jedná se o boost s vektorem rychlosti $-\beta''_a$. Dosazením do vztahu (3.15) tak pro celkovou energii částice b v soustavě S''_a máme

$$E''_b = \gamma''_a(E_b + \beta''_a \cdot \mathbf{p}_b), \quad (3.47)$$

kde $\beta''_a = \frac{p''_a}{E''_a}$ a $\gamma''_a = \frac{E''_a}{m_a}$ jsou relativistické faktory částice a v soustavě S''_a , přičemž velikost hybnosti p''_a částice a v této soustavě známe, de facto, ze zadání, jelikož $p''_a = \sqrt{E''_a{}^2 - m_a^2}$.

- Výpočet skalárního součinu ve vztahu (3.47) je snadný, přičemž úhel, který tyto vektory svírají, je úhel výletu částice b v soustavě pevně spojené s částicí a . Označme jej jako ϑ_b a vzniknuvší výraz upravme užitím vztahů (3.4) a (3.6):

$$\begin{aligned} E_b'' &= \gamma_a''(E_b + \beta_a'' p_b \cos \vartheta_b) = \gamma_a'' E_b \left(1 + \beta_a'' \frac{p_b}{E_b} \cos \vartheta_b\right) \\ &= \gamma_a'' E_b (1 + \beta_a'' \beta_b \cos \vartheta_b) = \frac{E_a''}{m_a} E_b \left(1 + \frac{p_a''}{E_a''} \beta_b \cos \vartheta_b\right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

tj. pro celkovou energii částice b v soustavě S_a'' platí

$$E_b'' = \frac{E_b}{m_a} (E_a'' + p_a'' \beta_b \cos \vartheta_b). \quad (3.49)$$

- V laboratorní soustavě, tj. v soustavě S_a'' , bude mít vylétající částice b celkovou energii největší, pokud je $\cos \vartheta_b = 1$, tj. pokud vylétá ve směru letu rozpadající se částice a . Celková energie částice c pak bude minimální. Platí

$$\begin{aligned} E_b''^{(\max)} &= \frac{E_b}{m_a} (E_a'' + \beta_b p_a''), \\ E_c''^{(\min)} &= E_a'' - E_b''^{(\max)}. \end{aligned}$$

- Naopak, v laboratorní soustavě bude mít vylétající částice b celkovou energii nejmenší, pokud je $\cos \vartheta_b = -1$, tj. pokud vylétá proti směru letu rozpadající se částice a . Celková energie částice c pak bude maximální. Platí

$$\begin{aligned} E_b''^{(\min)} &= \frac{E_b}{m_a} (E_a'' - \beta_b p_a''), \\ E_c''^{(\max)} &= E_a'' - E_b''^{(\min)}. \end{aligned}$$

Poznámka č. 12.

- K docenění formalismu čtyř-hybnosti je čtenáři doporučeno spočítat část a) příkladu č. 42 nikoliv pomocí zákona zachování čtyř-hybnosti, ale pomocí současného užití zákona zachování energie a zákona zachování hybnosti.

Příklad č. 43. Pion π^- o celkové energii $E_\pi'' = 1$ GeV se rozpadá za letu na mion, který se pohybuje ve směru letu pionu, a mionové antineutrino. Jaká je celková energie a rychlost vylétujícího mionu v soustavě, kde rozpad pozorujeme? Určete střední dolet mionu po rozpadu, je-li vlastní střední doba života mionu $\tau_{\mu,0} = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Klidové energie částic jsou $m_\pi c^2 = 139,6$ MeV, $m_\mu c^2 = 105,6$ MeV. Mionové antineutrino považujte za nehmotné.

Řešení

- Zřejmě se jedná o aplikaci výsledků z příkladu č. 42, čemuž proto přizpůsobíme značení jednotlivých veličin.¹²
- Zapišme rozpad pionu ze zadání jako $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, přičemž mion se v laboratorní soustavě, kde tento rozpad pozorujeme, pohybuje ve směru letu pionu. Dále, označme celkovou energii mionu v soustavě pevně spojené s rozpadajícím se pionem jako E_μ , přičemž velikost rychlosti mionu v této soustavě je β_μ . Jelikož mionové antineutrino považujeme za nehmotné, ze vztahů (3.36) a (3.39) platí

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}, \quad (3.50)$$

$$\beta_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}.$$

- Jelikož se mion v soustavě, kde tento rozpad pozorujeme, pohybuje ve směru letu pionu, dle vztahu (3.48), resp. (3.49) pak pro jeho celkovou energii E_μ'' a velikost hybnosti p_μ'' v této soustavě platí

$$E_\mu'' = \gamma_\pi''(E_\mu \pm \beta_\pi'' p_\mu) = \frac{E_\pi''}{m_\pi} \left(E_\mu \pm \frac{p_\pi''}{E_\pi''} \beta_\mu E_\mu \right) = \frac{E_\mu}{m_\pi} (E_\pi'' \pm p_\pi'' \beta_\mu), \quad (3.51)$$

$$p_\mu'' = \sqrt{E_\mu''^2 - m_\mu^2}, \quad (3.52)$$

kde jsme využili definice (3.6) a kde „+“ odpovídá situaci, kdy je celková energie a velikost hybnosti mionu maximální a ten tak letí v opačném směru než mionové antineutrino (celková energie antineutrina je pak minimální), zatímco „-“ odpovídá případu, kdy celková energie a velikost hybnosti mionu je minimální a mion i mionové antineutrino letí stejným směrem (celková energie antineutrina je pak maximální).

- Dosazením vztahů (3.50) do (3.51), a vztahu (3.51) do (3.52), tak máme

$$E_\mu'' = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi^2} \left(E_\pi'' \pm \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} p_\pi'' \right) = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)E_\pi'' \pm (m_\pi^2 - m_\mu^2)p_\pi''}{2m_\pi^2},$$

přičemž příslušné celkové energie neutrina lze dopočítat jako $E_\nu'' = E_\pi'' - E_\mu''$.

- Dosazením numerických hodnot ze zadání v případě „+“ dostaneme

$$E_\mu''^{(\max)} \doteq 998 \text{ MeV}, \quad (3.53)$$

$$p_\mu''^{(\max)} \doteq 992 \text{ MeV}, \quad (3.54)$$

zatímco v případě „-“ platí

$$E_\mu''^{(\min)} \doteq 575 \text{ MeV}, \quad (3.55)$$

$$p_\mu''^{(\min)} \doteq 565 \text{ MeV}. \quad (3.56)$$

¹²V souvislosti s notací v příkladu č. 42 bychom mohli pion a mion označit jako $a \equiv \pi$ a $b \equiv \mu$. Proto rovněž, na první pohled patrně „zbytečně“, značíme celkovou energii pionu v zadání se dvěma apostrofy.

- Pro velikosti rychlosti mionu tak máme

$$\beta_{\mu}^{(\max)} = \frac{p_{\mu}^{(\max)}}{E_{\mu}^{(\max)}} \doteq 0,994,$$

$$\beta_{\mu}^{(\min)} = \frac{p_{\mu}^{(\min)}}{E_{\mu}^{(\min)}} \doteq 0,983,$$

resp. po dosazení rychlosti světla ve vakuu c dle (3.2), tj. $v_{\mu}'' = \beta_{\mu}''c$, vyjde

$$v_{\mu}^{(\max)} = \beta_{\mu}^{(\max)}c \doteq 2,98 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_{\mu}^{(\min)} = \beta_{\mu}^{(\min)}c \doteq 2,95 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Dráhu, kterou mion urazí, je možné určit jako

$$L_{\mu}'' = v_{\mu}''\tau_{\mu} = v_{\mu}''\gamma_{\mu}''\tau_{\mu,0} = v_{\mu}''\frac{E_{\mu}''}{m_{\mu}c^2}\tau_{\mu,0} = \frac{p_{\mu}''\tau_{\mu,0}}{m_{\mu}}, \quad (3.57)$$

kde jsme využili vztahů (3.4)-(3.5), přičemž $E_{\mu}''\beta_{\mu}'' = p_{\mu}''c$.

- Dosazením (3.54) a (3.56) do (3.57) dostaneme dráhu, kterou mion s maximální resp. minimální energií urazí, jako

$$\boxed{\begin{aligned} L_{\mu}^{(\max)} &\doteq 6,18 \cdot 10^3 \text{ m}, \\ L_{\mu}^{(\min)} &\doteq 3,58 \cdot 10^3 \text{ m}. \end{aligned}}$$

Příklad č. 44. Mezon π^{-} o kinetické energii $T_{\pi} = 5,47 \text{ MeV}$ se rozpadá za letu na mion a mionové antineutrino. Jak závisí energie vyletujícího antineutrina na jeho úhlu výletu vzhledem ke směru letu rozpadajícího se pionu? Jaká je maximální energie vyletujícího mionu a maximální energie vyletujícího antineutrina? Klidové energie pionu a mionu jsou popořadě $m_{\pi}c^2 = 139,6 \text{ MeV}$ a $m_{\mu}c^2 = 105,6 \text{ MeV}$. Mionové antineutrino považujte za nehmotné.

Řešení

- V laboratorní soustavě, kde rozpad $\pi^{-} \rightarrow \mu^{-} + \bar{\nu}_{\mu}$ pozorujeme, zapišme čtyř-hybnosti pionu P_{π} , mionu P_{μ} a mionového antineutrina $P_{\bar{\nu}}$ popořadě jako $P_{\pi} = (E_{\pi}, \mathbf{p}_{\pi})$, $P_{\mu} = (E_{\mu}, \mathbf{p}_{\mu})$ a $P_{\bar{\nu}} = (E_{\bar{\nu}}, \mathbf{p}_{\bar{\nu}})$.
- Jelikož potřebujeme získat informaci ohledně úhlu $\vartheta_{(\pi, \bar{\nu})}$ mezi vektory hybností pionu \mathbf{p}_{π} a antineutrina $\mathbf{p}_{\bar{\nu}}$, rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$(P_{\pi} - P_{\bar{\nu}})^2 = P_{\mu}^2. \quad (3.58)$$

- Na pravé straně rovnice (3.58) máme, z relativistického vztahu energie–hybnost (3.7),

$$P_{\mu}^2 = m_{\mu}^2. \quad (3.59)$$

- Na levé straně rovnice (3.58) pak postupně máme

$$\begin{aligned}
(P_\pi - P_{\bar{\nu}})^2 &= (E_\pi - E_{\bar{\nu}})^2 - (\mathbf{p}_\pi - \mathbf{p}_{\bar{\nu}})^2 \\
&= (E_\pi^2 - 2E_\pi E_{\bar{\nu}} + E_{\bar{\nu}}^2) - (p_\pi^2 - 2\mathbf{p}_\pi \cdot \mathbf{p}_{\bar{\nu}} + p_{\bar{\nu}}^2) \\
&= (E_\pi^2 - p_\pi^2) + (E_{\bar{\nu}}^2 - p_{\bar{\nu}}^2) - 2E_\pi E_{\bar{\nu}} + 2\mathbf{p}_\pi \cdot \mathbf{p}_{\bar{\nu}},
\end{aligned}$$

přičemž opakovaným užitím relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
(P_\pi - P_{\bar{\nu}})^2 &= m_\pi^2 - 2E_\pi E_{\bar{\nu}} + 2p_\pi p_{\bar{\nu}} \cos \vartheta_{(\pi, \bar{\nu})} \\
&= m_\pi^2 - 2E_\pi E_{\bar{\nu}} + 2E_{\bar{\nu}} p_\pi \cos \vartheta_{(\pi, \bar{\nu})} \\
&= m_\pi^2 - 2E_{\bar{\nu}}(E_\pi - p_\pi \cos \vartheta_{(\pi, \bar{\nu})}). \tag{3.60}
\end{aligned}$$

- Porovnáním (3.59) a (3.60) tak pro energii $E_{\bar{\nu}}$ mionového antineutrína, v závislosti na jeho úhlu výletu $\vartheta_{(\pi, \bar{\nu})}$ vzhledem ke směru letu rozpadajícího se pionu, máme

$$\boxed{E_{\bar{\nu}} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(E_\pi - p_\pi \cos \vartheta_{(\pi, \bar{\nu})})}.} \tag{3.61}$$

- Jelikož dle zadání známe klidovou m_π a kinetickou T_π energii pionu, připomeňme, že pro celkovou energii pionu E_π platí $E_\pi = m_\pi + T_\pi$, tj. $E_\pi = 145,1$ MeV, přičemž dle (3.7) pak pro velikost hybnosti pionu platí $p_\pi = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \doteq 39,5$ MeV.
- Energie vylétujícího mionu je maximální, pokud je energie antineutrína minimální. To nastane, když je jmenovatel ve vztahu (3.61) maximální, tj. když je $\cos \vartheta_{(\pi, \bar{\nu})} = -1$. Pak, po jednoduchých algebraických úpravách, platí

$$\boxed{
\begin{aligned}
E_{\bar{\nu}}^{(\min)} &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(E_\pi + p_\pi)} \doteq 22,6 \text{ MeV}, \\
E_\mu^{(\max)} &= E_\pi - E_{\bar{\nu}}^{(\min)} = \frac{E_\pi + p_\pi}{2} + \frac{m_\mu^2}{2(E_\pi + p_\pi)} \doteq 122,5 \text{ MeV}.
\end{aligned}
}$$

Jde o kinematickou konfiguraci, kdy antineutrino letí proti směru původního letu pionu, zatímco mion letí ve směru původního letu pionu.

- Energie vylétujícího antineutrína je maximální, když je jmenovatel (3.61) minimální, tj. když je $\cos \vartheta_{(\pi, \bar{\nu})} = 1$. Pak

$$\boxed{
\begin{aligned}
E_{\bar{\nu}}^{(\max)} &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(E_\pi - p_\pi)} \doteq 39,5 \text{ MeV}, \\
E_\mu^{(\min)} &= E_\pi - E_{\bar{\nu}}^{(\max)} = \frac{E_\pi - p_\pi}{2} + \frac{m_\mu^2}{2(E_\pi - p_\pi)} \doteq 105,6 \text{ MeV}.
\end{aligned}
}$$

Jde o kinematickou konfiguraci, kdy antineutrino letí ve směru původního letu pionu, zatímco mion v laboratorní soustavě stojí.

Příklad č. 45. Uvažujme částice a, b, c, d o klidových energiích $m_a c^2, m_b c^2, m_c c^2, m_d c^2$.

- a) Dokažte, že pro dvě libovolně se pohybující částice a a b , jejichž kinematický stav je zadán čtyř-hybnostmi P_a a P_b , platí nerovnost $(P_a + P_b)^2 \geq (m_a c^2 + m_b c^2)^2$. Kdy nastane rovnost?
- b) Částice a v klidu se rozpadá na tři částice b, c, d . Jaká je maximální celková a kinetická energie vyletující částice b ?

Řešení

- a) – Začněme nejprve s levou stranou nerovnosti ze zadání. Kvadrát čtyř-hybnosti objektu skládajícího se z částic a a b bude roven kvadrátu invariantní hmoty M představující klidovou energii s tohoto objektu, tj. $(P_a + P_b)^2 = M^2 = s$.
- Do této klidové energie, kromě klidových energií m_a a m_b jednotlivých částic (přičemž $m_a, m_b \geq 0$), ovšem přispívá také celková kinetická energie T' těchto částic v těžiškové soustavě, tj. $s = (T' + m_a + m_b)^2$.
- Klidová energie objektu skládajícího se z částic a a b tak zřejmě bude větší nebo rovna součtu klidových energií jednotlivých částic, tj. zcela jistě platí

$$s = M^2 = (P_a + P_b)^2 \geq (m_a + m_b)^2. \quad (3.62)$$

- Rovnost ve vztahu (3.62) nastává pro $m_a, m_b > 0$ nebo $m_a, m_b = 0$ v případě, kdy je kinetická energie obou částic v těžiškové soustavě nulová, tj. $T' = 0$, a obě částice letí společně, tj. $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_b$.
- b) – Zapišme čtyř-hybnosti jednotlivých objektů studovaného tří-částicového rozpadu $a \rightarrow b + c + d$ v soustavě pevně spojené s rozpadající se částicí a jako $P_a = (m_a, \mathbf{0})$ a $P_b = (E_b, \mathbf{p}_b)$, kde E_b a \mathbf{p}_b je celková energie a hybnost částice b v této soustavě, přičemž pro částice c a d postačí zápis jejich čtyř-hybností stručně jako P_c a P_d .
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností pak můžeme zapsat ve tvaru

$$(P_a - P_b)^2 = (P_c + P_d)^2,$$

přičemž úprava levé strany,

$$(P_a - P_b)^2 = (m_a - E_b)^2 - \mathbf{p}_b^2 = m_a^2 - 2m_a E_b + E_b^2 - \mathbf{p}_b^2 = m_a^2 - 2m_a E_b + m_b^2,$$

a užití nerovnosti (3.62) na straně pravé,

$$(P_c + P_d)^2 \geq (m_c + m_d)^2,$$

dává

$$m_a^2 - 2m_a E_b + m_b^2 \geq (m_c + m_d)^2. \quad (3.63)$$

- Rovnost se ve vztahu (3.63) realizuje v případě, kdy částice b vylétá v právě opačném směru než dvojice částic c a d , a to z toho důvodu, aby byla, dle úkolu a) výše, splněna podmínka $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_d$ jejich společného pohybu, a aby byla zachována celková hybnost systému.

- V takovém případě je pak velikost hybnosti p_b částice b , která je rovna součtu velikostí hybností p_c a p_d částic c a d , největší, a tedy i celková energie E_b částice b je tak maximální. Ze vztahu (3.63) pro tuto maximální celkovou energii $E_b^{(\max)}$ platí

$$E_b^{(\max)} = \frac{m_a^2 + m_b^2 - (m_c + m_d)^2}{2m_a}, \quad (3.64)$$

resp. pro maximální kinetickou energii $T_b^{(\max)}$ částice b pak je, po drobných úpravách,

$$T_b^{(\max)} = E_b^{(\max)} - m_b = \frac{(m_a - m_b)^2 - (m_c + m_d)^2}{2m_a}. \quad (3.65)$$

Příklad č. 46. Jaká je maximální celková a kinetická energie a rychlost protonu při β -rozpadu neutronu v klidu?

Řešení

- Maximální celkovou $E_p^{(\max)}$ a kinetickou $T_p^{(\max)}$ energii protonu při β -rozpadu $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ neutronu v klidu zjistíme jednoduše ze vztahů (3.64) a (3.65), přičemž pro úplnost uvedeme vhodné přeznačení klidových energií jednotlivých částic i s numerickými hodnotami: $m_a \equiv m_n = 939,6 \text{ MeV}$, $m_b \equiv m_p = 938,3 \text{ MeV}$, $m_c \equiv m_e = 0,511 \text{ MeV}$, přičemž elektronové neutrino považujeme za nehmotné, tj. $m_d \equiv m_{\bar{\nu}} = 0$. Dosazením těchto hodnot do uvedených vztahů tak dostaneme

$$E_p^{(\max)} = \frac{m_n^2 + m_p^2 - m_e^2}{2m_n} \doteq 938,3 \text{ MeV}, \quad (3.66)$$

$$T_p^{(\max)} = E_p^{(\max)} - m_p = \frac{(m_n - m_p)^2 - m_e^2}{2m_n} \doteq 0,76 \text{ keV}, \quad (3.67)$$

odkud vidíme, že $E_p^{(\max)} \doteq m_p$, a že vyletující proton je tedy nerelativistický, tj. pro jeho maximální kinetickou energii zřejmě platí, že $T_p^{(\max)} \ll m_p$.

- Maximální rychlost $\beta_p^{(\max)}$ protonu tak spočítáme jako poměr velikosti jeho maximální hybnosti a maximální celkové energie (3.67), tj.

$$\begin{aligned} \beta_p^{(\max)} &= \frac{p_p^{(\max)}}{E_p^{(\max)}} = \frac{\sqrt{(E_p^{(\max)})^2 - m_p^2}}{T_p^{(\max)} + m_p} = \frac{\sqrt{(T_p^{(\max)} + m_p)^2 - m_p^2}}{T_p^{(\max)} + m_p} \\ &= \frac{\sqrt{T_p^{(\max)} (T_p^{(\max)} + 2m_p)}}{T_p^{(\max)} + m_p} = \frac{\sqrt{m_p T_p^{(\max)} \left(\frac{T_p^{(\max)}}{m_p} + 2 \right)}}{m_p \left(\frac{T_p^{(\max)}}{m_p} + 1 \right)}, \end{aligned}$$

což s uvážením toho, že vyletující proton je nerelativistický, dává po jednoduché úpravě

$$\beta_p^{(\max)} \Big|_{m_p \gg T_p^{(\max)}} \doteq \sqrt{\frac{2T_p^{(\max)}}{m_p}}, \quad (3.68)$$

čemuž odpovídá maximální rychlost

$$\beta_p^{(\max)} \doteq 1,27 \cdot 10^{-3},$$

resp.

$$v_p^{(\max)} = \beta_p^{(\max)} c \doteq 382 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Všimněme si, že rozepsáním celkové energie na energii klidovou a kinetickou jsme vztahem (3.68) de facto zreprodukovali nerelativistický vztah pro kinetickou energii.

Příklad č. 47. Jaký je vztah mezi celkovou energií částice a její rapiditou, je-li zadána transverzální energie částice, definovaná vztahem $m_{\perp} c^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (p_{\perp} c)^2}$, kde mc^2 je klidová energie částice a p_{\perp} je její transverzální hybnost? Nalezněte vztah pro rapiditu částice v limitě vysokých energií, tj. když $E \gg mc^2$.

Řešení

- Vyjdeme z definice rapidity

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_{\parallel}}{E - p_{\parallel}} \right), \quad (3.69)$$

kde E je celková energie částice a p_{\parallel} je složka její hybnosti, rovnoběžná s osou svazku.

- Dále využijeme tzv. proměnných na světelném kuželi (z angl. „light-cone variables“) definovaných ve tvaru

$$p_{\pm} = E \pm p_{\parallel}, \quad (3.70)$$

v jejichž notaci pak upravíme vztah (3.69) jako

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_+}{p_-} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_+^2}{p_+ p_-} \right), \quad (3.71)$$

kde

$$\begin{aligned} p_+ p_- &= (E + p_{\parallel})(E - p_{\parallel}) = E^2 - p_{\parallel}^2 = m^2 + p^2 - p_{\parallel}^2 \\ &= m^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 - p_{\parallel}^2 = m^2 + p_{\perp}^2 = m_{\perp}^2, \end{aligned} \quad (3.72)$$

kde jsme ve třetím kroku využili relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) a následně zřejmého faktu, že $p^2 = p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2$.

- Dosazením (3.72) do (3.71) tak máme

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_+^2}{p_+ p_-} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_+^2}{m_\perp^2} \right) = \ln \left(\frac{p_+}{m_\perp} \right) = \ln \left(\frac{m_\perp}{p_-} \right) = -\ln \left(\frac{p_-}{m_\perp} \right),$$

odkud lze vyjádřit proměnné p_\pm jako

$$p_\pm = m_\perp e^{\pm y}.$$

- Pomocí vztahu (3.70) pak lze psát

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{p_+ + p_-}{2} = m_\perp \frac{e^y + e^{-y}}{2} = m_\perp \cosh y, \\ p_\parallel &= \frac{p_+ - p_-}{2} = m_\perp \frac{e^y - e^{-y}}{2} = m_\perp \sinh y, \end{aligned}}$$

kde jsme v posledních krocích využili známé definice hyperbolického sinu a kosinu.

- V limitě vysokých energií $E \gg m$ platí, dle relativistického vztahu energie–hybnost (3.7), že $E \doteq p$, takže po dosazení do vztahu (3.69) máme

$$\eta \equiv \lim_{E \gg m} y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p + p_\parallel}{p - p_\parallel} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{p_\parallel}{p}}{1 - \frac{p_\parallel}{p}} \right) = \ln \sqrt{\frac{1 + \frac{p_\parallel}{p}}{1 - \frac{p_\parallel}{p}}},$$

kde jsme rapiditu v této limitě označili jako η , přičemž takové veličině se pak říká pseudorapidita.

- Jelikož je p_\parallel složka rovnoběžná s osou svazku, tj. s vektorem hybnosti \mathbf{p} částice, je poměr $\frac{p_\parallel}{p}$ roven kosinu úhlu ϑ výletu emitované částice vzhledem ke směru letu svazku, resp.

$$\eta = \ln \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta}} = \ln \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}} = \ln \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}, \quad (3.73)$$

kde jsme ve druhém kroku využili známého vztahu pro kosinus dvojnásobku úhlu, $\cos \vartheta = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ a následně „goniometrickou jedničku“, tj. $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$.

- Jednoduchou úpravou (3.73) v podobě odmocnění pak máme hledaný vztah pro (pseudo)rapiditu ve tvaru

$$\boxed{\eta = \ln \left(\cot \frac{\vartheta}{2} \right)}.$$

Příklad č. 48. Kvantum γ o energii $E_{\gamma,0}$ se rozptyluje na elektronu v klidu pod úhlem ϑ . Určete závislost kinetické energie a velikosti hybnosti vyletujícího kvanta γ a odraženého elektronu na úhlu rozptylu kvanta γ . Diskutujte extrémální případy.

Řešení

- Procesem ze zadání je tzv. Comptonův rozptyl $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$. Zapišme čtyř-hybnosti jednotlivých částic v soustavě pevně spojené s terčíkovým elektronem, který je v takové soustavě samozřejmě v klidu, jako $P_{\gamma,0} = (E_{\gamma,0}, \mathbf{p}_{\gamma,0})$, $P_{e,0} = (m_e, \mathbf{0})$ a dále jako $P_\gamma = (E_\gamma, \mathbf{p}_\gamma)$ a $P_e = (E_e, \mathbf{p}_e)$, kde indexem „0“ jsme označili částice v počátečním stavu.
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$(P_{\gamma,0} + P_{e,0} - P_\gamma)^2 = P_e^2. \quad (3.74)$$

- Pravá strana rovnice (3.74) je dána jednoduše jako

$$P_e^2 = E_e^2 - \mathbf{p}_e^2 = m_e^2, \quad (3.75)$$

zatímco levá strana je o poznání komplikovanější:

$$\begin{aligned} (P_{\gamma,0} + P_{e,0} - P_\gamma)^2 &= (E_{\gamma,0} + m_e - E_\gamma)^2 - (\mathbf{p}_{\gamma,0} - \mathbf{p}_\gamma)^2 \\ &= (E_{\gamma,0}^2 - \mathbf{p}_{\gamma,0}^2) + 2E_{\gamma,0} m_e + m_e^2 - 2(E_{\gamma,0} + m_e)E_\gamma \\ &\quad + (E_\gamma^2 - \mathbf{p}_\gamma^2) + 2\mathbf{p}_{\gamma,0} \cdot \mathbf{p}_\gamma \\ &= 2E_{\gamma,0} m_e + m_e^2 - 2(E_{\gamma,0} + m_e)E_\gamma + 2p_{\gamma,0} p_\gamma \cos \vartheta \\ &= 2m_e(E_{\gamma,0} - E_\gamma) + m_e^2 - 2E_{\gamma,0} E_\gamma(1 - \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (3.76)$$

kde jsme opakovaně užili relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) a kde jsme využili faktu, že úhel mezi směry letu původního a rozptýleného γ -kvanta je ϑ .

- Porovnáním (3.75) a (3.76) se de facto na obou stranách rovnice (3.74) odečtou členy m_e^2 , přičemž po drobné úpravě dostaneme

$$m_e(E_{\gamma,0} - E_\gamma) - E_{\gamma,0} E_\gamma(1 - \cos \vartheta) = 0,$$

odkud je pak možné jednoduše vyjádřit celkovou energii E_γ rozptýleného fotonu, která je samozřejmě také zároveň jeho kinetickou energií, jako

$$E_\gamma = \frac{E_{\gamma,0}}{1 + \frac{E_{\gamma,0}}{m_e}(1 - \cos \vartheta)} = \frac{E_{\gamma,0}}{1 + \frac{2E_{\gamma,0}}{m_e} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}, \quad (3.77)$$

kde jsme ve druhém kroku využili známého vztahu pro kosinus dvojnásobku úhlu, $\cos \vartheta = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ a následně „goniometrickou jedničku“, tj. $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$.

- Zákon zachování energie říká, že

$$E_{\gamma,0} + m_e = E_\gamma + E_e,$$

kde pro celkovou energii E_e rozptýleného elektronu platí, že je součtem jeho klidové m_e a kinetické T_e energie. Platí tak

$$T_e = E_{\gamma,0} - E_\gamma,$$

přičemž po jednoduchých úpravách vyjde

$$T_e = \frac{\frac{E_{\gamma,0}^2}{m_e}(1 - \cos \vartheta)}{1 + \frac{E_{\gamma,0}}{m_e}(1 - \cos \vartheta)} = \frac{\frac{2E_{\gamma,0}^2}{m_e} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + \frac{2E_{\gamma,0}}{m_e} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.78)$$

- Pro velikost hybnosti p_e elektronu platí, dle relativistického vztahu energie–hybnost (3.7), že

$$p_e^2 = E_e^2 - m_e^2 = (T_e + m_e)^2 - m_e^2 = T_e(T_e + 2m_e),$$

přičemž po dosažení za kinetickou energii T_e elektronu dle vztahu (3.78) nám, po jednoduchých algebraických úpravách, vyjde, že

$$p_e = \frac{2E_{\gamma,0} \sin \frac{\vartheta}{2}}{1 + \frac{2E_{\gamma,0}}{m_e} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \sqrt{1 + \frac{E_{\gamma,0}}{m_e} \left(2 + \frac{E_{\gamma,0}}{m_e}\right) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.79)$$

- Extrémní případy spočívají v následujících situacích, které snadno získáme ze vztahů (3.77), (3.78) a (3.79) pro limitní případy energie dopadajícího γ -kvanta:

$$\begin{aligned} \lim_{E_{\gamma,0} \rightarrow 0} \frac{E_\gamma}{E_{\gamma,0}} &= 1, \\ \lim_{E_{\gamma,0} \rightarrow \infty} \frac{E_\gamma}{E_{\gamma,0}} &= 0, \\ \lim_{E_{\gamma,0} \rightarrow 0} \frac{T_e}{E_{\gamma,0}} &= 0, \\ \lim_{E_{\gamma,0} \rightarrow \infty} \frac{T_e}{E_{\gamma,0}} &= 1, \\ \lim_{E_{\gamma,0} \rightarrow 0} \frac{p_e}{E_{\gamma,0}} &= 2 \sin \frac{\vartheta}{2}, \\ \lim_{E_{\gamma,0} \rightarrow \infty} \frac{p_e}{E_{\gamma,0}} &= 1. \end{aligned}$$

Příklad č. 49. Výpočtem dokažte, zdalipak může

- a) volný elektron absorbovat nebo vyzářit γ -kvantum?
- b) volné γ -kvantum vytvořit elektron-pozitronový pár?
- c) elektron-pozitronový pár anihilovat za vzniku jednoho γ -kvanta?

Řešení

- a) – Uvažujme klidovou soustavu elektronu, který dle zadání absorbuje nebo vyzáří γ -kvantum, přičemž tomuto elektronu příslušné veličiny budeme pro lepší odlišení značit indexem „0“. Zapišme čtyř-hybnosti jednotlivých částic v této soustavě jako $P_{e,0} = (m_e, \mathbf{0})$, $P_\gamma = (E_\gamma, \mathbf{p}_\gamma)$ a $P_e = (E_e, \mathbf{p}_e)$.
 - První případ absorbování γ -kvanta lze schematicky zapsat jako $\gamma + e \rightarrow e$, přičemž rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností

$$(P_\gamma + P_{e,0})^2 = P_e^2$$

dává, s užitím relativistického vztahu (3.7) pro nehmotná γ -kvanta,

$$(P_\gamma + P_{e,0})^2 = (E_\gamma + m_e)^2 - \mathbf{p}_\gamma^2 = E_\gamma^2 + 2E_\gamma m_e + m_e^2 - \mathbf{p}_\gamma^2 = 2E_\gamma m_e + m_e^2 \quad (3.80)$$

a

$$P_e^2 = E_e^2 - \mathbf{p}_e^2 = m_e^2, \quad (3.81)$$

přičemž porovnání (3.80) a (3.81) vede k závěru, že celková energie γ -kvanta je v dané soustavě nulová, tj. $E_\gamma = 0$, což není fyzikální řešení, jelikož takové γ -kvantum de facto neexistuje — přesněji řečeno, neexistuje klidová soustava, kde by byla celková energie nehmotné částice nulová.

- Druhý případ vyzarování γ -kvanta lze schematicky zapsat jako $e \rightarrow e + \gamma$, přičemž rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností

$$(P_{e,0} - P_\gamma)^2 = P_e^2$$

dává, opět na základě užití relativistického vztahu (3.7) pro nehmotná γ -kvanta,

$$(P_{e,0} - P_\gamma)^2 = (m_e - E_\gamma)^2 - \mathbf{p}_\gamma^2 = m_e^2 - 2E_\gamma m_e + E_\gamma^2 - \mathbf{p}_\gamma^2 = m_e^2 - 2E_\gamma m_e \quad (3.82)$$

a, podobně jako v případě (3.81) výše,

$$P_e^2 = E_e^2 - \mathbf{p}_e^2 = m_e^2, \quad (3.83)$$

přičemž porovnání (3.82) a (3.83) opět vede k závěru, že celková energie γ -kvanta je v dané soustavě nulová, $E_\gamma = 0$, a tudíž ani tato situace nemůže nastat.

- b) – Schematicky můžeme tvorbu elektron-pozitronového páru γ -kvantem znázornit jako $\gamma \rightarrow e^- + e^+$. Uvažujme těžišтовую soustavu elektron-pozitronového páru, přičemž v této soustavě jsou velikosti hybností elektronu i pozitronu stejné, přičemž vektory těchto hybností se liší znaménkem, a tak zde mají rovněž stejné celkové energie, jelikož jejich klidové energie jsou samozřejmě identické. Na základě těchto faktů zapišme čtyř-hybnosti jednotlivých částic jako $P'_\gamma = (E'_\gamma, \mathbf{p}'_\gamma)$, $P_{e^-} = (E'_e, \mathbf{p}'_e)$ a $P_{e^+} = (E'_e, -\mathbf{p}'_e)$.
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností

$$P'^2_\gamma = (P_{e^-} + P_{e^+})^2$$

dává postupně, s užitím relativistického vztahu (3.7) pro nehmotná γ -kvanta,

$$P'^2_\gamma = E'^2_\gamma - \mathbf{p}'^2_\gamma = 0 \quad (3.84)$$

a

$$(P_{e^-} + P_{e^+})^2 = (2E'_e)^2 = 4E'^2_e, \quad (3.85)$$

což, po porovnání (3.84) s (3.85), nás vede k závěru, že celková energie E'_e elektronu i pozitronu by měla být v těžištové soustavě elektron-pozitronového páru nulová, $E'_e = 0$, což není možné.

- c) – Zapišme schematicky anihilaci elektron-pozitronového páru za vzniku jednoho γ -kvanta jako $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$. V soustavě, kde je elektron v klidu, zapišme čtyř-hybnosti jednotlivých částic jako $P_{e^-} = (m_e, \mathbf{0})$, $P_{e^+} = (E_e, \mathbf{p}_e)$ a $P_\gamma = (E_\gamma, \mathbf{p}_\gamma)$.
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností

$$(P_{e^-} + P_{e^+})^2 = P^2_\gamma$$

pak postupně dává, s užitím relativistického vztahu (3.7),

$$(P_{e^-} + P_{e^+})^2 = (m_e + E_e)^2 - \mathbf{p}_e^2 = m_e^2 + 2E_e m_e + E_e^2 - \mathbf{p}_e^2 = 2m_e(m_e + E_e) \quad (3.86)$$

a

$$P^2_\gamma = 0, \quad (3.87)$$

přičemž porovnání (3.86) a (3.87) vede k tomu, že celková energie E_e pozitronu je v dané soustavě záporná, tj. $E_e = -m_e$, což je samozřejmě nefyzikální řešení.

Poznámka č. 13.

- Vzhledem k ekvivalenci kinematických uspořádání některých dvojic výše uvedených procesů je možné si uvědomit, že neexistence procesu $\gamma + e \rightarrow e$ implikuje neexistenci procesu $e \rightarrow e + \gamma$ (a naopak). Podobně pak neexistence procesu $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ znamená, že nemůže probíhat ani proces $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$ (a naopak).

Příklad č. 50. Určete počáteční energie protonů v případě prahového procesu produkce antiprotonu: $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Uvažujte dvě možné kinematické konfigurace na základě reálných experimentálních uspořádání:

- a) vstřícné svazky,
- b) fixed-target.

Řešení

- Prahový proces produkce částic je takový proces, kdy v počátečním stavu vstupují do reakce částice s jistou, tzv. prahovou, energií postačující ke vzniku částic v koncovém stavu, přičemž celková kinetická energie vzniknuvších částic v jejich těžištové soustavě je nulová. Jinými slovy, jde o takový proces, do kterého je v jeho počátku dodána přesně taková energie, aby částice ve finálním stavu mohly vůbec vzniknout.
- Zapišme tak celkovou čtyř-hybnost P' koncového stavu prahového procesu ze zadání. Jelikož klidové energie protonu a antiprotonu jsou stejné, v těžištové soustavě vzniknuvších částic tak platí $P' = (4m_p, \mathbf{0})$, a tedy

$$P'^2 = 16m_p^2.$$

- a) – Vstřícné svazky jsou taková kinematická konfigurace, kdy na kruhových urychlovačích jsou proti sobě urychlovány svazky stejných částic o stejné celkové energii a tedy i o stejné velikosti hybností, přičemž v laboratorní soustavě je tak součet vektorů jejich hybností nulový.
 - V tomto případě jsou proti sobě urychlovány dva protony o stejné energii, které do prahového procesu přispívají celkovou energií E_t , kde dolní index „t“ symbolizuje „threshold“, neboli „práh“. V laboratorní soustavě je tak celková čtyř-hybnost proti sobě letících protonů v počátečním stavu dána jako $P_a = (E_t, \mathbf{0})$, a tedy

$$P_a^2 = E_t^2.$$

- Z rovnosti kvadrátů celkových čtyř-hybností počátečního a koncového stavu tak pro hledanou prahovou energii E_t v případě konfigurace vstřícných svazků platí, že

$$\boxed{E_t = 4m_p}, \quad (3.88)$$

což znamená, že každý z protonů se na prahové energii (3.88) podílí částí $2m_p$, a tedy, že každý z protonů musí nést prahovou kinetickou energii $T_t = m_p$.

- b) – Kinematická konfigurace typu „fixed-target“ je využívána na lineárních urychlovačích, kdy jedna částice je urychlována proti terčíkové částici, která je v klidu.
 - Celková čtyř-hybnost počátečního stavu v této konfiguraci je tak dána jako $P_b = (E_t + m_p, \mathbf{p}_t)$, kde časová složka této čtyř-hybnosti se skládá z celkové prahové

energie E_t urychlovaného protonu, s prahovou hybností \mathbf{p}_t , a klidové energie terčíkového protonu v klidu. Platí tak

$$P_b^2 = (E_t + m_p)^2 - \mathbf{p}_t^2 = E_t^2 + 2E_t m_p + m_p^2 - \mathbf{p}_t^2 = 2m_p(E_t + m_p),$$

kde jsme v posledním kroku využili relativistický vztah energie–hybnost (3.7).

- Z rovnosti kvadrátů celkových čtyř-hybností počátečního a koncového stavu tak pro hledanou prahovou energii E_t v případě konfigurace fixed-target platí, že

$$\boxed{E_t = 7m_p}, \quad (3.89)$$

a tedy urychlovaný proton musí nést prahovou kinetickou energii $T_t = 6m_p$.

- Závěrem uvedme, že porovnáním vztahů (3.88) a (3.89) vidíme, že konfigurace vstříčných svazků je energeticky výhodnější, jelikož s nižší prahovou energií je možné vyprodukovat stejný koncový stav jako v případě konfigurace fixed-target.

3.3 Cvičení č. 6 (13./20. 12. 2022)

Příklad č. 51. Dvě částice a a b , o klidových energiích $m_a c^2$ a $m_b c^2$ a rychlostech β_a a β_b , se pohybují proti sobě. Najděte jejich relativní rychlost.

Řešení

- Předpokládejme, že částice a letí v kladném smyslu x -ové osy soustavy pozorovatele rychlostí o velikosti β_a . Dále, uvažujme soustavu pevně spojenou s částicí b a předpokládejme, že letí rychlostí o velikosti β_b v záporném smyslu x -ové osy soustavy pozorovatele.
- Velikost relativní rychlosti β_r těchto částic pak bude dána velikostí rychlosti β'_a částice a v soustavě pevně spojené s částicí b , přičemž v této soustavě se částice a pohybuje v kladném smyslu x' -ové osy.
- Naším úkolem je tedy, pomocí Lorentzovy transformace, vyjádřit celkovou energii E'_a a velikost hybnosti p'_a částice a v soustavě pevně spojené s částicí b pomocí celkové energie E_a a velikosti hybnosti p_a částice a v soustavě pozorovatele, kde platí

$$E_a = \gamma_a m_a, \quad (3.90a)$$

$$p_a = \beta_a \gamma_a m_a, \quad (3.90b)$$

přičemž velikost hybnosti (3.90b) je chápána, dle zadání, jako velikost x -ové složky této hybnosti, přičemž ostatní složky jsou nulové.

- Dle Lorentzovy transformace pak platí

$$\begin{aligned} E'_a &= \gamma_b (E_a + \beta_b p_a) = \gamma_b (\gamma_a m_a + \beta_a \beta_b \gamma_a m_a) = \gamma_a \gamma_b m_a (1 + \beta_a \beta_b), \\ p'_a &= \gamma_b (p_a + \beta_b E_a) = \gamma_b (\beta_a \gamma_a m_a + \beta_b \gamma_a m_a) = \gamma_a \gamma_b m_a (\beta_a + \beta_b). \end{aligned} \quad (3.91)$$

- Pro velikost relativní rychlosti β_r částic a a b , resp. pro velikost rychlosti β'_a částice a v soustavě pevně spojené s částicí b , pak dle (3.6) a (3.91) platí

$$\beta_r = \beta'_a = \frac{p'_a}{E'_a} = \frac{\beta_a + \beta_b}{1 + \beta_a \beta_b}.$$

Příklad č. 52 Dvě částice a a b , o klidových energiích $m_a c^2$ a $m_b c^2$ a velikostech hybnosti p_a a p_b , letí ve stejném směru. Jaká je rychlost těžiškové soustavy obou částic?

Řešení

- Předpokládejme, že v soustavě, kde částice a a b pozorujeme, letí obě ve směru kladné x -ové osy, přičemž jejich celkové energie a velikosti hybností jsou E_a, E_b a p_a, p_b . V těžiškové soustavě těchto částic pak pro jejich hybnosti platí, že $\mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b = \mathbf{0}$, resp. pro x -ové složky obou hybností máme

$$p'_a + p'_b = 0. \quad (3.92)$$

- Dle Lorentzovy transformace pak pro velikosti hybností obou částic v těžiškové soustavě platí

$$\begin{aligned} p'_a &= \gamma(p_a - \beta E_a), \\ p'_b &= \gamma(p_b - \beta E_b), \end{aligned} \quad (3.93)$$

kde β je velikost rychlosti těžiškové soustavy obou částic v soustavě, kde částice pozorujeme.

- Dosadíme-li vztahy (3.93) do (3.92), pro hledanou rychlost β plyne

$$\beta = \frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}.$$

Příklad č. 53. Dvě částice a a b , o klidových energiích $m_a c^2$ a $m_b c^2$, se pohybují společně se stejnou rychlostí. V jakém poměru je rozdělena celková energie a hybnost tohoto systému na jednotlivé částice?

Řešení

- Označme celkové energie a velikosti hybností částic a a b jako E_a, p_a a E_b, p_b . Označme dále společnou rychlost těchto částic jako $\beta_a = \beta_b \equiv \beta$. Dle vztahů (3.4)-(3.5) tak pro tyto veličiny platí $E_a = \gamma m_a$, $p_a = \beta \gamma m_a$ a $E_b = \gamma m_b$, $p_b = \beta \gamma m_b$.

- Pro poměr q_E celkových energií a poměr q_p velikostí hybností tohoto systému platí

$$q_E = \frac{E_a}{E_b} = \frac{m_a}{m_b}$$

a

$$q_p = \frac{p_a}{p_b} = \frac{m_a}{m_b}.$$

- Energie a hybnost tohoto systému je tak mezi částice a a b rozdělena v poměru klidových energií těchto částic.

Příklad č. 54. Elektron o klidové energii $m_e c^2$ se sráží s kvantem γ . Energie γ -kvanta v těžiškové soustavě elektronu a γ -kvanta je E'_γ . Jaká je rychlost těžiškové soustavy v soustavě, kde terčíkový elektron před srážkou stojí?

Řešení

- Pro hybnost částice z těžiškové soustavy, pohybující se rychlostí β vzhledem k soustavě pevně spojené s terčíkovým elektronem, platí

$$0 = p_e = \gamma(-p'_e + \beta E'_e),$$

přičemž předpokládáme, že γ -kvantum letí v kladném směru x -ové osy těžiškové soustavy, zatímco elektron letí v záporném směru.

- Velikost rychlosti β těžiškové soustavy elektronu a γ -kvanta je dána velikostí rychlosti β'_e elektronu v těžiškové soustavě, proto platí

$$\beta = \beta'_e = \frac{p'_e}{E'_e} = \frac{p'_e}{\sqrt{p'^2_e + m_e^2}}.$$

- Jelikož však v těžiškové soustavě elektronu a γ -kvanta platí, že velikosti hybností elektronu a γ -kvanta jsou stejné,

$$E'_\gamma = p'_\gamma = p'_e, \quad (3.94)$$

přičemž v první rovnosti jsme využili relativistického vztahu (3.7) pro nehmotná neutrina, můžeme psát

$$\beta = \frac{E'_\gamma}{\sqrt{E'^2_\gamma + m_e^2}}. \quad (3.95)$$

Poznámka č. 14.

- Ačkoliv jde o typickou úlohu na Lorentzovu transformaci, lze ji řešit i bez jejího použití. Stačí si uvědomit, že v těžiškové soustavě elektronu a γ -kvanta jsou velikosti hybností elektronu p'_e a γ -kvanta p'_γ stejné, jak jsme již zmínili v souvislosti se vztahem (3.94).

- Jelikož velikost rychlosti β těžiškové soustavy elektronu a γ -kvanta je dána velikostí rychlosti β'_e elektronu v těžiškové soustavě, je vhodné přepsat velikost jeho hybnosti p'_e v těžiškové soustavě právě pomocí velikosti jeho rychlosti. To je možné užitím vztahu (3.5), tj.

$$p'_e = \gamma'_e m_e \beta'_e. \quad (3.96)$$

- Dosazením (3.94) do (3.96) pak dostaneme, užitím vztahu (3.3) pro Lorentzův relativistický faktor, že

$$E'_\gamma = \frac{m_e \beta'_e}{\sqrt{1 - \beta'^2_e}}. \quad (3.97)$$

- Nyní už stačí vztah (3.97) vhodně upravit tak, aby bylo možné vyjádřit rychlost β'_e pomocí E'_γ . Umocníme-li obě strany rovnice (3.97) na druhou, máme po jednoduchých algebraických úpravách hledanou velikost rychlosti β těžiškové soustavy ve tvaru

$$\beta = \beta'_e = \frac{E'_\gamma}{\sqrt{E'^2_\gamma + m_e^2}},$$

což je v souladu se vztahem (3.95).

Příklad č. 55. Dvě relativistické částice a a b , o klidových energiích $m_a c^2$ a $m_b c^2$, se pohybují tak, že jejich celková kinetická energie v těžiškové soustavě je T' . Jaký je vztah mezi kinetickou energií T_a nalétající částice a v soustavě, kde terčíková částice b je v klidu, a celkovou kinetickou energií částic a a b v těžiškové soustavě?

Řešení

- Čtyř-hybnost P systému částic a a b v laboratorní soustavě, kde je terčíková částice b v klidu, je $P = (E_a + m_b, \mathbf{p}_a)$, kde $E_a = m_a + T_a$ je celková energie částice a a T_a je její kinetická energie v této soustavě.
- Čtyř-hybnost P' systému částic a a b v těžiškové soustavě je $P' = (T' + m_a + m_b, \mathbf{0})$, kde T' je celková kinetická energie těchto částic v těžiškové soustavě.
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$P^2 = P'^2,$$

kde pro jednotlivé kvadráty platí

$$\begin{aligned} P^2 &= (E_a + m_b)^2 - \mathbf{p}_a^2 = E_a^2 + 2E_a m_b + m_b^2 - \mathbf{p}_a^2 = m_a^2 + 2E_a m_b + m_b^2 \\ &= m_a^2 + 2(m_a + T_a)m_b + m_b^2 = (m_a + m_b)^2 + 2T_a m_b \end{aligned} \quad (3.98)$$

a

$$P'^2 = (T' + m_a + m_b)^2 = T'^2 + 2T'(m_a + m_b) + (m_a + m_b)^2, \quad (3.99)$$

přičemž ve vztahu (3.98) jsme ve třetím kroku využili relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) pro částici a .

- Porovnáním vztahů (3.98) a (3.99) pak lze jednoduše nalézt vztah mezi kinetickými energiemi T_a a T' ve tvaru

$$T_a = \frac{T' [T' + 2(m_a + m_b)]}{2m_b}.$$

Příklad č. 56. Částice a o celkové energii E_a a klidové energii $m_a c^2$ nalétá na částici b v klidu o klidové energii $m_b c^2$. Jaké jsou energie částic v těžiškové soustavě? Řešte relativisticky.

Řešení

- V laboratorní soustavě je terčíková částice b v klidu. Čtyř-hybnosti P_a a P_b částic a a b v této soustavě tak запиšme jako $P_a = (E_a, \mathbf{p}_a)$ a $P_b = (m_b, \mathbf{0})$, kde E_a je celková energie částice a , s hybností \mathbf{p}_a , v laboratorní soustavě.
- Zapišme dále čtyř-hybnosti P'_a a P'_b částic a a b v těžiškové soustavě jako $P'_a = (E'_a, \mathbf{p}')$ a $P'_b = (E'_b, -\mathbf{p}')$, kde E'_a a E'_b jsou celkové energie jednotlivých částic v této soustavě, a kde jsme využili faktu, že v těžiškové soustavě jsou velikosti hybností p_a a p_b částic a a b stejné, $p \equiv p_a = p_b$, avšak vektory těchto hybností se liší znaménkem.
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$(P_a + P_b)^2 = (P'_a + P'_b)^2, \quad (3.100)$$

kde

$$\begin{aligned} (P_a + P_b)^2 &= (E_a + m_b, \mathbf{p}_a)^2 = (E_a + m_b)^2 - \mathbf{p}_a^2 \\ &= E_a^2 + 2E_a m_b + m_b^2 - \mathbf{p}_a^2 = m_a^2 + 2E_a m_b + m_b^2, \end{aligned}$$

přičemž pro pravou stranu rovnosti (3.100) tak platí

$$(P'_a + P'_b)^2 = \underbrace{(E'_a + E'_b)^2}_{\equiv s} = m_a^2 + 2E_a m_b + m_b^2,$$

kde jsme označili $\sqrt{s} = E'_a + E'_b$ jako celkovou energii částic a a b v těžiškové soustavě.

- Dle výše uvedeného faktu, že v těžiškové soustavě je $p'_a = p'_b$, resp. $p_a'^2 = p_b'^2$, pak dle relativistického vztahu energie-hybnost (3.7) platí $E_a'^2 - m_a^2 = E_b'^2 - m_b^2$, odkud pak postupně plyne

$$m_a^2 - m_b^2 = E_a'^2 - E_b'^2 = (E'_a - E'_b)(E'_a + E'_b) = (E'_a - E'_b)\sqrt{s}. \quad (3.101)$$

- Ze vztahu (3.101) pak, užitím definičního vztahu pro \sqrt{s} , plyne

$$E'_a = \frac{m_a^2 - m_b^2}{\sqrt{s}} + E'_b = \frac{m_a^2 - m_b^2}{\sqrt{s}} + \sqrt{s} - E'_a,$$

a tedy

$$E'_a = \frac{m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s}}{2},$$

resp.

$$E'_b = \sqrt{s} - E'_a = \sqrt{s} - \frac{m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{2},$$

tj.

$$E'_b = \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}}.$$

Příklad č. 57. Relativistická částice a o kinetické energii T_a a klidové energii mc^2 nalétá na částici b téže klidové energie v klidu. Nalezněte jejich kinetickou energii v těžišťové soustavě, hybnost každé částice v těžišťové soustavě a rychlost těžišťové soustavy obou částic v soustavě, kde je částice b v klidu.

Řešení

- V laboratorní soustavě pevně spojené s terčíkovou částicí b je celková energie částice a dána jako $E_a = T_a + m$. Neboli, celková energie E systému těchto částic v této soustavě je pak dána jako součet E_a a klidové energie m částice b , tedy

$$E = E_a + m = T_a + 2m. \quad (3.102)$$

- V těžišťové soustavě je celková energie E' systému těchto částic dána součtem celkových energií E'_a a E'_b jednotlivých částic v této soustavě, přičemž $E'_a = T'_a + m_a$ a $E'_b = T'_b + m_b$, kde T'_a a T'_b jsou kinetické energie těchto částic v této soustavě. V těžišťové soustavě jsou však velikosti hybností těchto částic stejné, přičemž z důvodu stejné velikosti jejich klidových energií platí, že $T'_a = T'_b$. Jinými slovy, pro celkovou energii E' tohoto systému v jeho těžišťové soustavě lze psát

$$E' = E'_a + E'_b = 2(T'_a + m) = T' + 2m, \quad (3.103)$$

kde jsme označili celkovou kinetickou energii systému částic a a b v těžišťové soustavě jako $T' = 2T'_a$.

- Dle vztahu (3.102) tak lze pro celkovou čtyř-hybnost P systému částic a a b v laboratorní soustavě pevně spojené s terčíkovou částicí b psát $P = (T_a + 2m, \mathbf{p}_a)$, kde \mathbf{p}_a je hybnost částice a v této soustavě, zatímco v těžišťové soustavě obou částic je celková čtyř-hybnost P' dána dle vztahu (3.103) jako $P' = (T' + 2m, \mathbf{0})$.
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$P^2 = P'^2,$$

kde

$$\begin{aligned} P^2 &= (T_a + 2m)^2 - \mathbf{p}_a^2 = (E_a + m)^2 - \mathbf{p}_a^2 = E_a^2 + 2E_a m + m^2 - \mathbf{p}_a^2 \\ &= 2m(E_a + m) = 2m(T_a + 2m) \end{aligned} \quad (3.104)$$

a

$$P'^2 = (T' + 2m)^2, \quad (3.105)$$

kde ve vztahu (3.104) jsme využili relativistického vztahu energie–hybnost (3.7).

- Porovnáním vztahů (3.104) a (3.105) lze vyjádřit celkovou kinetickou energii systému částic a a b v těžiškové soustavě, po vhodné úpravě, jako

$$T' = 2m \left(\sqrt{1 + \frac{T_a}{2m}} - 1 \right). \quad (3.106)$$

- V těžiškové soustavě jsou velikosti hybností p'_a a p'_b částic a a b stejné, tj. $p'_a = p'_b$. Z relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) tak platí

$$p'_a = \sqrt{E_a'^2 - m^2} = \sqrt{(T'_a + m)^2 - m^2} = \sqrt{T'_a(T'_a + 2m)}. \quad (3.107)$$

- Dle vztahu (3.106), přičemž $T' = 2T'_a$, tak platí

$$T'_a = m \left(\sqrt{1 + \frac{T_a}{2m}} - 1 \right) \quad (3.108)$$

resp.

$$T'_a + 2m = m \left(\sqrt{1 + \frac{T_a}{2m}} + 1 \right). \quad (3.109)$$

- Dosazením (3.108) a (3.109) do (3.107) pak po jednoduché úpravě máme

$$p'_a = p'_b = \sqrt{\frac{mT_a}{2}}.$$

- Rychlost β těžiškové soustavy systému částic a a b v laboratorní soustavě je dána jako poměr velikosti hybnosti p a celkové energie E tohoto systému v laboratorní soustavě. Zřejmě platí, že tato hybnost p odpovídá hybnosti p_a částice a v laboratorní soustavě, přičemž pro celkovou energii tohoto systému platí vztah (3.102). Máme tak, s využitím (3.102) a relativistického vztahu energie–hybnost (3.7), postupně

$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{p_a}{E_a + m} = \frac{p_a}{T_a + 2m} = \frac{\sqrt{E_a^2 - m^2}}{T_a + 2m} = \frac{\sqrt{(T_a + m)^2 - m^2}}{T_a + 2m},$$

odkud po drobné úpravě plyne hledaná rychlost těžiškové soustavy systému částic a a b v laboratorní soustavě ve tvaru

$$\beta = \sqrt{\frac{T_a}{T_a + 2m}}.$$

Příklad č. 58. Částice a o klidové energii $m_a c^2$ interaguje s částicí b o klidové energii $m_b c^2$, která je v klidu. Jsou produkovány částice o celkové klidové energii $M c^2 > (m_a + m_b) c^2$. Určete prahovou energii procesu. Řešte relativisticky a diskutujte nerelativistické přiblížení.

Řešení

- Zapišme symbolicky prahový proces ze zadání jako

$$a + b \rightarrow \underbrace{\dots\dots}_M, \quad (3.110)$$

kde v počátečním stavu částice a interaguje s částicí b , přičemž v koncovém stavu vzniknuvší částice mají celkovou klidovou energii M .

- Zapišme tak čtyř-hybnost počátečního stavu v soustavě pevně spojené s terčíkovou částicí b jako $P = (E_{a,t} + m_b, \mathbf{p}_{a,t})$, kde $E_{a,t}$ je celková prahová energie částice a s prahovou hybností $\mathbf{p}_{a,t}$.
- Čtyř-hybnost koncového stavu prahového procesu (3.110) v těžiškové soustavě je pak jednoduše $P' = (M, \mathbf{0})$.
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$P^2 = P'^2,$$

kde

$$P^2 = (E_{a,t} + m_b)^2 - \mathbf{p}_{a,t}^2 = E_{a,t}^2 + 2E_{a,t}m_b + m_b^2 - \mathbf{p}_{a,t}^2 = m_a^2 + 2E_{a,t}m_b + m_b^2 \quad (3.111)$$

a

$$P'^2 = M^2, \quad (3.112)$$

přičemž jsme využili relativistického vztahu energie–hybnost (3.7).

- Porovnáním (3.111) a (3.112) jednoduše vyjádříme hledanou celkovou prahovou energii $E_{a,t}$ částice a jako

$$E_{a,t} = \frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_b},$$

resp. její prahovou kinetickou energii $T_{a,t}$, pro kterou po jednoduchých úpravách platí

$$T_{a,t} = E_{a,t} - m_a = \frac{M^2 - (m_a + m_b)^2}{2m_b}. \quad (3.113)$$

- Pro proces (3.110) je energie reakce, dle vztahu (3.1), dána jako

$$Q = m_a + m_b - M.$$

- Upravme tak prahovou kinetickou energii (3.113) částice a , tj.

$$\begin{aligned}
 T_{a,t} &= \frac{M^2 - (m_a + m_b)^2}{2m_b} = \frac{\overbrace{[M - (m_a + m_b)]}^{=-Q} [M + (m_a + m_b)]}{2m_b} \\
 &= -\frac{Q}{2m_b} [M + (m_a + m_b)] = -\frac{Q}{2m_b} [2(m_a + m_b) - Q]. \quad (3.114)
 \end{aligned}$$

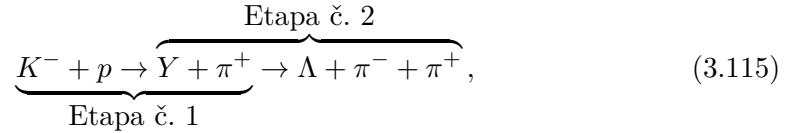
- V případě nerelativistického přiblížení je $|Q| \ll m_a, m_b, M$, což znamená, že ve vztahu (3.114) můžeme zanedbat člen úměrný Q^2 , což dává

$$\boxed{T_{a,t} \doteq -\frac{Q}{m_b} (m_a + m_b).}$$

Příklad č. 59. Při studiu interakce $K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^- + \pi^+$, která byla vyvolána K^- mezony o kinetické energii $T_K = 790$ MeV na terčíkovém protonu v klidu, bylo zjištěno, že zkoumaná interakce probíhá přes vázaný rezonanční stav $Y \rightarrow \Lambda + \pi^-$ ve dvou etapách tak, že $K^- + p \rightarrow Y + \pi^+ \rightarrow \Lambda + \pi^- + \pi^+$. Přitom vznikají π^+ mezony, které mají v těžištové soustavě kinetickou energii $T'_\pi = 300$ MeV. Určete klidovou energii rezonance Y a její energii rozpadu. Klidové energie částic jsou $m_p c^2 = 938,3$ MeV, $m_K c^2 = 493,7$ MeV, $m_\pi c^2 = 139,6$ MeV a $m_\Lambda c^2 = 1115,7$ MeV.

Řešení

- Zapišme si interakci ze zadání jako dvě po sobě jdoucí etapy,



přičemž víme, že v soustavě pevně spojené s terčíkovým protonem je kinetická energie T_K kaonu K^- právě $T_K = 790$ MeV, zatímco tento proton je samozřejmě v klidu. Dále víme, že v těžištové soustavě páru $Y - \pi^+$ je kinetická energie T'_π pionu π^+ právě $T'_\pi = 300$ MeV.

- Zabývejme se tak nyní první etapou interakce (3.115). Celková čtyř-hybnost P počátečního stavu v soustavě pevně spojené s terčíkovým protonem je $P = (E_K + m_p, \mathbf{p}_K)$, kde E_K je celková energie kaonu a \mathbf{p}_K je jeho hybnost v této soustavě. Čtyř-hybnost P' koncového stavu v těžištové soustavě páru $Y - \pi^+$ je pak $P' = (E'_Y + E'_\pi, \mathbf{0}) = (E'_Y + T'_\pi + m_\pi, \mathbf{0})$, kde E'_Y a E'_π jsou celkové energie rezonance Y a pionu π^+ v těžištové soustavě, přičemž ve druhém kroku jsme využili znalosti kinetické energie pionu π^+ v této soustavě.¹³

¹³Podobně jako v případě čtyř-hybnosti P' jsme i ve čtyř-hybnosti P mohli rozepsat celkovou energii E_K kaonu v soustavě pevně spojené s terčíkovým protonem jako $E_K = T_K + m_K$. Jak uvidíme ve vztahu (3.116), tuto úpravu provedeme až na závěr výpočtu P^2 proto, abychom mohli nejdříve pohodlněji aplikovat relativistický vztah energie–hybnost (3.7).

- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$P^2 = P'^2,$$

přičemž

$$\begin{aligned} P^2 &= (E_K + m_p)^2 - \mathbf{p}_K^2 = E_K^2 + 2E_K m_p + m_p^2 - \mathbf{p}_K^2 \\ &= m_K^2 + 2E_K m_p + m_p^2 = m_K^2 + 2(T_K + m_K)m_p + m_p^2 \end{aligned} \quad (3.116)$$

a

$$P'^2 = (E'_Y + T'_\pi + m_\pi)^2, \quad (3.117)$$

kde ve vztahu (3.116) jsme využili relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) a v posledním kroku rovněž faktu, že ze zadání známe kinetickou energii T_K kaonu v soustavě pevně spojené s terčíkovým protonem.

- Porovnáním vztahů (3.116) a (3.117) tak můžeme jednoduše vyjádřit celkovou energii E'_Y rezonance Y v těžiškové soustavě páru $Y - \pi^+$ jako

$$E'_Y = \sqrt{m_K^2 + 2(T_K + m_K)m_p + m_p^2} - (T'_\pi + m_\pi) \doteq 1440,1 \text{ MeV}. \quad (3.118)$$

- V těžiškové soustavě páru $Y - \pi^+$ jsou velikosti hybností rezonance Y a pionu π^+ stejné, a jelikož známe kinetickou energii pionu π^+ v této soustavě, můžeme dle relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) psát

$$p'_Y = p'_\pi = \sqrt{E'^2_\pi - m^2_\pi} = \sqrt{(T'_\pi + m_\pi)^2 - m^2_\pi},$$

resp. po úpravě

$$p'_Y = \sqrt{T'_\pi(T'_\pi + m_\pi)} \doteq 416,8 \text{ MeV}. \quad (3.119)$$

- Za znalosti celkové energie (3.118) a velikosti hybnosti (3.119) rezonance Y v těžiškové soustavě páru $Y - \pi^+$ tak můžeme určit její klidovou energii užitím relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) jako

$$m_Y = \sqrt{E'^2_Y - p'^2_Y} \doteq 1378,4 \text{ MeV}.$$

- Energii rozpadu rezonance Y pak určíme jako energii reakce $Y \rightarrow \Lambda + \pi^-$, která je součástí druhé etapy procesu (3.115). Na základě znalosti klidových energií jednotlivých částic tak platí

$$Q_{Y \rightarrow \Lambda + \pi^-} = m_Y - (m_\Lambda + m_\pi) \doteq 123,1 \text{ MeV}.$$

Příklad č. 60. Jaká je prahová energie γ -kvanta pro produkci páru e^-e^+ v poli atomového jádra X o klidové energii $m_X c^2$ v klidu? Klidová energie elektronu, resp. pozitronu, je $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$. Srovnajte prahové energie pro produkci páru e^-e^+ v poli protonu ($m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$) a deuteronu ($m_d c^2 = 1875,6 \text{ MeV}$).

Řešení

- Procesu ze zadání se říká tvorba párů v poli jádra. Označme si tak tento proces jako

$$\gamma + X \rightarrow e^- + e^+ + X,$$

kde v počátečním stavu γ -kvantum nalétává na jádro X v klidu, přičemž koncovým stavem je produkce elektron-pozitronového páru v poli tohoto jádra.

- Označme čtyř-hybnost počátečního stavu v laboratorní soustavě jako P . Jelikož je jádro X v klidu, platí, že $P = (E_{\gamma,t} + m_X, \mathbf{p}_{\gamma,t})$, kde $E_{\gamma,t}$ je prahová energie γ -kvanta s prahovou hybností $\mathbf{p}_{\gamma,t}$ a m_X je klidová energie jádra X .
- Čtyř-hybnost koncového stavu v těžiškové soustavě elektron-pozitronového páru pak označme jako P' , přičemž $P' = (2m_e + m_X, \mathbf{0})$, jelikož klidové energie elektronu a pozitronu jsou stejné a celková hybnost systému je v těžiškové soustavě nulová.
- Rovnost lorentz-invariantních kvadrátů čtyř-hybností zapišme ve tvaru

$$P^2 = P'^2,$$

přičemž

$$P^2 = (E_{\gamma,t} + m_X)^2 - \mathbf{p}_{\gamma,t}^2 = E_{\gamma,t}^2 + 2E_{\gamma,t} m_X + m_X^2 - \mathbf{p}_{\gamma,t}^2 = m_X(2E_{\gamma,t} + m_X) \quad (3.120)$$

a

$$P'^2 = (2m_e + m_X)^2, \quad (3.121)$$

kde ve vztahu (3.120) jsme využili relativistického vztahu energie–hybnost (3.7) a faktu, že γ -kvantum je nehmotné.

- Pro hledanou prahovou energii $E_{\gamma,t}$ tak porovnáním vztahů (3.120) a (3.121) platí

$$E_{\gamma,t} = 2m_e \left(1 + \frac{m_e}{m_X} \right).$$

- Dosadíme-li za m_X klidové energie protonu, resp. deuteronu, dostaneme příslušné prahové energie $E_{\gamma,t}^{(p)}$, resp. $E_{\gamma,t}^{(d)}$, jako

$$\begin{aligned} E_{\gamma,t}^{(p)} &\doteq 1,0226 \text{ MeV}, \\ E_{\gamma,t}^{(d)} &\doteq 1,0223 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

A Zápočtové písemné práce (2020/2021)

V této kapitole jsou uvedena zadání a vzorová řešení všech zápočtových písemných prací z loňského akademického roku 2020/21. Na zadání a sepsání řešení zápočtových úloh se podíleli všichni tři tehdejší cvičící — Tadeáš Dohnal, Kateřina Jarkovská a Tomáš Kadavý s tím, že každý vždy přispěl jednou úlohou ze tří pro každý termín zápočtu.

Všechna řešení níže uvedených zápočtových písemných prací jsou koncipována tak, aby byla „self-konzistentní“. Jinými slovy, namísto odkazů na již dříve používané vztahy v některých z výše uvedených příkladů č. 1 až 60, tyto vztahy v řešeních znovu explicitně vypisujeme, často však v konkrétně uvažované notaci.

Co se pak týče užívané konvence $c = 1$, tato je užívaná převážně tam, kde není třeba získat výsledek v jednotkách SI. V opačném případě je tato konvence „lokálně zanedbána“, což je však vždy zřejmé z kontextu.

A.1 Termín č. 1 (18. 12. 2020)

Solidarita stromů (6 bodů)

Rozhodli jste se zkoumat, zda si stromy vypomáhají výměnou živin přes podhoubí symbiotických hub. Stromek č. 1 jste proto „krmili“ oxidem uhličitým (CO_2) nabohaceným radioaktivním ^{14}C , stromek č. 2 jste pouze zastínili. Během experimentálního období strom č. 1 přijal $5\ \mu\text{g}$ radioaktivního CO_2 .

- a) (1b) Určete, kolik atomů radioaktivního ^{14}C stromek č. 1 přijal v rámci experimentu. Jaké to odpovídá aktivitě?

Po skončení vegetačního období jste stromy vytrhli a změřili jejich suchou váhu a aktivitu. Stromek č. 1 vážil 15 kg s odpovídající aktivitou 100 kBq, stromek č. 2 vážil 10 kg s odpovídající aktivitou 3 kBq.

- b) (2b) Jakou část ^{14}C přijatou během experimentu předal stromek č. 1 stromku č. 2? Před započnutím experimentu stromky obsahovaly přirozenou koncentraci $1,3 \cdot 10^{-12}$ atomů izotopu ^{14}C na 1 atom uhlíku, jejich úbytek rozpadem v průběhu experimentu zanedbejte. Jakožto chemické složení stromků předpokládejte glukózu $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$.
- c) (3b) Na památku experimentu jste si nechali ze stromku č. 1 vyřezat sochu Střemovouse. O 38 000 let později, dlouho po tom, co lidstvo vymřelo, sošku našli mimozemští průzkumníci a rozhodli se určit její stáří radiokarbonovou metodou. K jakému výsledku dospěli? Uvažujte, že ^{14}C byl v dřevu stromku č. 1 rozptýlen homogenně a že mimozemšťané mylně předpokládali, že v okamžiku výroby sošky byla koncentrace ^{14}C na úrovni $1,3 \cdot 10^{-12}$.

Poločas rozpadu ^{14}C je $T_{1/2, (^{14}\text{C})} = 5730\ \text{y}$. Kilomolové hmotnosti ^{14}C , kyslíku a glukózy jsou: $M_{(^{14}\text{C})} = 14\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{(\text{O})} = 16\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ a $M_{(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)} = 180\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Avogadrova konstanta je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.

Řešení

- a) – Počet izotopů ^{14}C v hmotnosti $m_{(\text{CO}_2)} = 5 \mu\text{g}$ je

$$N_{(^{14}\text{C})} = \frac{m_{(\text{CO}_2)} N_A}{M_{(\text{CO}_2)}} \doteq 6,55 \cdot 10^{16}.$$

- Odpovídající aktivita je tedy

$$A_{(^{14}\text{C})} = \lambda_{(^{14}\text{C})} N_{(^{14}\text{C})} = \frac{N_{(^{14}\text{C})} \ln 2}{T_{1/2, (^{14}\text{C})}} = \frac{m_{(\text{CO}_2)} N_A \ln 2}{M_{(\text{CO}_2)} T_{1/2, (^{14}\text{C})}} \doteq 250 \text{ kBq}.$$

- b) – Aktivita druhého stromku pocházející z přirozených zdrojů je

$$A_2^{(n)} = 6 \frac{m_2 N_A}{M_{(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)}} f \frac{\ln 2}{T_{1/2, (^{14}\text{C})}} \doteq 1,0 \text{ kBq},$$

kde faktor „6“ zohledňuje počet atomů uhlíku v glukóze, $f = 1,3 \cdot 10^{-12}$ a m_2 značí hmotnost stromku č. 2.

- Z „nepřirozených“ zdrojů (tj. z experimentu) tedy pochází $A_2^{(e)} \doteq 2,0 \text{ kBq}$, tj.

$$\boxed{0,8\%}$$

z radioaktivního uhlíku přijatého stromkem č. 1.

- c) – Označme aktivitu prvního stromku po skončení experimentu $A_1(t = 0 \text{ y}) \equiv A_{1,0} = 100 \text{ kBq}$. Aktivitu při přiletu mimozemšťanů spočítáme pomocí exponenciálního rozpadového zákona:

$$A_1(t = 38\,000 \text{ y}) \equiv A_1^{(m)} = A_{1,0} \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2, (^{14}\text{C})}}\right) \doteq 1,0 \text{ kBq}.$$

- Podobně jako v přechozí části můžeme spočítat aktivitu, jakou by měl stromek č. 2 za normálních podmínek z přirozených zdrojů v okamžiku pokácení, tj. $A_1^{(n)} \doteq 1,5 \text{ kBq}$.

- Mimozemšťané předpokládají, že stáří sošky t_m je dáno rovnicí (v tomto případě je jedno, jestli uvažujeme aktivitu celého stromku nebo jen sošky, neboť nám jde jen o poměr aktivity v předpokládaném okamžiku výroby a nalezení):

$$A_1^{(m)} = A_1^{(n)} \exp\left(-\frac{t_m \ln 2}{T_{1/2, (^{14}\text{C})}}\right),$$

z níž vyjádříme stáří jako

$$t_m = \frac{T_{1/2, (^{14}\text{C})}}{\ln 2} \ln\left(\frac{A_1^{(n)}}{A_1^{(m)}}\right) \doteq 3\,300 \text{ y}.$$

Produkce technecia (6 bodů)

Uvažujme zemskou rudu obsahující $m_{(\text{MoS}_2)} = 13 \text{ t}$ molybdenitu MoS_2 . Interakcí $\nu_e + {}^{98}_{42}\text{Mo} \rightarrow {}^{98}_{43}\text{Tc} + e^-$ molybdenu se slunečními elektronovými neutriny z Be–B větve proton-protonového cyklu, jejichž hustota toku na povrchu Země je $j_\nu = 6 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, vzniká technecium. Účinný průřez interakce elektronového neutrina s neutronem je $\sigma_{\nu n} = 10^{-48} \text{ m}^2$. Kilomolová hmotnost molybdenitu je $M_{(\text{MoS}_2)} = 164 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$. Avogadrova konstanta je $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Klidové energie elektronu, molybdenu a technecia jsou popořadě $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$, $m_{\text{Mo}} c^2 = 91,17760 \text{ GeV}$ a $m_{\text{Tc}} c^2 = 91,17880 \text{ GeV}$.

- a) (4b) Určete četnost produkce technecia.
- b) (2b) Určete prahovou energii elektronových neutrín ze Slunce potřebnou k produkci technecia. Neutrína považujte za nehmotná.

Nápověda: Může se stát, že hustota hmotnosti $\rho_{(\text{MoS}_2)}$ molybdenitu se vyskytne ve Vašich výpočtech. Její hodnotu potřebovat nebudete, využijete-li vhodných předpokladů a přejdete k veličině, jejíž hodnotu znáte ze zadání. Diskutujte veškeré předpoklady.

Řešení

- a) – Začneme převodem jednotek a zapsáním všech potřebných veličin. Pro celkovou hmotnost $m_{(\text{MoS}_2)}$ molybdenitu v zemské rudě a kilomolovou hmotnost $M_{(\text{MoS}_2)}$ molybdenitu platí

$$m_{(\text{MoS}_2)} = 13 \text{ t} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ kg},$$

$$M_{(\text{MoS}_2)} = 164 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 164 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 1,64 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- Dle zadání je zřejmé, že interakcí elektronového neutrína s molybdenem dojde k produkci nejen elektronu, ale také protonu (viz navýšení protonového čísla v koncovém stavu oproti stavu počátečnímu). Evidentně tak jde o interakci $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$. V našem případě má molybden ve svém jádru $98 - 42 = 56$ neutronů, se kterými může neutrino interagovat. Objemová hustota neutronů v molybdenitu je tak

$$n_n = 56 \frac{\rho_{(\text{MoS}_2)} N_A}{M_{(\text{MoS}_2)}}, \quad (\text{A.1})$$

kde $\rho_{(\text{MoS}_2)}$ je hustota hmotnosti molybdenitu.

- Předpokládejme, že objem, kde se molybdenit v zemské rudě vyskytuje, má charakteristický rozměr d . Označme tak intenzitu toku neutrín před vnikem do tohoto objemu jako I_0 . Podobně, jako $I(d)$ označme intenzitu toku neutrín po projití tímto objemem. Četnost produkce technecia tak právě odpovídá četnosti interakce elektronového neutrína s neutronem v jádře molybdenu a je pak dána jako

$$R_{\text{Tc}} = R_{\nu n} = I_0 - I(d) = I_0 - I_0 e^{-\sigma_{\nu n} n_n d} = I_0 \left(1 - e^{-\sigma_{\nu n} n_n d}\right). \quad (\text{A.2})$$

- Jelikož neznáme hustotu hmotnosti $\rho_{(\text{MoS}_2)}$ molybdenitu, neznáme ani objemovou hustotu (A.1). Nicméně, zcela jistě lze očekávat, že exponent v posledním výrazu v (A.2) bude jistě dostatečně malý na to, aby bylo možné exponenciálu aproximovat prvními dvěma členy Taylorova rozvoje (čtenář si jistě dokáže sám ověřit, které numerické hodnoty příslušných neznámých veličin by nám takovou aproximaci znemožňovaly provést, a že tyto extrémní případy nejsou relevantní pro naši úlohu). Četnost (A.2) tak lze vyjádřit, za oprávněného předpokladu, že $\sigma_{\nu n} n_n d \ll 1$, jako

$$R_{\nu n} \doteq I_0 \sigma_{\nu n} n_n d.$$

- Rozepíšeme-li intenzitu toku I_0 jako součin hustoty toku j_ν a aktivní plochy S , máme

$$R_{\nu n} \doteq j_\nu S \sigma_{\nu n} n_n d = j_\nu \sigma_{\nu n} n_n V_{(\text{MoS}_2)}, \quad (\text{A.3})$$

kde jsme v posledním kroku přepsali součin aktivní plochy a charakteristického rozměru jako objem, který tak má význam jako objem molybdenitu v zemské rudě.

- Dosazením (A.1) do (A.3) tak máme

$$R_{\nu n} \doteq 56 j_\nu \sigma_{\nu n} \frac{\rho_{(\text{MoS}_2)}}{M_{(\text{MoS}_2)}} N_A V_{(\text{MoS}_2)} = 56 j_\nu \sigma_{\nu n} \frac{m_{(\text{MoS}_2)}}{M_{(\text{MoS}_2)}} N_A,$$

kde jsme součin hustoty hmotnosti a objemu molybdenitu v rudě přepsali jako jeho celkovou hmotnost.

- Dosazením číselných hodnot tak máme pro četnost produkce technecia

$$R_{\text{Tc}} \doteq 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \doteq 0,014 \text{ d}^{-1}.$$

- b) – Položme $c = 1$. Dále, označme čtyř-hybnost neutrino a molybdenu v soustavě pevně spojené s jádrem molybdenu jako $P = (E_\nu + m_{\text{Mo}}, \mathbf{p}_\nu)$, kde E_ν je celková prahová energie neutrino. Čtyř-hybnost technecia a elektronu je, bereme-li v úvahu prahovou produkci, v jejich těžiškové soustavě $P' = (m_{\text{Tc}} + m_e, \mathbf{0})$. Zákon zachování čtyř-hybnosti pak říká, že

$$P^2 = P'^2. \quad (\text{A.4})$$

- Levou stranu rovnice (A.4) upravíme, s užitím faktu, že relativistický vztah energie–hybnost má pro nehmotné neutrino jednoduchý tvar $E_\nu = p_\nu$, následovně:

$$P^2 = (E_\nu + m_{\text{Mo}})^2 - \mathbf{p}_\nu^2 = (E_\nu^2 - p_\nu^2) + 2E_\nu m_{\text{Mo}} + m_{\text{Mo}}^2 = 2E_\nu m_{\text{Mo}} + m_{\text{Mo}}^2. \quad (\text{A.5})$$

- Pro pravou stranu rovnice (A.4) pak máme jednoduše

$$P'^2 = (m_{\text{Tc}} + m_e)^2. \quad (\text{A.6})$$

- Porovnáním (A.5) a (A.6) pak lze vyjádřit hledanou prahovou energii neutrina jako

$$E_\nu = \frac{(m_{\text{Te}} + m_e)^2 - m_{\text{Mo}}^2}{2m_{\text{Mo}}} \doteq 1,71 \text{ MeV}.$$

Proton s neutronem (8 bodů)

V laboratorní soustavě pozorujeme proton s neutronem, jak letí přímo proti sobě s příslušnými kinetickými energiemi $T_n = 180 \text{ MeV}$ a $T_p = 2 \text{ GeV}$. Jejich klidové energie jsou $m_n c^2 = 939 \text{ MeV}$ a $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$. Rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- a) (1,5b) Určete rychlost těžiškové soustavy neutronu s protonem vůči laboratorní soustavě.

Pro další výpočty se přesuňme do soustavy, ve které je proton v klidu.

- b) (2,5b) Určete energii a velikost hybnosti neutronu v soustavě, kde je proton v klidu.
c) (4b) Proton s neutronem se pružně rozptýlí, tedy dojde k interakci

$$n + p \rightarrow n + p.$$

Určete maximální hybnost rozptýleného protonu v soustavě, kde byl na začátku proton v klidu.

Řešení

- a) – Položme $c = 1$. Rychlost těžiškové soustavy vůči laboratorní soustavě spočítáme pomocí vztahu

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_p|}{E_n + E_p} = \frac{|p_n - p_p|}{E_n + E_p} = \frac{\sqrt{E_p^2 - m_p^2} - \sqrt{E_n^2 - m_n^2}}{E_n + E_p}, \quad (\text{A.7})$$

kde jsme využili faktu, že neutron s protonem letí přímo proti sobě.

- Výraz (A.7) nakonec dopravíme pomocí znalosti vztahu $E = T + m$ mezi celkovou energií částice a její kinetickou energií:

$$\beta = \frac{\sqrt{(T_p + m_p)^2 - m_p^2} - \sqrt{(T_n + m_n)^2 - m_n^2}}{m_n + m_p + T_n + T_p},$$

což po dosazení dává

$$\beta = 0,54,$$

resp.

$$v = \beta c = 1,6 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- b) – Přesuňme se nyní do těžiškové soustavy protonu.¹⁴ Celkovou energii a velikost hybnosti neutronu proto musíme do této soustavy Lorentzovsky transformovat. Uvědomme si, že těžišková soustava protonu se vůči laboratorní soustavě pohybuje rychlostí

$$\beta_p = \frac{p_p}{E_p} = \frac{\sqrt{E_p^2 - m_p^2}}{E_p} = \frac{\sqrt{(T_p + m_p)^2 - m_p^2}}{T_p + m_p},$$

které odpovídá gamma faktor

$$\gamma_p = \frac{E_p}{m_p} = \frac{T_p + m_p}{m_p}.$$

- Energie neutronu E'_n v těžiškové soustavě protonu je tedy

$$\begin{aligned} E'_n &= \gamma_p(E_n - \beta_p \cdot \mathbf{p}_n) = \gamma_p(E_n + \beta_p p_n) \\ &= \frac{T_p + m_p}{m_p} \left(T_n + m_n + \frac{\sqrt{(T_p + m_p)^2 - m_p^2} \sqrt{(T_n + m_n)^2 - m_n^2}}{T_p + m_p} \right), \end{aligned}$$

kde jsme využili faktu, že neutron se v laboratorní soustavě pohybuje proti směru protonu. Po vyčíslení dostáváme celkovou energii a velikost hybnosti neutronu v těžiškové soustavě protonu jako

$$\boxed{\begin{aligned} E'_n &\doteq 5\,312 \text{ MeV}, \\ p'_n &\doteq \sqrt{E'^2_n - m_n^2} = 5\,228 \text{ MeV}. \end{aligned}}$$

- c) – Pozorujme pružný rozptyl protonu s neutronem v těžiškové soustavě původního protonu. Dochází tedy k interakci $n+p \rightarrow n+p$. Příslušné čtyřhybnosti vyjádřené v soustavě, kde byl proton na začátku v klidu, jsou $P_{n_1} = (E'_n, \mathbf{p}'_n)$, $P_{p_1} = (m_p, \mathbf{0})$, $P_{n_2} = (E_{n_2}, \mathbf{p}_{n_2})$, $P_{p_2} = (E_{p_2}, \mathbf{p}_{p_2})$, kde index „1“ značí kinematické veličiny částic před rozptylem a index „2“ značí kinematické veličiny částic po rozptyle. Zákon zachování čtyřhybnosti říká, že

$$P_{p_1} + P_{n_1} = P_{p_2} + P_{n_2},$$

a tedy

$$(P_{p_1} + P_{n_1} - P_{p_2})^2 = P_{n_2}^2. \quad (\text{A.8})$$

- Pravá strana rovnice (A.8) je jednoduše

$$P_{n_2}^2 = m_n^2. \quad (\text{A.9})$$

¹⁴Připomeňme, že těžišková soustava částice je taková soustava, ve které má částice nulovou hybnost.

- Levou stranu musíme upravit (pro jednoduchost označme $E_{p_2} \equiv E$ a $p_{p_2} \equiv p$):

$$\begin{aligned}
(P_{p_1} + P_{n_1} - P_{p_2})^2 &= (E'_n + m_p - E, \mathbf{p}'_n - \mathbf{p})^2 \\
&= (E'_n + m_p - E)^2 - (\mathbf{p}'_n - \mathbf{p})^2 \\
&= (E'_n + m_p)^2 + E^2 - 2E(E'_n + m_p) - p_n'^2 - p^2 + 2p'_n p \cos \alpha \\
&= (E'_n + m_p)^2 + (E^2 - p^2) - 2E(E'_n + m_p) - p_n'^2 + 2p'_n p \cos \alpha \\
&= (E'_n + m_p)^2 + m_p^2 - 2E(E'_n + m_p) - p_n'^2 + 2p'_n p \cos \alpha,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

kde úhel mezi směrem letu původního neutronu a směrem výletu rozptýleného protonu jsme označili α .

- Porovnáním (A.10) a (A.9) dostáváme

$$\begin{aligned}
m_n^2 &= (E'_n + m_p)^2 + m_p^2 - 2E(E'_n + m_p) - p_n'^2 + 2p'_n p \cos \alpha \\
&= E_n'^2 - p_n'^2 + 2E'_n m_p + m_p^2 + m_p^2 - 2E(E'_n + m_p) + 2p'_n p \cos \alpha \\
&= m_n^2 + 2E'_n m_p + 2m_p^2 - 2E(E'_n + m_p) + 2p'_n p \cos \alpha,
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
0 &= 2m_p(E'_n + m_p) - 2E(E'_n + m_p) + 2p'_n p \cos \alpha \\
&= 2m_p(E'_n + m_p) - 2\sqrt{m_p^2 + p^2}(E'_n + m_p) + 2p'_n p \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

- Osamostněním členu s odmocninou ve vztahu (A.11) a umocnění takového výrazu na druhou vede, po jednoduchých algebraických úpravách, ke zjištění, že hybnost rozptýleného protonu bude maximální, pokud $\alpha = 0$, tj. $\cos \alpha = 1$. Jedná se o případ, kdy proton vylétá ve směru přilétajícího neutronu.
- Ze vztahu (A.11) pak jednoduše plyne vztah pro maximální hybnost rozptýleného protonu ve tvaru

$$p \equiv p_{p_2}^{(\max)} = \frac{2p'_n m_p (m_p + E'_n)}{m_p^2 + m_n^2 + 2E'_n m_p},$$

což znamená, že proton odnese téměř celou počáteční hybnost neutronu.

A.2 Termín č. 2 (4. 1. 2021)

Jaderná elektrárna (6 bodů)

Uvažujme jadernou elektrárnu o tepelném výkonu $P = 1 \text{ GW}$ a účinnosti $\eta = 30\%$, která generuje energii štěpením uranu ^{235}U , přičemž rozštěpením každého jádra se uvolní energie $Q = 200 \text{ MeV}$. Určete, kolik uranu spotřebuje elektrárna za jeden rok nepřetržitého provozu. Pro jednoduchost považujme klidové energie protonu a neutronu v této úloze za stejné, přičemž $m_p c^2 \approx m_n c^2 \doteq 1 \text{ GeV}$.

Řešení

- Nejdříve si uvědomme, že se nám v zadání vyskytují dvě různé jednotky, takže je výhodné převést jednu z nich na tu druhou. Jelikož v částicové fyzice hojně pracujeme s jednotkou eV, převedeme watt na elektronvolty. Víme, že watt je jednotkou výkonu, tedy práce vykonané za jednotku času. Můžeme tak psát

$$W = J \cdot s^{-1} \doteq \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} \cdot s^{-1} \doteq 6,3 \cdot 10^{18} \text{ eV} \cdot s^{-1},$$

kde jsme využili toho, že $1 \text{ eV} \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Tepelný výkon jaderné elektrárny je tedy

$$P \doteq 6,3 \cdot 10^{27} \text{ eV} \cdot s^{-1}.$$

- Jelikož elektrárna pracuje s účinností η , celková energie generovaná štěpením uranu za jednotku času je pak dána jako

$$P_0 = \frac{P}{\eta} \doteq 2,1 \cdot 10^{28} \text{ eV} \cdot s^{-1} = 2,1 \cdot 10^{22} \text{ MeV} \cdot s^{-1}, \quad (\text{A.12})$$

čemuž můžeme v běžně užívaném názvosloví říkat příkon, a právě proto jsme tuto veličinu označili P_0 , jak bývá zvykem.

- Vzhledem k tomu, že každé štěpení uranu uvolní energii $Q = 200 \text{ MeV}$, pak k dosažení příkonu (A.12) je třeba, aby každou sekundu proběhlo právě

$$N_{(1s)} = \frac{P_0}{Q} \doteq 1,1 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$$

štěpení, čemuž odpovídá

$$N_{(1y)} = N_{(1s)} \cdot (3600 \cdot 24 \cdot 365) \doteq 3,3 \cdot 10^{27} \text{ y}^{-1}$$

štěpení za rok.

- Předpokládejme, že klidové hmotnosti nukleonů, tj. protonu a neutronu, jsou si přibližně rovny, $m_p \approx m_n \equiv m_N$, přičemž dle zadání je $m_N \doteq 1 \text{ GeV}/c^2$. Klidová hmotnost jádra uranu ^{235}U , složeného z 235 nukleonů, je pak rovna

$$m_{(^{235}\text{U})} \doteq 235m_N = 235 \text{ GeV}/c^2 \doteq 4,2 \cdot 10^{-25} \text{ kg}.$$

- Celková hmotnost uranu, spotřebovaného v jaderné elektrárně za rok nepřetržitého provozu, je tedy

$$M_{(^{235}\text{U})} = N_{(1y)} m_{(^{235}\text{U})} \doteq 1391 \text{ kg}.$$

Sušené houby, jedinečný ročník 1986 (6 bodů)

Babička v létě 1986 nasbírala a nasušila houby. Když se pak doslechla, že mohou být radioaktivní, dala je do skříně, aby aspoň hřály. Předpokládejme, že sušených hub byl $m = 1$ kg, jejich aktivita v roce 1986 byla $A_{1986} = 2,4$ kBq a byla dána čistě radioizotopem ^{137}Cs o poločasu rozpadu $T_{1/2} = 30$ y a molární hmotnosti $M = 137$ g · mol⁻¹. Avogadrova konstanta je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.

- a) (2b) Kolik atomů ^{137}Cs bylo na počátku v sušených houbách? Jaké to odpovídá hmotnosti ^{137}Cs ?
- b) (1b) Jaká je aktivita sušených hub v roce 2020?
- c) (2b) Kolik radiogenního tepla (v joulech) sušené houby do roku 2020 vyprodukovaly, jestliže se z jednoho rozpadu ^{137}Cs přeměnilo 750 keV na teplo?
- d) (1b) Rozhodli jste se, že sušené houby je škoda vyhazovat, takže počkáte, až jejich měrná aktivita klesne na přípustných 600 Bq · kg⁻¹, a pak je sníte. Ve kterém roce to nastane?

Řešení

- a) – Vyjdeme ze vztahů pro aktivitu $A = \lambda N$ a poločas rozpadu $T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$, kde λ je rozpadová konstanta. Pro počet atomů tak platí

$$N_{1986} = \frac{A_{1986} T_{1/2}}{\ln 2} \doteq 3,3 \cdot 10^{12}.$$

- Odpovídající hmotnost ^{137}Cs spočítáme jako

$$m_{(^{137}\text{Cs})} = \frac{N_{1986} M}{N_A} \doteq 7,5 \cdot 10^{-10} \text{ g}.$$

- b) – Aktivita klesá v čase podle exponenciálního rozpadového zákona, tedy

$$A_{2020} = A_{1986} e^{-\lambda t} = A_{1986} \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}\right) \doteq 1,1 \text{ kBq},$$

kde počáteční aktivita je dána veličinou A_{1986} a kde jsme za čas t dosadili $t = (2020 - 1986) \text{ y} = 34 \text{ y}$.

- c) – Nejprve spočteme počet rozpadů, který odpovídá úbytku atomů ^{137}Cs . Těch za čas $t = 34$ y ubylo

$$N_R = N_{1986} - N_{2020} = N_{1986} - N_{1986} e^{-\lambda t} = N_{1986} \left[1 - \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}\right)\right],$$

tedy

$$N_R \doteq 1,8 \cdot 10^{12}.$$

- Při každém rozpadu se uvolnilo $E_R = 750 \text{ keV} \doteq 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$, takže celková vyprodukovaná tepelná energie je tak

$$E_{\text{tot}} = N_R E_R \doteq 0,2 \text{ J}.$$

- Babička se díky radioaktivním houbám zjevně příliš neohřála.
- d) – Přípustná aktivita sušených hub $A_{\text{OK}} = 600 \text{ Bq}$ (sušených hub je právě 1 kg) je 1/4 počáteční aktivity, která tedy nastane po dvou poločasech rozpadu, tj. po době

$$t_{\text{OK}} = 2T_{1/2} = 60 \text{ y}. \quad (\text{A.13})$$

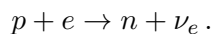
- Na sušených houbách po babičce si tedy budete moci pochutnat v roce 2046.
- K době, která musí uplynout před konzumací, lze samozřejmě dospět i výpočtem s užitím exponenciálního rozpadového zákona. Jednoduše dostaneme

$$t_{\text{OK}} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \left(\frac{A_{1986}}{A_{\text{OK}}} \right) = T_{1/2} \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2T_{1/2} = 60 \text{ y},$$

čímž je hodnota ze vztahu (A.13) zreprodukována.

Srážka protonu s elektronem (8 bodů)

V urychlovači srážíme vstříčné svazky protonů a elektronů se stejnou velikostí hybnosti $pc = 1 \text{ GeV}$ (tj. protony a elektrony mají stejnou velikost hybnosti, ale letí proti sobě). Při jejich srážce dochází k interakci



Klidové energie jednotlivých částic jsou $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$, $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ a $m_n c^2 = 939 \text{ MeV}$. Neutrino považujeme za nehmotné. Rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- a) (3b) Spočítejte celkovou energii neutronu.

Neutron, s vlastní střední dobou života $\tau_n = 879 \text{ s}$, odlétá z místa interakce a rozpadá se.

- b) (2b) Určete střední dobu života neutronu, kterou bude měřit experimentátor pozorující neutrony vylétající z výše uvedené interakce.
- c) (3b) Označme P_ℓ jako pravděpodobnost, že se tento neutron rozpadne na dráze délky ℓ . Určete vzdálenost, pro kterou bude tato pravděpodobnost právě $P_\ell = 50\%$.

Řešení

- a) – Položme $c = 1$. Čtyř-hybnosti jednotlivých částic v laboratorním systému označíme následovně: $P_p = (E_p, \mathbf{p})$, $P_e = (E_e, -\mathbf{p})$, $P_n = (E_n, \mathbf{p}_n)$ a $P_\nu = (E_\nu, \mathbf{p}_\nu)$, kde jsme využili toho, že protony s elektrony se sráží jako vstříčné svazky se stejnou velikostí hybnosti.

- Jelikož kinematické vlastnosti neutrina nejsou předmětem našeho zájmu, zákon zachování čtyř-hybnosti zapíšeme ve tvaru

$$(P_p + P_e - P_n)^2 = P_\nu^2, \quad (\text{A.14})$$

kde využijeme toho, že pravá strana této rovnice je, na základě předpokladu o nehmotném neutrinu, nulová, tj.

$$P_\nu^2 = 0. \quad (\text{A.15})$$

- Levou stranu rovnice (A.14) upravíme

$$\begin{aligned} (P_p + P_e - P_n)^2 &= (E_p + E_e - E_n, \mathbf{p} - \mathbf{p} - \mathbf{p}_n)^2 \\ &= (E_p + E_e - E_n, -\mathbf{p}_n)^2 \\ &= (E_p + E_e - E_n)^2 - p_n^2 \\ &= (E_p + E_e)^2 - 2E_n(E_p + E_e) + E_n^2 - p_n^2 \\ &= (E_p + E_e)^2 - 2E_n(E_p + E_e) + m_n^2, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

kde jsme využili relativistického vztahu energie–hybnost ve tvaru $E_n^2 - p_n^2 = m_n^2$.

- Porovnáním (A.15) a (A.16) dostaneme celkovou energii neutronu ve tvaru

$$E_n = \frac{(E_p + E_e)^2 + m_n^2}{2(E_p + E_e)}.$$

- Opětovným užitím relativistického vztahu energie–hybnost pak máme

$$E_n = \frac{\left(\sqrt{m_p^2 + p^2} + \sqrt{m_e^2 + p^2}\right)^2 + m_n^2}{2\left(\sqrt{m_p^2 + p^2} + \sqrt{m_e^2 + p^2}\right)} \doteq 1371 \text{ MeV}. \quad (\text{A.17})$$

- b) – Střední dobu života $\tau_n^{(\text{exp})}$ v interakci vzniknuvšího neutronu v laboratorní soustavě spočítáme jako lorentzovskou dilataci času. Platí

$$\tau_n^{(\text{exp})} = \gamma_n \tau_n = \frac{E_n}{m_n c^2} \tau_n \doteq 1284 \text{ s}, \quad (\text{A.18})$$

kde jsme využili výsledku (A.17) po rozšíření příslušnými faktory c .

- c) – Pravděpodobnost, že se neutron rozpadne na dráze délky ℓ , je

$$P_\ell = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_n^{(\text{exp})}}\right), \quad (\text{A.19})$$

kde

$$t = \frac{\ell}{v_n} = \frac{\ell}{\beta_n c} = \frac{\ell E_n}{c p_n c} = \frac{\ell}{c} \frac{E_n}{\sqrt{E_n^2 - (m_n c^2)^2}} \quad (\text{A.20})$$

je čas, za který neutron o rychlosti v_n uletí vzdálenost ℓ .

– Dosazením (A.20) do (A.19), s následným užitím vztahu (A.18), dostaneme

$$P_\ell = 1 - \exp\left(-\frac{\ell}{c\tau_n^{(\text{exp})}} \frac{E_n}{\sqrt{E_n^2 - (m_n c^2)^2}}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\ell}{c\tau_n} \frac{m_n c^2}{\sqrt{E_n^2 - (m_n c^2)^2}}\right).$$

– Ze zadání víme, že $P_\ell = 50\%$, resp. $P_\ell = 1/2$, a tedy

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\ell}{c\tau_n} \frac{m_n c^2}{\sqrt{E_n^2 - (m_n c^2)^2}}\right),$$

odkud pro hledanou vzdálenost ℓ platí

$$\ell = \frac{\sqrt{E_n^2 - (m_n c^2)^2}}{m_n c^2} c\tau_n \ln 2 \doteq 2 \cdot 10^{11} \text{ m.}$$

A.3 Termín č. 3 (14. 1. 2021)

Radionuklid ^{210}At (6 bodů)

Nestabilní radionuklid ^{210}At má neznámou aktivitu rozpadů na α částice. Ta se dá ovšem změřit. Radionuklid vložíme do vakuové komory o objemu jednoho litru. Aktivita je určena měřením množství He, které vznikne, když emitované α -částice přitáhnou elektrony. Předpokládejme, že všechny rozpadem vzniklé α -částice jsou transformovány do He plynu. Po $t = 24$ d se naměřily $m = 2$ mg helia.

- (3b) Vypočítejte původní aktivitu ^{210}At .
- (3b) Určete, za jak dlouho klesne původní aktivita ^{210}At na hodnotu $A_1 = 100$ kCi. Určete dále, jaké množství helia se při tomto poklesu aktivity vyprodukuje.

Kilomolová hmotnost helia je $M_{\text{He}} = 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ a Avogadrova konstanta je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Poločas rozpadu radionuklidu ^{210}At je $T_{1/2, (^{210}\text{At})} = 8,1$ h.

Řešení

- Nejprve spočítáme, kolik radionuklidů se rozpadlo za dobu měření $t = 24$ d. Jelikož počet N_R rozpadlých radionuklidů ^{210}At odpovídá počtu vzniknuvších α -částic, pak celkové hmotnosti m vytvořeného helia za uvedenou dobu odpovídá počet rozpadů daných vztahem (viz diskuse nad vztahem (B.5) ve vzorovém řešení domácího úkolu B.1)

$$N_R = \frac{m N_A}{M_{\text{He}}} = 3 \cdot 10^{20}. \quad (\text{A.21})$$

- Pokud vzorek radionuklidu obsahoval na začátku $N_0 = \frac{A_0}{\lambda_{(^{210}\text{At})}}$ jader, kde A_0 je počáteční aktivita a $\lambda_{(^{210}\text{At})}$ je rozpadová konstanta radionuklidu ^{210}At , pro počet rozpadů (A.21) platí také

$$N_R = N_0 - N(t) = N_0 - N_0 e^{-\lambda_{(^{210}\text{At})} t} = \frac{A_0}{\lambda_{(^{210}\text{At})}} \left(1 - e^{-\lambda_{(^{210}\text{At})} t}\right). \quad (\text{A.22})$$

- Původní aktivita radionuklidu je tedy, dle vztahu (A.22) po dosazení za rozpadovou konstantu pomocí poločasu rozpadu, tj. $\lambda_{(210\text{At})} = \ln 2 / T_{1/2, (210\text{At})}$, jednoduše dána jako

$$A_0 = \frac{N_R \ln 2}{T_{1/2, (210\text{At})}} \left[1 - \exp \left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2, (210\text{At})}} \right) \right]^{-1} \doteq 7,1 \cdot 10^{15} \text{ Bq}.$$

- b) – Nejprve aktivity A_0 a A_1 převedeme na stejné jednotky. Z příkladu č. 7 víme, že $1 \text{ Ci} \doteq 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$. Tudíž

$$A_0 \doteq 192 \text{ kCi}.$$

- Aktivita s časem klesá dle exponenciálního rozpadového zákona jako

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda_{(210\text{At})} t},$$

proto původní aktivita A_0 klesne na hodnotu A_1 za dobu t_1 , pro níž platí

$$t_1 = \frac{T_{1/2, (210\text{At})}}{\ln 2} \ln \left(\frac{A_0}{A_1} \right) \doteq 7,6 \text{ h}.$$

- Pokles radioaktivity odpovídá příslušnému počtu rozpadů, pro jejichž množství z rozpadového zákona máme

$$N_1 = N_0 - N(t_1) = N_0 - N_0 e^{-\lambda_{(210\text{At})} t_1} = \frac{T_{1/2, (210\text{At})}}{\ln 2} (A_0 - A_1) \doteq 1,4 \cdot 10^{20},$$

což odpovídá hmotnosti helia ve výši

$$m_1 = \frac{N_1}{N_A} M_{\text{He}} \doteq 1 \text{ mg}.$$

Bublinová komora (6 bodů)

Chceme naprojektovat bublinovou komoru tvořenou kapalným vodíkem.

- a) (3b) Jakou délku komory d musíme zvolit, aby v ní pružným rozptylem zainteragovalo právě 20% ze svazku protonů, je-li odpovídající účinný průřez interakce $\sigma_{pp} = 2,5 \text{ fm}^2$?
- b) (3b) Experiment se nachází ve vzdálenosti $\ell = 5 \text{ km}$ od jaderné elektrárny, která emituje $10^{21} \bar{\nu}_e$ za sekundu. Kolik interakcí $\bar{\nu}_e$ na protonu o účinném průřezu $\sigma_{\bar{\nu}_e p} = 4 \cdot 10^{-46} \text{ m}^2$ budeme pozorovat v bublinové komoře za 1 rok, pokud tato bude mít tvar krychle o hraně délky 2 m?

Kilomolová hmotnost a hustota hmotnosti vodíku je $M_{\text{H}_2} = 2 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ a $\rho_{\text{H}_2} = 63 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Avogadrova konstanta je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Oscilace neutrin neuvažujte.

Řešení

- a) – Pokud má zainteragovat právě 20% protonů, pak 80% (neboli 4/5) jich musí projít bez interakce. Pravděpodobnost, že proton projde bez interakce je tedy

$$\frac{4}{5} = e^{-\sigma_{pp} n_p d},$$

kde n_p je objemová hustota protonů, pro niž platí

$$n_p = 2 \frac{\rho_{\text{H}_2} N_A}{M_{\text{H}_2}},$$

a kde jsme zohlednili skutečnost, že v jedné molekule vodíku jsou dva atomy vodíku, a tedy dva protony.

- Celkem tedy pro hledanou délku komory dostaneme

$$d = \frac{M_{\text{H}_2}}{2 \rho_{\text{H}_2} N_A \sigma_{pp}} \ln \left(\frac{5}{4} \right) \doteq 2,35 \text{ m}.$$

- b) – Spočtěme nejprve, jaká je hustota toku elektronových antineutrín $\bar{\nu}_e$ z jaderné elektrárny v místě experimentu:

$$j_{\bar{\nu}_e} = \frac{R_{\bar{\nu}_e}}{4\pi\ell^2} \doteq 3,18 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (\text{A.23})$$

kde $R_{\bar{\nu}_e} = 10^{21} \text{ s}^{-1}$, dle zadání.

- Vzhledem k tomu, že střední volná dráha protonu v předchozí části by vyšla v jednotkách či desítkách metrů, pro interakci elektronového antineutrína s účinným průřezem o více jak 15 řádů menším bude zcela oprávněné považovat bublinovou komoru za tenký terč. Pro počet interakcí elektronového antineutrína na protonu za čas $t = 1$ y pak platí¹⁵

$$N_{\text{IBD}} = N_p j_{\bar{\nu}_e} \sigma_{\bar{\nu}_e p} t, \quad (\text{A.24})$$

kde N_p je počet protonů v bublinové komoře o délce hrany $a = 2 \text{ m}$ a objemu $V = a^3$, odpovídající celkové hmotě m vodíku, který pak určíme jako

$$N_p = 2 \frac{m N_A}{M_{\text{H}_2}} = 2 \frac{V \rho_{\text{H}_2} N_A}{M_{\text{H}_2}} = 2 \frac{a^3 \rho_{\text{H}_2} N_A}{M_{\text{H}_2}} \doteq 3,0 \cdot 10^{29}. \quad (\text{A.25})$$

- Pro počet N_{IBD} IBD interakcí za 1 rok tak dostáváme, po dosazení (A.23) a (A.25) do (A.24), vztah

$$N_{\text{IBD}} = \frac{a^3 \rho_{\text{H}_2} N_A R_{\bar{\nu}_e} \sigma_{\bar{\nu}_e p} t}{2\pi\ell^2 M_{\text{H}_2}} \doteq 1,2 \cdot 10^4.$$

¹⁵Reakci $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ se říká inverzní β -rozpad, anglicky inverse beta decay, zkráceně IBD — což je důvod tohoto dolního indexu ve vztahu (A.24).

Rozpad částice X (8 bodů)

Neznámá částice X se za letu rozpadá na proton a záporně nabitý pion, $X \rightarrow p + \pi^-$, které vyletují symetricky, přičemž směry jejich letů svírají úhel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ a jejich velikosti hybností jsou $p_p c = p_\pi c = 118 \text{ MeV}$. Klidové energie protonu a pionu jsou $m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$ a $m_\pi c^2 = 139,6 \text{ MeV}$.

- (3b) Určete klidovou energii částice X .
- (2b) Určete rychlost částice X .
- (2b) Určete kinetickou energii částice X .

Uvažujme urychlovač, na kterém se v režimu vstřícných svazků srážejí elektrony s pozitrony (tj. hybnosti těchto částic mají stejnou velikost, ale jejich vektory se liší znaménkem). Klidová energie elektronu, resp. pozitronu, je $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$.

- (1b) Určete kinetickou energii elektronu, resp. pozitronu, potřebnou k uskutečnění prahového procesu

$$e^+ + e^- \rightarrow X + X.$$

Řešení

- Položme $c = 1$. Označme čtyřhybnost rozpadající se částice X jako $P_X = (E_X, \mathbf{p}_X)$ a čtyřhybnosti vzniknuvšího protonu a pionu jako $P_p = (E_p, \mathbf{p}_p)$ a $P_\pi = (E_\pi, \mathbf{p}_\pi)$. Ze zadání víme, že vektory hybností \mathbf{p}_p a \mathbf{p}_π , jejichž velikosti jsou stejné, svírají úhel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.
– Zákon zachování čtyřhybnosti napíšeme ve tvaru

$$P_X^2 = (P_p + P_\pi)^2. \quad (\text{A.26})$$

- Na levé straně rovnice (A.26) máme, dle relativistického vztah energie–hybnost, jednoduše

$$P_X^2 = (E_X, \mathbf{p}_X)^2 = E_X^2 - p_X^2 = m_X^2. \quad (\text{A.27})$$

- Na pravé straně rovnice (A.26) pak máme

$$\begin{aligned} (P_p + P_\pi)^2 &= (E_p + E_\pi)^2 - (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\pi)^2 \\ &= (E_p^2 + 2E_p E_\pi + E_\pi^2) - (p_p^2 + 2\mathbf{p}_p \cdot \mathbf{p}_\pi + p_\pi^2) \\ &= (E_p^2 + 2E_p E_\pi + E_\pi^2) - (p_p^2 + 2p_p p_\pi \cos \vartheta + p_\pi^2) \\ &= (E_p^2 - p_p^2) + (E_\pi^2 - p_\pi^2) + 2E_p E_\pi - 2p_p p_\pi \cos \vartheta. \end{aligned}$$

- Jelikož, dle zadání, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, pak $\cos \vartheta = 0$, a tedy

$$(P_p + P_\pi)^2 = m_p^2 + m_\pi^2 + 2E_p E_\pi. \quad (\text{A.28})$$

- Uvědomme si, že dle zadání neznáme celkové energie protonu a pionu. Použijeme tak opět relativistický vztah energie–hybnost, který nám umožní vyjádřit zmíněné energie pomocí příslušných hybností a klidových energií, které známe. Předchozí vztah (A.28) pak dává

$$(P_p + P_\pi)^2 = m_p^2 + m_\pi^2 + 2\sqrt{m_p^2 + p_p^2}\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}. \quad (\text{A.29})$$

- Porovnáním obou stran rovnice (A.26), tj. porovnáním (A.27) a (A.29), pak máme pro klidovou energii částice X

$$m_X = \sqrt{m_p^2 + m_\pi^2 + 2\sqrt{m_p^2 + p_p^2}\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}} \doteq 1116,1 \text{ MeV}.$$

- b) – Zákon zachování hybnosti říká, že

$$\mathbf{p}_X = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\pi.$$

Umocnění předchozího vztahu na druhou a užití toho, že úhel mezi vektory hybností \mathbf{p}_p a \mathbf{p}_π je $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dává

$$p_X^2 = p_p^2 + p_\pi^2. \quad (\text{A.30})$$

- Pro velikost redukované rychlosti β_X částice X platí

$$\beta_X = \frac{p_X}{E_X} = \frac{p_X}{\sqrt{m_X^2 + p_X^2}}, \quad (\text{A.31})$$

kde jsme dosadili za celkovou energii E_X částice X dle vztahu (A.27).

- Užitím vztahu (A.30) a jeho dosazením do (A.31) pak máme

$$\beta_X = \frac{\sqrt{p_p^2 + p_\pi^2}}{\sqrt{m_X^2 + p_p^2 + p_\pi^2}} \doteq 0,15,$$

a tedy pro velikost rychlosti v_X částice X platí

$$v_X = \beta_X c \doteq 4,5 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- c) – Celková energie E_X částice X je dána součtem její klidové a kinetické energie:

$$E_X = m_X + T_X.$$

- Porovnáním tohoto výrazu se vztahem (A.27) dostaneme kinetickou energii T_X částice X ve tvaru

$$T_X = \sqrt{m_X^2 + p_X^2} - m_X.$$

- Konečně, užitím vztahu (A.30), dostaneme

$$T_X = \sqrt{m_X^2 + p_p^2 + p_\pi^2} - m_X \doteq 12,4 \text{ MeV}.$$

- d) – Sráželi-li se částice se svou antičásticí v režimu vstřícných svazků, tj. v našem případě elektron s pozitronem, pak vektory hybností těchto částic mají stejnou velikost, ale liší se znaménkem. Z relativistického vztahu energie–hybnost (vzpo-
meňme, že klidové energie částice a její antičástice jsou identické) pak plyne, že celkové energie obou částic jsou stejné.
- Označme tak celkovou čtyř-hybnost počátečního stavu prahového procesu $e^+ + e^- \rightarrow X + X$ v laboratorní soustavě jako $P_i = (2E_{e,t}, \mathbf{0})$, kde $E_{e,t}$ je celková prahová energie elektronu, resp. pozitronu, pro kterou platí, že je dána součtem klidové a prahové kinetické energie elektronu, resp. pozitronu, tj. $E_{e,t} = m_e + T_{e,t}$. Dále, označme čtyř-hybnost koncového stavu tohoto procesu v těžiškové soustavě vzniknuvších částic jako $P_f = (2m_X, \mathbf{0})$, kde jsme využili toho, že při prahovém procesu je celková hybnost těchto částic v jejich těžiškové soustavě nulová.
- Zákon zachování čtyř-hybnosti

$$P_i^2 = P_f^2$$

pak jednoduše říká, že celková prahová energie elektronu, resp. pozitronu, je

$$E_{e,t} = m_X,$$

takže odpovídající prahová kinetická energie je

$$T_{e,t} = m_X - m_e \doteq 1115,6 \text{ MeV}.$$

A.4 Termín č. 4 (27. 1. 2021)

Termální výkon jaderné elektrárny (6 bodů)

Ve vzdálenosti $\ell = 5 \text{ km}$ od jaderné elektrárny se nachází neutrinový detektor tvořený 6,5 tunami lineárního alkylbenzenu (zkráceně LAB, jehož sumární vzorec je $\text{C}_{20}\text{H}_{34}$). Denně bylo zaznamenáno 10 interakcí neutrina na volném protonu, tj. na jádře vodíku.

Určete termální výkon dané elektrárny (v GW, tj. v gigawattech) za předpokladu, že účinný průřez dané interakce je $\sigma_{\bar{\nu}_e p} = 4 \cdot 10^{-46} \text{ m}^2$ a při štěpení jednoho atomu ^{235}U se uvolní 200 MeV tepelné energie a 6 elektronových antineutrin.

Avogadrova konstanta je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Molární hmotnosti vodíku a uhlíku jsou popořadě $M_H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ a $M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Oscilace neutrin ani příspěvek štěpení jiných izotopů než ^{235}U neuvažujte.

Řešení

- Spočítejme nejprve počet jader vodíku, tj. protonů, v našem detektoru. Platí

$$N_p = 34 \frac{m_{\text{LAB}} N_A}{M_{\text{LAB}}} \doteq 4,86 \cdot 10^{29},$$

kde $m_{\text{LAB}} = 6,5 \text{ t} = 6,5 \cdot 10^6 \text{ g}$ je hmotnost detektoru, $M_{\text{LAB}} = (20 \times 12 + 34 \times 1) \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 274 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost lineárního alkylbenzenu a kde jsme rovněž zohlednili fakt, že v jedné molekule LAB je 34 atomů vodíku.

- Jelikož je účinný průřez interakce antineutrína na protonu velmi malý (střední volná dráha tohoto antineutrína je velmi velká ve srovnání s předpokládanou velikostí detektoru), platí pro počet interakcí N_{int} vztah

$$N_{\text{int}} = \sigma_{\bar{\nu}_e p} j_{\bar{\nu}_e} t N_p = 10,$$

kde $j_{\bar{\nu}_e}$ je dosud neznámá hustota toku antineutrín a $t = 1 \text{ d} = 86400 \text{ s}$.

- Z předchozího vztahu tak tuto hustotu toku vyjádříme jako

$$j_{\bar{\nu}_e} = \frac{N_{\text{int}}}{\sigma_{\bar{\nu}_e p} t N_p} \doteq 5,96 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Pro hustotu toku antineutrín $j_{\bar{\nu}_e}$ ve vzdálenosti ℓ od jejich zdroje, tj. v místě detektoru, rovněž platí známý vztah

$$j_{\bar{\nu}_e} = \frac{R_{\bar{\nu}_e}}{4\pi\ell^2}, \quad (\text{A.32})$$

kde $R_{\bar{\nu}_e}$ je počet antineutrín vyprodukovaný elektrárnou za jednotku času.

- Dle vztahu (A.32) tedy máme

$$R_{\bar{\nu}_e} = 4\pi\ell^2 j_{\bar{\nu}_e} \doteq 1,87 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}.$$

- Víme, že každému rozpadem vzniknuvšímu antineutrínu odpovídá šestina z 200 MeV, tj. přibližně $E_{\bar{\nu}_e} \doteq 33,3 \text{ MeV}$ tepelné energie. Termální výkon elektrárny je tak, za pomoci výše uvedených vztahů, určen jako

$$P_t = E_{\bar{\nu}_e} R_{\bar{\nu}_e} = \frac{2\pi\ell^2 E_{\bar{\nu}_e} N_{\text{int}} M_{\text{LAB}}}{17 m_{\text{LAB}} N_A \sigma_{\bar{\nu}_e p} t} \doteq 6,24 \cdot 10^{27} \text{ eV} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 1 \text{ GW}.$$

Sféra z ^{239}Pu (6 bodů)

Radionuklid ^{239}Pu je α -radioaktivní. Částice α jsou emitovány s kinetickou energií $E_\alpha = 5,144 \text{ MeV}$. Když je sféra z ^{239}Pu o hmotnosti $m = 120,06 \text{ g}$ vložena do kalorimetru s tekutým dusíkem, molekuly dusíku se začnou vypařovat. Za jednotku času se vypaří stejné množství dusíku, jako kdybychom systému dodali elektrickou energii o výkonu $0,231 \text{ W}$.

Kilomolová hmotnost radionuklidu ^{239}Pu je $M_{(^{239}\text{Pu})} = 239 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ a Avogadrova konstanta je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

- (3b) Určete poločas rozpadu ^{239}Pu .
- (3b) Určete, za jak dlouho klesne množství vypařeného dusíku za jednotku času natolik, že bude odpovídat dodání elektrické energie o výkonu $0,1 \text{ W}$.

Řešení

- a) – Výkon zaregistrovaných rozpadů radionuklidu ^{239}Pu je

$$P_{(^{239}\text{Pu})} = 0,231 \text{ W} = 0,231 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 1,44 \cdot 10^{18} \text{ eV} \cdot \text{s}^{-1},$$

kde jsme využili toho, že $1 \text{ eV} \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

- Při rozpadu radionuklidu ^{239}Pu se uvolní kinetická energie α -částice ve výši $E_\alpha = 5,144 \text{ MeV}$. Proto aktivita tohoto radionuklidu, tj. počet jeho rozpadů za jednotku času, je

$$A_{(^{239}\text{Pu})} = \frac{P_{(^{239}\text{Pu})}}{E_\alpha} \doteq 2,81 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}.$$

- Potřebujeme rovněž určit, kolik jader ^{239}Pu se nacházelo ve sféře, kterou jsme vložili do kalorimetru. Pro tento počet jader platí

$$N_{(^{239}\text{Pu})} = \frac{mN_A}{M_{(^{239}\text{Pu})}} \doteq 3,03 \cdot 10^{23}.$$

- Jednoduše potom využijeme vztahu pro aktivitu, tj. $A_{(^{239}\text{Pu})} = \lambda_{(^{239}\text{Pu})} \cdot N_{(^{239}\text{Pu})}$, kde $\lambda_{(^{239}\text{Pu})}$ je rozpadová konstanta radionuklidu ^{239}Pu , přičemž $\lambda_{(^{239}\text{Pu})} = \ln 2 / T_{1/2, (^{239}\text{Pu})}$, takže pro poločasu rozpadu $T_{1/2, (^{239}\text{Pu})}$ tohoto radionuklidu platí

$$T_{1/2, (^{239}\text{Pu})} = \frac{N_{(^{239}\text{Pu})} \ln 2}{A_{(^{239}\text{Pu})}} \doteq 23\,700 \text{ y}.$$

- b) – Výkon zaregistrovaných rozpadů ^{239}Pu klesl na hodnotu

$$P'_{(^{239}\text{Pu})} = 0,1 \text{ W} = 0,1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 6,24 \cdot 10^{17} \text{ eV} \cdot \text{s}^{-1},$$

čemuž odpovídá aktivita radionuklidu

$$A'_{(^{239}\text{Pu})} = \frac{P'_{(^{239}\text{Pu})}}{E_\alpha} \doteq 1,21 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}.$$

- Aktivita klesá s časem exponenciálně jako $A(t) = A_0 e^{-\lambda_{(^{239}\text{Pu})} t}$, kde A_0 je počáteční aktivita. Čas, za který aktivita radionuklidu klesne z původní hodnoty $A_{(^{239}\text{Pu})}$ na hodnotu $A'_{(^{239}\text{Pu})}$ je tak

$$t' = \ln \left(\frac{A}{A'} \right) \frac{T_{1/2, (^{239}\text{Pu})}}{\ln 2} \doteq 29\,000 \text{ y}.$$

Rozpad neutrálního pionu (8 bodů)

Uvažujme neutrální pion π^0 o velikosti hybnosti $p_\pi c = 250 \text{ MeV}$, klidové energii $m_\pi c^2 = 135 \text{ MeV}$ a vlastní střední době života $\tau_\pi = 8,4 \cdot 10^{-17} \text{ s}$, který se rozpadá za letu na dvě γ -kvanta, přičemž obě mají stejnou energii E_γ . V soustavě, ve které rozpad pozorujeme, určete:

- (1b) kinetickou energii pionu,
- (1b) velikost rychlosti pionu,
- (2b) střední dráhu, kterou pion uletí,
- (1b) velikost hybnosti každého γ -kvanta,
- (3b) pod jakým úhlem vylétá γ -kvantum vzhledem ke směru letu pionu.

Řešení

- a) – Položme $c = 1$. Mezi celkovou energií E_π pionu, o klidové hmotnosti m_π , a jeho hybností p_π platí relativistický vztah

$$E_\pi^2 = m_\pi^2 + p_\pi^2. \quad (\text{A.33})$$

- Jelikož je celková energie rovna součtu klidové a kinetické energie T_π ,

$$E_\pi = m_\pi + T_\pi, \quad (\text{A.34})$$

můžeme ze vztahu (A.33) vyjádřit hledanou kinetickou energii jako

$$T_\pi = \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} - m_\pi \doteq 149 \text{ MeV}. \quad (\text{A.35})$$

- b) – Pro redukovanou rychlost β_π pionu platí

$$\beta_\pi = \frac{p_\pi}{E_\pi}. \quad (\text{A.36})$$

- Dosazením (A.35) do (A.34) a poté do (A.36) tak máme

$$\beta_\pi = \frac{p_\pi}{\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}} \doteq 0,88.$$

- Pro velikost rychlosti v_π pionu pak platí

$$v_\pi = \beta_\pi c \doteq 2,64 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- c) – V soustavě, ve které rozpad pozorujeme, bude doba života t_π pionu dána jako

$$t_\pi = \gamma_\pi \tau_\pi,$$

kde

$$\gamma_\pi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_\pi^2}}$$

je relativistický Lorentzův faktor.

- Střední dráha ℓ , kterou pion urazí v soustavě, kde rozpad pozorujeme, je rovna

$$\ell = v_\pi t_\pi = \beta_\pi \gamma_\pi c \tau_\pi = \frac{\beta_\pi}{\sqrt{1 - \beta_\pi^2}} c \tau_\pi = \frac{\frac{p_\pi c}{E_\pi}}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_\pi c}{E_\pi}\right)^2}} c \tau_\pi = \frac{p_\pi c}{\sqrt{E_\pi^2 - p_\pi^2 c^2}} c \tau_\pi,$$

kde jsme postupně dosadili dle vztahů výše, přičemž užitím vztahu (A.33) dostaneme

$$\ell = \frac{p_\pi c}{m_\pi c^2} c \tau_\pi \doteq 47 \text{ nm}.$$

- d) – Připomeňme, že obě γ -kvanta, vznikající rozpadem pionu o celkové energii E_π , mají stejnou energii E_γ . Zákon zachování energie tak dává

$$E_\pi = 2E_\gamma = 2p_\gamma, \quad (\text{A.37})$$

kde jsme využili faktu, že γ -kvanta jsou nehmotná, takže obdoba relativistického vztahu (A.33) říká, že $E_\gamma = p_\gamma$, což znamená, že obě γ -kvanta mají také stejnou velikost hybnosti p_γ .

- Ze vztahu (A.37), po dosazení dle (A.33), pak pro velikost hybnosti každého z γ -kvant máme

$$p_\gamma = \frac{E_\pi}{2} = \frac{\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}}{2} \doteq 142 \text{ MeV}.$$

- e) – Dle zadání mají obě vzniknuvší γ -kvanta stejné energie, což znamená, že vyletují symetricky vůči původnímu směru letu pionu. Označme úhel, který svírá směr letu jednoho z γ -kvant s původním směrem letu pionu jako α . Jinými slovy, úhel mezi oběma směry letu těchto γ -kvant je 2α .
- Dále, označme čtyř-hybnost rozpadajícího se pionu v laboratorní soustavě jako $P_\pi = (E_\pi, \mathbf{p}_\pi)$ a čtyř-hybnosti obou γ -kvant v této soustavě jako $P_1 = (E_\gamma, \mathbf{p}_1)$ a $P_2 = (E_\gamma, \mathbf{p}_2)$. Jelikož γ -kvanta letí do jiných směrů, vektory jejich hybností jsme očíslovali kvůli explicitnímu znázornění toho, že nejde o stejné vektory, ačkoliv jejich velikosti jsou stejné, viz diskuse v bodě d). V souladu s označením ve vztahu (A.37) tak pro velikosti těchto hybností píšeme $p_1 = p_2 \equiv p_\gamma$.
 - Zákon zachování čtyř-hybnosti je dán jako

$$P_\pi^2 = (P_1 + P_2)^2, \quad (\text{A.38})$$

přičemž levou stranu rovnice (A.38) upravíme dle (A.33) jako

$$P_\pi^2 = E_\pi^2 - p_\pi^2 = m_\pi^2, \quad (\text{A.39})$$

přičemž pro pravou stranu rovnice (A.38) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
 (P_1 + P_2)^2 &= 4E_\gamma^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\
 &= 4E_\gamma^2 - (p_1^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + p_2^2) \\
 &= 4E_\gamma^2 - (p_1^2 + 2p_1 p_2 \cos 2\alpha + p_2^2) \\
 &= 4E_\gamma^2 - 2p_\gamma^2(1 + \cos 2\alpha) \\
 &= 4E_\gamma^2 - 2E_\gamma^2(1 + \cos 2\alpha) \\
 &= 2E_\gamma^2(1 - \cos 2\alpha). \tag{A.40}
 \end{aligned}$$

– Porovnáním (A.39) a (A.40) pak máme, dle (A.37),

$$\cos 2\alpha = 1 - \frac{m_\pi^2}{2E_\gamma^2} = 1 - \frac{2m_\pi^2}{m_\pi^2 + p_\pi^2},$$

a tedy pro úhel, pod kterým vylétá γ -kvantum vzhledem ke směru letu pionu, máme

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos \left(1 - \frac{2m_\pi^2}{m_\pi^2 + p_\pi^2} \right) \doteq 28,4^\circ.$$

A.5 Termín č. 5 (9. 2. 2021)

Rozpad pionu (6 bodů)

Uvažujme neutrální pion π^0 , rozpadající se za letu na dvě γ -kvanta, která mají v laboratorním systému stejnou celkovou energii E_γ a rozlétají se pod úhlem $\alpha = \frac{\pi}{2}$. V této soustavě určete:

- (2b) celkovou energii pionu,
- (2b) velikost rychlosti pionu,
- (2b) velikost příčné (transverzální) a podélné (longitudinální) hybnosti γ -kvanta.

Řešení

- V laboratorní soustavě označme čtyř-hybnost rozpadajícího se pionu, o celkové energii E_π a hybnosti \mathbf{p}_π , jako $P_\pi = (E_\pi, \mathbf{p}_\pi)$. Podobně запиšme v této soustavě čtyř-hybnosti obou γ -kvant jako $P_1 = (E_\gamma, \mathbf{p}_1)$ a $P_2 = (E_\gamma, \mathbf{p}_2)$, kde jsme využili faktu ze zadání, že celkové energie obou γ -kvant jsou stejné.
- Jelikož jsou γ -kvanta nehmotná, z relativistického vztahu energie–hybnost plyne, že $E_\gamma = p_1$ a $E_\gamma = p_2$. Tedy, velikosti hybností těchto γ -kvant jsou stejné, ačkoliv jejich hybnosti, jakožto vektorové veličiny, jsou různé, jelikož γ -kvanta vyletují do různých směrů. Pro jednoduchost zápisu tak označme $p_1 = p_2 \equiv p_\gamma$.

- Zákon zachování čtyř-hybnosti zapišme ve tvaru

$$P_\pi^2 = (P_1 + P_2)^2, \quad (\text{A.41})$$

kde pro levou stranu rovnice (A.41) platí, dle relativistického vztahu energie–hybnost, že

$$P_\pi^2 = E_\pi^2 - p_\pi^2 = m_\pi^2, \quad (\text{A.42})$$

zatímco pro pravou stranu rovnice (A.41) máme, po drobných úpravách,

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)^2 &= (2E_\gamma)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= (2E_\gamma)^2 - 2p_\gamma^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \\ &= 2E_\gamma^2 + 2(E_\gamma^2 - p_\gamma^2) - 2p_\gamma^2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

kde jsme úhel mezi směry letu γ -kvant v laboratorním systému označili jako α , dle zadání.

- Jelikož druhý člen ve vztahu (A.43) vymizí kvůli nulové hmotnosti γ -kvanta a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, pak

$$(P_1 + P_2)^2 = 2E_\gamma^2. \quad (\text{A.44})$$

- Porovnáním (A.42) a (A.44) pak pro celkovou energii γ -kvanta plyne

$$E_\gamma = \frac{m_\pi}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.45})$$

- Naším úkolem je ovšem určit celkovou energii pionu, tj. E_π . Vzpomeňme tak na zákon zachování energie, který je de facto zapsán v časupodobné složce zákona zachování čtyřhybnosti (A.41). Ten nám totiž říká, že

$$E_\pi = 2E_\gamma. \quad (\text{A.46})$$

- Ze vztahů (A.45) a (A.46) pak pro hledanou celkovou energii pionu platí

$$\boxed{E_\pi = \sqrt{2}m_\pi.} \quad (\text{A.47})$$

- b) – Známe-li celkovou energii pionu (A.47), určit velikost jeho rychlosti je triviální záležitostí, a to opět díky relativistickému vztahu energie–hybnost. Pro velikost redukované rychlosti β_π pionu platí

$$\beta_\pi = \frac{p_\pi}{E_\pi} = \frac{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}}{E_\pi} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_\pi}\right)^2}.$$

- Dosazením dle (A.47) vyjde, že $\beta_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tedy, pro velikost rychlosti v_π pionu máme

$$\boxed{v_\pi = \beta_\pi c \doteq 2,12 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.}$$

- c) – Příčná p_γ^\perp a podélná p_γ^\parallel projekce velikosti hybnosti γ -kvanta jsou projekcemi do původního směru letu pionu, který se směrem letu γ -kvanta svírá úhel $\frac{\alpha}{2}$. Z jednoduché geometrie trojúhelníku tak máme

$$p_\gamma^\perp = p_\gamma \sin \frac{\alpha}{2} = p_\gamma \sin \frac{\pi}{4} = \frac{p_\gamma}{\sqrt{2}},$$

$$p_\gamma^\parallel = p_\gamma \cos \frac{\alpha}{2} = p_\gamma \cos \frac{\pi}{4} = \frac{p_\gamma}{\sqrt{2}},$$

a tedy, s využitím vztahu (A.45) v posledním kroku,

$$p_\gamma^\perp = p_\gamma^\parallel = \frac{p_\gamma}{\sqrt{2}} = \frac{E_\gamma}{\sqrt{2}} = \frac{m_\pi}{2}.$$

Rutherfordův rozptyl (7 bodů)

Uvažujme Rutherfordův rozptyl α -částice, o kinetické energii $T_\alpha = 12 \text{ MeV}$, na jádře stříbra ${}_{47}\text{Ag}$, které je v klidu.

- a) (3b) Určete diferenciální účinný průřez rozptylu, je-li úhel rozptylu $\vartheta = 20^\circ$.
b) (4b) Určete účinný průřez rozptylu do úhlů větších než 20° .

Řešení

- a) – Označme náboje α -částice a jádra stříbra jako $Z_\alpha = 2$ a $Z_{\text{Ag}} = 47$, přičemž α -částice o kinetické energii $T_\alpha = 12 \text{ MeV}$ se rozptyluje do úhlu $\vartheta = 20^\circ$. Pro diferenciální účinný průřez Rutherfordova rozptylu pak platí

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \left(\frac{\alpha \hbar c Z_\alpha Z_{\text{Ag}}}{4T_\alpha} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}, \quad (\text{A.48})$$

kde $\alpha \doteq \frac{1}{137}$ je konstanta jemné struktury a $\hbar c \doteq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$.

- Pro další zjednodušení výpočtů označme a vyčíslíme ve vztahu (A.48) konstantní faktor nezáviselý na úhlu rozptylu. Pišme tak

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \frac{K}{2\pi} \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}, \quad (\text{A.49})$$

kde

$$\frac{K}{2\pi} \equiv \left(\frac{\alpha \hbar c Z_\alpha Z_{\text{Ag}}}{4T_\alpha} \right)^2 \doteq 7,9 \text{ fm}^2.$$

- Po dosazení za úhel rozptylu $\vartheta = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ pak máme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta = \frac{\pi}{9}) = \frac{K}{2\pi} \sin^{-4} \frac{\pi}{18} \doteq 8,7 \cdot 10^3 \text{ fm}^2 = 87 \text{ b},$$

kde jsme využili toho, že $1 \text{ b} = 10^2 \text{ fm}^2$.

- b) – Ve vztahu (A.48) symbol $d\Omega$ značí element prostorového úhlu, pro něj ve vhodně zvolených sférických souřadnicích platí $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\phi$, kde $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ je rozptylový úhel a $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je azimutální úhel.
- Určení účinného průřezu rozptylu do úhlů větších než 20° pak neznamená nic jiného, než vyintegrovat vztah (A.49) přes prostorový úhel, v rámci čehož integrace přes rozptylový úhel ϑ musí být provedena v mezích $\vartheta \in (20^\circ, 180^\circ)$, tj. přes $\vartheta \in (\frac{\pi}{9}, \pi)$. Máme tak

$$\sigma = \frac{K}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta d\phi = K \int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta,$$

kde jsme využili faktu, že Rutherfordův rozptyl na azimutálním úhlu ϕ nezávisí.

- Provést integraci je jednoduchou záležitostí. Užitím vztahu $\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$ máme

$$\sigma = 2K \int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}} d\vartheta = \left| \begin{array}{l} \sin\frac{\vartheta}{2} \equiv t \\ \cos\frac{\vartheta}{2} d\vartheta \equiv 2 dt \end{array} \right| = 4K \int_{\sin\frac{\pi}{18}}^{\sin\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^3} = -2K \left[\frac{1}{t^2} \right]_{\sin\frac{\pi}{18}}^{\sin\frac{\pi}{2}},$$

a účinný průřez rozptylu do úhlů větších než 20° je tedy

$$\sigma = 2K \left(\sin^{-2} \frac{\pi}{18} - \sin^{-2} \frac{\pi}{2} \right) \doteq 32b.$$

Vzorek z cesia (7 bodů)

Mějme vzorek tvořený stejným látkovým množstvím izotopu ^{134}Cs , s poločasem rozpadu $T_{1/2, (134\text{Cs})} = 2\text{ y}$, a ^{137}Cs , s poločasem rozpadu $T_{1/2, (137\text{Cs})} = 30\text{ y}$. Určete, za jakou dobu bude aktivita ^{134}Cs právě 1000-krát nižší než aktivita ^{137}Cs .

Řešení

- Obecně, pro aktivitu A_X izotopu X platí

$$A_X(t) = \lambda_X N_X(t) = \lambda_X N_{X,0} e^{-\lambda_X t} = \frac{\ln 2}{T_{1/2, X}} N_{X,0} \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2, X}}\right),$$

kde λ_X je rozpadová konstanta tohoto izotopu, a kde jsme popořadě využili exponenciálního rozpadového zákona a vztahu mezi rozpadovou konstantou a poločasem rozpadu.

- Na počátku máme $N_{(134\text{Cs}),0}$ atomů ^{134}Cs a $N_{137\text{Cs},0}$ atomů ^{137}Cs , přičemž dle zadání platí $N_{(134\text{Cs}),0} = N_{137\text{Cs},0}$.

- Čas t_q , který bude trvat, než aktivity dosáhnou požadovaného poměru $q = 1000$, je dán vztahem

$$\begin{aligned}
q &= \frac{A_{(^{137}\text{Cs})}(t_q)}{A_{(^{134}\text{Cs})}(t_q)} \\
&= \frac{\frac{\ln 2}{T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}} N_{(^{137}\text{Cs}), 0} \exp\left(-\frac{t_q \ln 2}{T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}}\right)}{\frac{\ln 2}{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})}} N_{(^{134}\text{Cs}), 0} \exp\left(-\frac{t_q \ln 2}{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})}}\right)} \\
&= \frac{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})}}{T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}} \frac{\exp\left(-\frac{t_q \ln 2}{T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}}\right)}{\exp\left(-\frac{t_q \ln 2}{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})}}\right)} \\
&= \frac{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})}}{T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}} \exp\left(-t_q \frac{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})} - T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}}{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})} T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}} \ln 2\right). \tag{A.50}
\end{aligned}$$

- Ze vztahu (A.50) pak vyjádříme hledaný čas t_q jako

$$t_q = \frac{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})} T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}}{T_{1/2, (^{137}\text{Cs})} - T_{1/2, (^{134}\text{Cs})}} \frac{\ln\left(q \frac{T_{1/2, (^{137}\text{Cs})}}{T_{1/2, (^{134}\text{Cs})}}\right)}{\ln 2} \doteq 29,7 \text{ y}.$$

B Domácí úkoly (2020/2021)

V této kapitole jsou uvedeny všechny domácí úkoly, které byly zadány posluchačům předmětu Fyzika V v rámci distanční výuky během akademického roku 2020/21. Tomu také odpovídá pořadí, ve kterém byly tyto úkoly zadávány.

Pro úplnost je třeba zmínit, že obtížnost domácích úkolů byla obecně vyšší než obtížnost zápočtových písemných prací, a to proto, že na vypracování domácího úkolu bylo 14 dní a posluchači měli možnost svá řešení mezi sebou diskutovat.

Tak jako tomu bylo při zápočtových písemných prací v minulé kapitole, na zadávání domácích úkolů se podíleli všichni tři tehdejší cvičící. U každého níže uvedeného domácího úkolu je tak v poznámce pod čarou uveden konkrétní hlavní autor zadání a vzorového řešení.

B.1 Neutronová hvězda¹⁶

Uvažujme homogenní sférickou neutronovou hvězdu o poloměru $R = 10$ km, jejíž hustota je totožná s hustotou ρ_N atomového jádra. Účinný průřez $\sigma_{\nu N}$ rozptylu neutrina na nukleonu je při odpovídající energii neutrina $\sigma_{\nu N} = 10^{-45} \text{ m}^2$. Rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Určete hustotu hmotnosti atomového jádra. Klidové energie protonu a neutronu považujte za stejné, $m_p c^2 \approx m_n c^2 \doteq 1 \text{ GeV}$.
- Určete střední volnou dráhu neutrina v neutronové hvězdě.
- Určete dobu, kterou přibližně trvá neutrinu doputovat z centra neutronové hvězdy na její povrch. Neutrino považujte za nehmotné a tudíž pohybující se rychlostí světla. Rozptyl neutrina na nukleonu považujte za izotropní (tj. pravděpodobnost rozptylu do určitého směru je stejná jako pravděpodobnost rozptylu do kteréhokoli jiného směru).

Nápověda: Nebudete-li si vědět rady s bodem c), zkuste se náhodně projít :)

Řešení

- Představme si libovolné jádro ${}^A_Z X$ jako kouli tvořenou A nukleony, tj. Z protony a $A - Z$ neutrony. Ve shodě se zadáním předpokládejme dále, že protony a neutrony mají přibližně stejnou klidovou energii, $m_p c^2 \approx m_n c^2 \equiv m_N c^2$, přičemž $m_N c^2 \doteq 1 \text{ GeV}$. Zanedbáme-li vazbovou energii jádra, celková klidová hmotnost jádra je dána součtem hmot všech nukleonů, tedy $A m_N$.
 - Z přednášky víme, že poloměr r jádra roste s počtem nukleonů jako $A^{1/3}$, konkrétně $r = r_0 A^{1/3}$, kde $r_0 \doteq 1.2 \text{ fm}$ je empirický parametr.

¹⁶Autor: Tomáš Kadavý.

- Pro hustotu, přesněji pro hustotu hmotnosti, ρ_N atomového jádra pak platí, že je dána jako poměr hmotnosti jádra vůči jeho objemu, tj.

$$\rho_N = \frac{A m_N}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{A m_N}{\frac{4}{3}\pi (r_0 A^{1/3})^3} = \frac{3m_N}{4\pi r_0^3} \doteq 2,5 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad (\text{B.1})$$

kde $m_N = 1 \text{ GeV}/c^2 \doteq 1,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Vidíme tak, že hustota hmotnosti atomového jádra nezávisí na atomovém čísle A , a je tedy konstantní pro všechna jádra.

- b) – K určení střední volné dráhy neutrina v neutronové hvězdě musíme znát objemovou hustotu n_N nukleonů, tedy počet nukleonů vztažený na jednotku objemu. Využijeme-li pouze veličiny ze zadání a výsledek ze vztahu (B.1), objemovou hustotu nukleonů můžeme jednoduše stanovit jako

$$n_N = \frac{\rho_N}{m_N} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \doteq 1,4 \cdot 10^{44} \text{ m}^{-3}. \quad (\text{B.2})$$

- Pro střední volnou dráhu neutrina v neutronové hvězdě pak máme

$$\ell = \frac{1}{\sigma_{\nu N} n_N} = \frac{4\pi r_0^3}{3\sigma_{\nu N}} \doteq 7,1 \text{ m}. \quad (\text{B.3})$$

- c) – Neutrino se na dráze z centra neutronové hvězdy na její povrch průběžně rozptyluje na nukleonech, a to se střední volnou dráhou danou vztahem (B.3), přičemž tento rozptyl pokládáme za izotropní. To znamená, že neutrino ulétne střední volnou dráhu (B.3), rozptýlí se na nukleonu (do určitého směru, a to s takovou pravděpodobností, že pravděpodobnost rozptylu do kteréhokoli jiného směru je stejná), opět ulétne střední volnou dráhu, znovu se rozptýlí a tak stále dokola, dokud nedosáhne povrchu.
- Neutrino tedy při cestě neutronovou hvězdou na její povrch mění svou trajektorii podobně jako je tomu v případě tzv. náhodné procházky, odkud pak víme, že celkový počet změn trajektorie neutrina na jeho cestě (tj. celkový počet rozptylů) bude přibližně

$$N_0 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}\ell} \right)^2 = \left(\frac{3\sigma_{\nu N} R}{4\sqrt{2}\pi r_0^3} \right)^2 \doteq 9,5 \cdot 10^5, \quad (\text{B.4})$$

kde R je poloměr neutronové hvězdy, a tedy vzdálenost, kterou by neutrino muselo překonat z centra na povrch, pokud by k žádným rozptylům nedocházelo.

- Jinými slovy, vztah (B.4) říká, že přibližně právě tolik úseků o průměrné délce ℓ neutrino ulétne, než se dostane na povrch neutronové hvězdy. Tedy, celková dráha uletěná neutrinem v jejím objemu bude

$$L = N_0 \ell = \frac{R^2}{2\ell} = \frac{3\sigma_{\nu N} R^2}{8\pi r_0^3} \doteq 6,9 \cdot 10^6 \text{ m},$$

kterou ulétne za čas

$$t = \frac{L}{c} \doteq \frac{3\sigma_{\nu N} R^2}{8\pi c r_0^3} \doteq 0,023 \text{ s},$$

kde jsme využili skutečnosti, že neutrino považujeme za nehmotné, a tedy pohybující se rychlostí světla.

Poznámky

- b) – Není-li přechod od vztahu (B.1) k (B.2), tedy získání objemové hustoty ze vztahu pro hustotu hmotnosti právě vydělením hmotnosti nukleonu, intuitivně zřejmý, lze k němu dojít taktéž následující úvahou. Představme si, že hmotnost M neutronové hvězdy, o hustotě ρ_N a objemu V , je dána součtem hmotností m_N všech nukleonů, kterých je celkem N . Tedy, kromě vztahu $M = \rho_N V$, platí také $M = N m_N$, a tedy $\rho_N V = N m_N$. Objemová hustota nukleonů v neutronové hvězdě, tj. počet nukleonů v jednotkovém objemu, je pak dána jako poměr všech nukleonů ve hvězdě vůči celkovému objemu této hvězdy, tj. $n_N = \frac{N}{V} = \frac{\rho_N}{m_N}$, čímž jsme zreprodukovali vztah (B.2).
- Pokud se rozhodneme spočítat objemovou hustotu nukleonů tak jako na cvičení, potřebujeme dvě veličiny, a to Avogadrovu konstantu $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ a kilomolovou hmotnost nukleonové látky $M_{\text{mol}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$. Pro celkový počet nukleonů v neutronové hvězdě pak bude platit, že $N = \frac{M N_A}{M_{\text{mol}}}$, kde M je opět její hmotnost. Vydělením celkového počtu nukleonů celkovým objemem neutronové hvězdy pak skutečně dostaneme vztah pro objemovou hustotu ze cvičení, tj.

$$n_N = \frac{\rho_N N_A}{M_{\text{mol}}} \doteq 1,5 \cdot 10^{44} \text{ m}^{-3}, \quad (\text{B.5})$$

kde drobný numerický nesoulad s výsledkem (B.2) je způsobený přibližnými hodnotami zadaných veličin. Pro střední volnou dráhu neutrina pak, po dosazení hodnoty ze vztahu (B.5), dostaneme

$$\ell \doteq 6,7 \text{ m}.$$

- Pokud by konečný rozměr neutronové hvězdy nabádal k výpočtu střední volné dráhy neutrina pomocí její definice přes integrál (viz vztah (2.26), resp. (2.29)), integrace per partes by vedla ke vztahu

$$\ell = \frac{1}{\sigma_{\nu N} n_N} - \underbrace{\left(R + \frac{1}{\sigma_{\nu N} n_N} \right)}_{\doteq 10^4 \text{ m}} \underbrace{e^{-\sigma_{\nu N} n_N R}}_{= e^{-1400}}, \quad (\text{B.6})$$

$\doteq 0 \text{ m}$

kde druhý člen je opravdu zanedbatelný vůči prvnímu.¹⁷

¹⁷Pro úplnost uvedme, že $e^{-1400} \doteq 10^{-608}$.

- c) – Problém náhodné procházky je velmi známý, při bakalářském studiu však celkem opomínaný — až na Brownův pohyb, který je limitním případem náhodné procházky. Věnujme tak pár řádků argumentujících k platnosti vztahu pro počet jednotlivých kroků během náhodné procházky.

- Označme \mathbf{R} jako vektor mezi počátečním a koncovým bodem náhodné procházky. V našem případě je tak velikost tohoto vektoru rovna poloměru R neutronové hvězdy. Trajektorie neutrina stylem náhodné procházky se skládá z po sobě navazujících kroků \mathbf{r}_i , délky dané příslušnou hustotou pravděpodobnosti $\rho(x) = \sigma n e^{-\sigma n x}$ (viz vztah (2.28)) o střední volné dráze $\langle x \rangle = \ell$, přičemž $\langle x^2 \rangle = 2\ell^2$. Platí tak

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N_0} \mathbf{r}_i,$$

kde N_0 je celkový počet kroků. Dále, označme střední kvadratický průměr velikosti celkového vektoru \mathbf{R} jako $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$.

- Jelikož je uvažovaný rozptyl neutrina na nukleonech izotropní, je rozptyl neutrina do určitého směru stejně pravděpodobný jako rozptyl do kteréhokoliv jiného směru. Jinými slovy, jednotlivé kroky jsou vzájemně nezávislé, a pro kovarianci těchto kroků, s vektory \mathbf{r}_i a \mathbf{r}_k , platí

$$\text{Cov}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq k, \\ \text{Var}(\mathbf{r}_i) & \text{pro } i = k. \end{cases} \quad (\text{B.7a})$$

- Pro varianci vektoru \mathbf{r}_i platí, že $\text{Var}(\mathbf{r}_i) = \langle \mathbf{r}_i^2 \rangle - \langle \mathbf{r}_i \rangle^2$. Z důvodu izotropního rozptylu je však $\langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{0}$, a tedy v našem případě máme jednoduše

$$\text{Var}(\mathbf{r}_i) = \langle \mathbf{r}_i^2 \rangle = |\mathbf{r}_i|^2 = 2\ell^2.$$

Můžeme proto přepsat výběrový vztah (B.7a)-(B.7b) pomocí Kroneckerova δ -symbolu jako

$$\text{Cov}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = 2\ell^2 \delta_{ik}, \quad (\text{B.8})$$

kde $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ a $\delta_{ik} = 1$ pro $i = k$.

- Jelikož kovariance dvou vektorů \mathbf{r}_i a \mathbf{r}_k je obecně dána jako

$$\text{Cov}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k \rangle - \langle \mathbf{r}_i \rangle \cdot \langle \mathbf{r}_k \rangle,$$

porovnáním se vztahem (B.8) na základě výše uvedených argumentů plyne, že $\langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k \rangle = 2\ell^2 \delta_{ik}$.

- Máme tedy

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle R^2 \rangle} &= \sqrt{\langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \rangle} = \sqrt{\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N_0} \mathbf{r}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{N_0} \mathbf{r}_k \right) \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{k=1}^{N_0} \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k \rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{k=1}^{N_0} 2\ell^2 \delta_{ik}} = \sqrt{2} \ell \sqrt{\sum_{i=1}^{N_0} 1} = \sqrt{2N_0} \ell, \end{aligned}$$

odkud pak plyne hledaný vztah na levé straně rovnice (B.4), jelikož pro konstantní poloměr R neutronové hvězdy platí $\sqrt{\langle R^2 \rangle} = R$.

B.2 Slunce¹⁸

Předpokládejme, že Slunce bylo při svém vzniku složeno ze 70% své hmotnosti z jader vodíku (tj. z protonů) a ze 30% z jader helia (tj. z α -částic) a bylo svým složením homogenní v celém svém objemu.

Předpokládejme, že Slunce již od svého vzniku vyzařuje neustále konstantní výkon $P_{\odot} = 3,54 \cdot 10^{26}$ W, který je generován množstvím tzv. proton-protonových cyklů. Tento cyklus schematicky odpovídá interakci $4p + 2e^- \rightarrow \alpha + 2\nu_e + 6\gamma$, přičemž během jednoho cyklu se uvolní energie $Q_{pp} = 26,7$ MeV.

Uvažujme, že k proton-protonovým cyklům dochází jen v centrální části Slunce, která tvoří 10% jeho hmotnosti a je v současnosti složena ze 30% z jader vodíku a ze 70% z jader helia.

- Určete očekávanou hustotu toku solárních neutrin na povrchu Země, produkovaných ve Slunci v proton-protonovém cyklu. Předpokládejte, že neutrina jsou ze Slunce do prostoru vyzařována izotropně. Vzdálenost Země od Slunce je $D_{\odot} = 149,6 \cdot 10^6$ km.
- Určete současné stáří Slunce. Hmotnost Slunce je $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, klidové energie protonu a α -částice jsou $m_p c^2 = 938,3$ MeV a $m_{\alpha} c^2 = 3727,4$ MeV. Příspěvky klidových energií ostatních elementárních částic zanedbejte. Rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m \cdot s⁻¹.
- Určete, jaká relativní část z původní hmotnosti jader vodíku byla v proton-protonovém cyklu ve Slunci dosud přetavena na jádra helia.
- Určete maximální životnost Slunce.

Řešení

- Výkon P_{\odot} vyzařovaný Sluncem je generován množstvím proton-protonových cyklů, přičemž každý z nich přispívá energií Q_{pp} . Počet těchto cyklů za jednotku času je tak

$$N_{pp} = \frac{P_{\odot}}{Q_{pp}} \doteq 8,3 \cdot 10^{37} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{B.9})$$

kde je ovšem nutné neopomenout převedení jednotek. Jelikož jednotkou výkonu je watt, přičemž $\text{W} = \text{J} \cdot \text{s}^{-1}$, musíme převést MeV na J. Platí, že $Q_{pp} \doteq 4,3 \cdot 10^{-12}$ J.

¹⁸Autor: Tomáš Kadavý.

- Ze zadání víme, že každý proton-protonový cyklus produkuje dvě neutrina. Celkový počet neutrin vyzářených ze Slunce za jednotku času je tedy dvojnásobkem počtu těchto cyklů za jednotku času:

$$N_\nu = 2N_{pp} = \frac{2P_\odot}{Q_{pp}} \doteq 1,6 \cdot 10^{38} \text{ s}^{-1}.$$

- Vzdálenost D_\odot mezi Zemí a Sluncem je řádově větší, než je rozměr Slunce (pro úplnost uvedme, že poloměr Slunce je zhruba $7 \cdot 10^5$ km). Zcela jistě tak můžeme považovat Slunce za bodový zdroj. Předpoklad o izotropii vyzařování neutrin nás pak vede k tomu, že hustota toku solárních neutrin, vztažená na jednotku plochy a času ve vzdálenosti D_\odot od Slunce, je dána poměrem celkového počtu neutrin, vyzářených za jednotku času, vůči povrchu sféry o poloměru D_\odot , a tedy

$$j_\nu = \frac{N_\nu}{4\pi D_\odot^2} = \frac{P_\odot}{2\pi Q_{pp} D_\odot^2} \doteq 5,9 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- b)
- Dle zadání předpokládáme, že procentuální zastoupení jader vodíku (tj. protonů) a jader helia (tj. α -částic) je v celém objemu Slunce v okamžiku jeho vzniku homogenní. Jinými slovy, dané zastoupení jader zmíněných prvků platí v čase $t = 0$ i v centrální oblasti Slunce, ve které dochází ke zmíněným proton-protonovým cyklům. Právě tato oblast je relevantní pro další postup.
 - Označme počet protonů a α -částic v centrální oblasti Slunce v době jeho vzniku, tj. v čase $t = 0$, jako $N_p(0)$ a $N_\alpha(0)$. Hmotnost centrální oblasti Slunce, která je dle zadání $0,1M_\odot$, je tak dána součtem procentuálních zastoupení celkových hmotností protonů a α -částic, které zapíšeme popořadě jako

$$\begin{aligned} 0,7 \cdot 0,1M_\odot &= N_p(0)m_p, \\ 0,3 \cdot 0,1M_\odot &= N_\alpha(0)m_\alpha. \end{aligned} \tag{B.10}$$

- V současné době, tj. v čase $t = t_\odot$, je počet protonů a α -částic $N_p(t_\odot)$ a $N_\alpha(t_\odot)$. Pro hmotností zastoupení jednotlivých částic v centrální oblasti Slunce v čase $t = t_\odot$ pak platí

$$\begin{aligned} 0,3 \cdot 0,1M_\odot &= N_p(t_\odot)m_p, \\ 0,7 \cdot 0,1M_\odot &= N_\alpha(t_\odot)m_\alpha. \end{aligned} \tag{B.11}$$

- Z bilančních rovnic (B.10) a (B.11) pak jednoduše plynou rozdíly v počtu protonů a α -částic za dobu t_\odot jako

$$\begin{aligned} N_p(0) - N_p(t_\odot) &= \frac{0,04M_\odot}{m_p}, \\ N_\alpha(t_\odot) - N_\alpha(0) &= \frac{0,04M_\odot}{m_\alpha}, \end{aligned} \tag{B.12}$$

což je v souladu s tím, že počet protonů s časem klesá, zatímco počet α -částic vzrůstá.

- Jak již bylo řečeno, výkon P_\odot Slunce je generován množstvím proton-protonových cyklů, přičemž v každém cyklu se uvolní energie Q_{pp} . K udržení daného výkonu tak musí za jednotku času proběhnout určitý počet těchto cyklů, který je daný vztahem (B.9). Jinými slovy, za dobu t_\odot existence Slunce proběhlo již

$$N_{pp}(t_\odot) = \frac{P_\odot t_\odot}{Q_{pp}}$$

proton-protonových cyklů.

- Uvědomme si, že každý proton-protonový cyklus představuje úbytek čtyř protonů a přírůstek jedné α -částice. Neboli, rozdíl v počtu čtveřic protonů či v počtu α -částic za dobu t_\odot odpovídá počtu proton-protonových cyklů za tuto dobu. Zapsáno symbolicky, platí

$$\frac{1}{4} \left(N_p(0) - N_p(t_\odot) \right) = N_\alpha(t_\odot) - N_\alpha(0) = \frac{P_\odot t_\odot}{Q_{pp}},$$

odkud pro čas t_\odot , s uvážením vztahů (B.12), vyplývá (po vhodném rozšíření zlomků kvadrátem rychlosti světla, abychom mohli pohodlněji dosadit za klidové energie protonu a α -částice), že současné stáří Slunce je

$$t_\odot = \frac{0,01M_\odot}{m_p c^2} \frac{Q_{pp} c^2}{P_\odot} = \frac{0,04M_\odot}{m_\alpha c^2} \frac{Q_{pp} c^2}{P_\odot} \doteq 4,4 \cdot 10^9 \text{ let.} \quad (\text{B.13})$$

- Na závěr si uvědomme jeden fakt. Dosadíme-li numerické hodnoty klidových energií protonu a α -částice do předchozího vztahu (B.13), druhá rovnost neplatí zcela přesně a dostaneme tak dvě různé hodnoty t_\odot . Nicméně, budeme-li předpokládat (ve sporu s hodnotou ze zadání), že $m_\alpha c^2 = 4m_p c^2$ (což si můžeme dovolit v rámci chyby několika %), rovnost platí.¹⁹
- c) – Hledanou relativní část f_r z původní hmotnosti jader vodíku v centrální části Slunce, která byla za dobu t_\odot dosud přetavena na jádra helia v proton-protonovém cyklu, zjistíme jako poměr změny v počtu protonů v centrální části Slunce za čas t_\odot , což je dáno prvním vztahem v (B.12), vůči počátečnímu počtu protonů v této části, který plyne z první rovnosti v (B.10). Jinými slovy, pro hledanou relativní část platí

$$f_r = \frac{N_p(0) - N_p(t_\odot)}{N_p(0)} = \frac{0,04M_\odot}{0,07M_\odot} \frac{m_p}{m_p} = \frac{4}{7} \doteq 57\%. \quad (\text{B.14})$$

- Alternativně, jedná se o 5,7% protonů v celém objemu Slunce.

¹⁹Připomeňme, že α -částice je jádro helia, skládající se ze dvou protonů a dvou neutronů. Uvedený aproximativní vztah $m_\alpha c^2 = 4m_p c^2$ mlčky předpokládá, že klidové energie protonu a neutronu považujeme za stejné.

- d) – Dobu t_{\odot}^{\max} , za jakou by se, způsobem popsaným v zadání, vysvítlo Slunce, dostaneme jednoduše díky výsledkům (B.13) a (B.14). Pokud se za dobu t_{\odot} přetavila část f_r původní hmotnosti jader vodíku v centrální oblasti Slunce, pak maximální životnost Slunce je

$$t_{\odot}^{\max} = \frac{t_{\odot}}{f_r} \doteq 7,7 \cdot 10^9 \text{ let.}$$

B.3 Kontaminace neutrinového detektoru²⁰

Detektor reaktorových antineutrín je tvořen 20 t kapalného scintilátoru, v kterém je nenulová koncentrace izotopů pocházejících z rozpadové řady ^{232}Th (schéma této rozpadové řady včetně poločasů rozpadu lze najít například na slidu 21 materiálů k přednášce). Součástí této rozpadové řady je i sekvence rozpadů $^{212}\text{Bi} \rightarrow ^{212}\text{Po} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$, kde nejprve dochází k β - a poté k α -rozpadu. Tyto rozpady následují velmi rychle po sobě (poločas rozpadu $T_{(^{212}\text{Po})} = 0,3 \mu\text{s}$), čímž je lze snadno identifikovat. Při uvedení detektoru do provozu bylo naměřeno $4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ takových dvojic rozpadů, zaznamenávány však byly pouze takové, kdy časový rozdíl mezi β - a α -rozpadem byl v rozmezí ($1 \mu\text{s}, 3 \mu\text{s}$).

- a) Jaký zlomek hmotnosti kapalného scintilátoru je tvořen Th, předpokládáme-li, že tato rozpadová řada je v rovnováze (tj. všechny dceřinné izotopy vznikají ve stejném množství jako se rozpadají, a tedy mají stejnou aktivitu), a víte-li, že 64% jader ^{212}Bi se rozpadá β -rozpadem a 36% α -rozpadem. Izotopy Th z jiných rozpadových řad neuvažujte. Molární hmotnosti $M_{(^{228}\text{Th})} = 228 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ a $M_{(^{232}\text{Th})} = 232 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- b) Během provozu detektoru se ukázalo, že četnost pozorovaných rozpadů $^{212}\text{Bi} \rightarrow ^{212}\text{Po} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ v čase klesá. Po 3 letech se snížila na 50% počáteční úrovně. To může být způsobeno tím, že krátce před uvedením do provozu byla část Ra z kapalného scintilátoru chemicky odstraněna (do té doby byla rozpadová řada v rovnováze). O jakou část se přibližně muselo jednat, aby se tím vysvětlilo pozorování? Všechny rozpady s poločasem rozpadu kratším než měsíc považujte za efektivně okamžité (totéž platí i pro část c)).
- c) Experiment je plánován na 10 let. Kolik let po uvedení do provozu bychom mohli očekávat nejnižší četnost $^{212}\text{Bi} \rightarrow ^{212}\text{Po} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ rozpadů, pokud by během čištění z části b) bylo odstraněno 100% Ra? O jakou minimální četnost by se jednalo?

Nápověda:

- Během trvání experimentu se rozpadne méně než $10^{-6}\%$ z počátečního množství ^{232}Th . Rozpadová konstanta ^{232}Th je mnohem menší než všechny ostatní rozpadové konstanty v této řadě a lze ji zanedbat. Aktivita ^{232}Th je tudíž konstantní a platí $A_{(^{232}\text{Th})}(t) = \lambda_{(^{232}\text{Th})} N_{(^{232}\text{Th})}(t) \doteq A_{(^{232}\text{Th})}(0)$. Všimněte si, že přestože $\lambda_{(^{232}\text{Th})}$ je zanedbatelná, $A_{(^{232}\text{Th})}$ zanedbat nelze kvůli velké hodnotě $N_{(^{232}\text{Th})}(0)$.

²⁰Autor: Tadeáš Dohnal.

- Před řešením částí b) a c) je doporučeno zopakovat si řešení příkladu č. 16.

Řešení

- a) – Nejprve spočítáme, jakou část rozpadů ^{212}Po jsme zadetkovali. Pravděpodobnost, že se ^{212}Po rozpadne dřív než po $t_{\min} = 1 \mu\text{s}$, je

$$P_{<1 \mu\text{s}} = 1 - \exp\left(-\frac{t_{\min} \ln 2}{T_{(^{212}\text{Po})}}\right) = 90\%.$$

Naopak pravděpodobnost, že se rozpadne za dobu delší než $t_{\max} = 3 \mu\text{s}$ je

$$P_{>3 \mu\text{s}} = \exp\left(-\frac{t_{\max} \ln 2}{T_{(^{212}\text{Po})}}\right) < 0,1\%.$$

Celkem jsme tedy zaznamenaly pouze $1 - P_{<1 \mu\text{s}} - P_{>3 \mu\text{s}} \doteq 10\%$ signálů. Skutečná aktivita ^{212}Po v detektoru je tedy $A_{(^{212}\text{Po})} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ Bq}$.

- Jelikož se pouze 64% jader ^{212}Bi rozpadá β -rozpadem, je aktivita $A_{(^{212}\text{Bi})} = A_{(^{212}\text{Po})}/0,64 \doteq 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ Bq}$.
- Je-li rozpadová řada v rovnováze, musí platit $A_{(^{232}\text{Th})} = A_{(^{228}\text{Th})} = A_{(^{212}\text{Bi})}$. Dále víme, že aktivita obecně $A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N$, a tedy $N = A \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$. Vidíme, že počet atomů jednotlivých izotopů je úměrný jejich poločasu rozpadu. Množství ^{228}Th s poločasem rozpadu 1,9 y je tak zjevně zanedbatelné vůči ^{232}Th s poločasem rozpadu $1,4 \cdot 10^{10}$ y. Použijeme-li vztah mezi hmotností a počtem atomů, dostaneme:

$$m = A \frac{T_{1/2} M}{N_A \ln 2}, \quad (\text{B.15})$$

kde M je molární hmotnost (pro ^{232}Th uvažujme $M_{(^{232}\text{Th})} = 232 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) a $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ je Avogadrova konstanta. Dosadíme-li do rovnice (B.15), dostaneme, že

$$m_{(^{232}\text{Th})} \doteq 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ g},$$

což představuje

$$7,5 \cdot 10^{-13}$$

hmotnosti kapalného scintilátoru.

- b) – V měřítku let trvání experimentu mají zanedbatelně dlouhé poločasy rozpadu jen ^{232}Th ($1,4 \cdot 10^{10}$ y), ^{228}Ra (5,7 y) a ^{228}Th (1,9 y). Ostatní rozpady můžeme považovat za efektivně okamžité, bude tedy platit $A_{(^{228}\text{Th})} = A_{(^{212}\text{Bi})}$. Kromě toho je poločas rozpadu ^{232}Th tak dlouhý, že relativní úbytek ^{232}Th můžeme zcela zanedbat. Označme si pro přehlednost $N_{(^{232}\text{Th})} \equiv N_a$ a příslušnou rozpadovou konstantu λ_a . Pak můžeme psát:

$$N_a(t) \doteq N_a(0) \equiv N_{a,0}.$$

- Dále si označme si množství ^{228}Ra jako N_b a jeho rozpadovou konstantu λ_b . Pak platí diferenciální rovnice

$$\frac{dN_b}{dt} = \lambda_a N_a - \lambda_b N_b,$$

jejíž řešení je analogické příkladu č. 19 (položíme-li tamější konstantu P rovnu $P = \lambda_a N_a$) s výsledkem

$$N_b(t) = \frac{\lambda_a}{\lambda_b} N_{a,0} + \frac{1}{\lambda_b} (\lambda_b N_{b,0} - \lambda_a N_{a,0}) e^{-\lambda_b t}.$$

- Analogicky si označíme množství ^{228}Th jako N_c (rozpad ^{228}Ac lze v měřítku let považovat za okamžitý) a jeho rozpadovou konstantu λ_c . Opět dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{dN_c}{dt} = \lambda_b N_b - \lambda_c N_c,$$

jejímž řešením dostaneme

$$N_c(t) = \frac{\lambda_a}{\lambda_c} N_{a,0} + \left(N_{c,0} - \frac{\lambda_a}{\lambda_c} N_{a,0} \right) e^{-\lambda_c t} + \frac{\lambda_b N_{b,0} - \lambda_a N_{a,0}}{\lambda_c - \lambda_b} (e^{-\lambda_b t} - e^{-\lambda_c t}).$$

- Tento vztah lze zjednodušit, uvědomíme-li si, že před odstraněním části Ra byla rozpadová řada v rovnováze, tj. $\lambda_a N_{a,0} = \lambda_c N_{c,0}$. Dostaneme tedy

$$N_c(t) = N_{c,0} + \frac{\lambda_b N_{b,0} - \lambda_c N_{c,0}}{\lambda_c - \lambda_b} (e^{-\lambda_b t} - e^{-\lambda_c t}).$$

- Dále si označme jako f tu část Ra, které zůstalo v kapalném scintilátoru. Platí tak $\lambda_b N_{b,0} = f \lambda_c N_{c,0}$, což vede ke vztahu

$$N_c(t) = N_{c,0} + \frac{\lambda_c}{\lambda_c - \lambda_b} N_{c,0} (f - 1) (e^{-\lambda_b t} - e^{-\lambda_c t}), \quad (\text{B.16})$$

odkud si můžeme vyjádřit f . Dosazením $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ máme

$$f = 1 - \left(1 - \frac{N_c(t)}{N_{c,0}} \right) \left(1 - \frac{T_{1/2,c}}{T_{1/2,b}} \right) \left(2^{-\frac{t}{T_{1/2,b}}} - 2^{-\frac{t}{T_{1/2,c}}} \right)^{-1}.$$

- Dosadíme-li $t = 3 \text{ y}$, $N_c(t) = 0,5 N_{c,0}$, $T_{1/2,b} = 5,7 \text{ y}$, $T_{1/2,c} = 1,9 \text{ y}$, dostaneme $f \doteq 0,073$. Před zahájením provozu detektoru tedy bylo odstraněno (pro úplnost uvedmě, že $1 - 0,073 = 0,927$)

$$\boxed{92,7\%}$$

radia.

- c) – Při řešení tohoto úkolu využijeme již odvozené rovnice (B.16), přičemž můžeme dosadit $f = 0$:

$$N_c(t) = N_{c,0} - \frac{\lambda_c}{\lambda_c - \lambda_b} N_{c,0} (e^{-\lambda_b t} - e^{-\lambda_c t}). \quad (\text{B.17})$$

- Abychom našli minimum, zderivujeme podle času a položíme rovno nule. Po vykrácení konstant dostaneme²¹

$$0 = -\lambda_b e^{-\lambda_b t_{\min}} + \lambda_c e^{-\lambda_c t_{\min}}, \quad (\text{B.18})$$

což vede k řešení

$$t_{\min} = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_c} \ln \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_c} \right) = \frac{T_{1/2,b} T_{1/2,c}}{(T_{1/2,c} - T_{1/2,b}) \ln 2} \ln \left(\frac{T_{1/2,c}}{T_{1/2,b}} \right) \doteq 4,5 \text{ y}.$$

- Pozorovanou četnost $^{212}\text{Bi} \rightarrow ^{212}\text{Po} \rightarrow ^{208}\text{Po}$ rozpadů získáme dosazením podmínky (B.18) do (B.17). Po úpravě a dosazení $t_{\min} = 4,5$ dostaneme:

$$\frac{N_c(t_{\min})}{N_{c,0}} = 1 - 2^{-\frac{t_{\min}}{T_{1/2,b}}} \doteq 42\%,$$

tedy četnost těchto rozpadů se v minimu sníží na 42% původní úrovně. Tomu bude odpovídat aktivita

$$A_{(^{212}\text{Po}), \min} \doteq 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ Bq},$$

přičemž bude pozorováno

$$1,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

rozpadů $^{212}\text{Bi} \rightarrow ^{212}\text{Po} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$.

B.4 Radioaktivita v nukleární medicíně²²

Jeden z nejvyužívanějších radionuklidů v nukleární medicíně je $^{99\text{m}}\text{Tc}$, kde „m“ značí, že jádro se nachází v metastabilním excitovaném stavu. Jeho výrobu zajišťuje Mo-Tc generátor. Mateřský radionuklid ^{99}Mo je zde absorbovaný v sloučenině Al_2O_3 . Radionuklid ^{99}Mo se v 86% případech beta rozpadem přemění na dceřiný izotop $^{99\text{m}}\text{Tc}$, který se následným vyzářením fotonu deexcituje do stabilního základního stavu ^{99}Tc , přičemž poločasy rozpadu příslušných izotopů jsou $T_{1/2, (^{99}\text{Mo})} = 66 \text{ h}$ a $T_{1/2, (^{99\text{m}}\text{Tc})} = 6 \text{ h}$.

- Určete časovou závislost aktivity $A_{(^{99}\text{Mo})}(t)$ mateřského izotopu ^{99}Mo a aktivity $A_{(^{99\text{m}}\text{Tc})}(t)$ dceřiného izotopu $^{99\text{m}}\text{Tc}$ za předpokladu, že na začátku generátor neobsahoval žádný nuklid $^{99\text{m}}\text{Tc}$ a počáteční aktivita ^{99}Mo byla 1 Ci.
- Označme $A_{(^{99\text{m}}\text{Tc}), 100\%}(t)$ aktivitu nuklidu $^{99\text{m}}\text{Tc}$, pokud by se na něj mateřský izotop ^{99}Mo rozpadal ve 100% případů. Do jednoho grafu zakreslete průběh veličin $A_{(^{99}\text{Mo})}(t)$, $A_{(^{99\text{m}}\text{Tc})}(t)$ a $A_{(^{99\text{m}}\text{Tc}), 100\%}(t)$. Aktivity vyčíslete v jednotkách Bq a pro jejich zobrazení použijte logaritmickou škálu. Všimněte si vzájemných velikostí aktivit mateřského a dceřiného nuklidu v závislosti na čase.

²¹Nezaměňujeme zde označené t_{\min} s tím ve vztahu (B.3)!

²²Autor: Kateřina Jarkovská.

$^{99\text{m}}\text{Tc}$ se neváže ke sloučenině Al_2O_3 a lze jej následně vyplavit z generátoru fyziologickým roztokem. Navázáním radionuklidu na biologicky aktivní látku vytvoříme radiofarmakum, které je následně vychytáváno na specifickém místě v těle. Uvažujme konkrétní příklad $^{99\text{m}}\text{Tc}$ -tetrofosminu, jenž se velmi rychle absorbuje v srdci. Měření fotonů o energii $E = 141 \text{ keV}$ z následné deexcitace $^{99\text{m}}\text{Tc} \rightarrow ^{99}\text{Tc}$ umožňuje studovat prokrvení srdeční svaloviny (tímto způsobem lze například zjistit, v kterém místě došlo k odumírání buněk při infarktu).

- c) Jakou absorbovanou dávku D (v jednotkách Gy) obdrží srdce díky deexcitaci $^{99\text{m}}\text{Tc}$, pokud jsme do něj aplikovali množství $^{99\text{m}}\text{Tc}$ o aktivitě 120 MBq , které se ihned všechno absorbovalo do srdeční svaloviny a následně 90% fotonů z deexcitace $^{99\text{m}}\text{Tc}$ ze srdce uniklo bez interakce (zbylých 10% fotonů ze srdce neuniklo)? Hmotnost srdce pacienta uvažujme jako $m = 300 \text{ g}$.
- d) Pro srovnání biologických účinků záření se častěji používá veličiny ekvivalentní dávka (v jednotkách Sv), která je ovšem pro fotony rovna absorbované dávce. Srovnejte ekvivalentní dávku H obdrženou srdcem z předchozího bodu s efektivní dávkou 1 mSv celého těla, kterou za rok obdrží v průměru každý člověk z radioaktivních zdrojů volně se vyskytujících v přírodě.

Nápověda:

- Jednotka Gy (gray) a Sv (sievert) mají rozměr $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- Absorbovaná dávka D nějakým objektem (orgánem, celým tělem, předmětem apod.) je definovaná jako poměr celkové energie zanechané zářením v objektu vůči hmotnosti tohoto objektu.

Řešení

- a) – Časovou závislost aktivit zjistíme řešením soustavy diferenciálních rovnic analogicky s příkladem č. 16. Pro počet nuklidů v generátoru platí

$$\frac{dN_{(^{99}\text{Mo})}}{dt} = -\lambda_{(^{99}\text{Mo})}N_{(^{99}\text{Mo})}, \quad (\text{B.19a})$$

$$\frac{dN_{(^{99\text{m}}\text{Tc})}}{dt} = -\lambda_{(^{99\text{m}}\text{Tc})}N_{(^{99\text{m}}\text{Tc})} + 0,86 \cdot \lambda_{(^{99}\text{Mo})}N_{(^{99}\text{Mo})}, \quad (\text{B.19b})$$

kde jsme zahrnuli fakt, že oba radionuklidy se rozpadají a zároveň počet jader $N_{(^{99\text{m}}\text{Tc})}$ přibývá díky beta rozpadu ^{99}Mo . Poslední výraz v rovnici (B.19b) zohledňuje skutečnost, že ^{99}Mo se rozpadá na $^{99\text{m}}\text{Tc}$ jen v 86% případech.

- Řešení rovnice (B.19a) je

$$N_{(^{99}\text{Mo})}(t) = N_{(^{99}\text{Mo}),0} e^{-\lambda_{(^{99}\text{Mo})} t},$$

a tedy

$$A_{(^{99}\text{Mo})}(t) = A_{(^{99}\text{Mo}),0} e^{-\lambda_{(^{99}\text{Mo})} t} = A_{(^{99}\text{Mo}),0} e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2, (^{99}\text{Mo})}}}$$

– Dosazením numerických hodnot dostáváme

$$\boxed{A_{(99\text{Mo})}(t [\text{h}]) = e^{-\frac{t \ln 2}{66}} [\text{Ci}]} \quad (\text{B.20})$$

– Druhou rovnici (B.19b) řešíme variací konstant, kdy konstantu parametrizující řešení homogenní rovnice necháme záviset na čase:

$$N_{(99\text{mTc})}(t) = C(t) e^{-\lambda_{(99\text{mTc})} t}. \quad (\text{B.21})$$

Funkce $C(t)$ potom splňuje zjednodušenou diferenciální rovnici

$$C'(t) e^{-\lambda_{(99\text{mTc})} t} - 0,86 \cdot \lambda_{(99\text{Mo})} N_{(99\text{Mo}),0} e^{-\lambda_{(99\text{Mo})} t} = 0,$$

jejímž řešením (při počáteční podmínce $N_{(99\text{mTc}),0} = 0$) je

$$C(t) = 0,86 \cdot \frac{N_{(99\text{Mo}),0} \lambda_{(99\text{Mo})}}{\lambda_{(99\text{mTc})} - \lambda_{(99\text{Mo})}} \left(e^{-(\lambda_{(99\text{Mo})} - \lambda_{(99\text{mTc})})t} - 1 \right).$$

– Dosazením do (B.21) získáme

$$N_{(99\text{mTc})}(t) = 0,86 \cdot \frac{N_{(99\text{Mo}),0} \lambda_{(99\text{Mo})}}{\lambda_{(99\text{mTc})} - \lambda_{(99\text{Mo})}} \left(e^{-\lambda_{(99\text{Mo})} t} - e^{-\lambda_{(99\text{mTc})} t} \right)$$

a tedy

$$\begin{aligned} A_{(99\text{mTc})}(t) &= 0,86 \cdot \frac{A_{(99\text{Mo}),0} \lambda_{(99\text{mTc})}}{\lambda_{(99\text{mTc})} - \lambda_{(99\text{Mo})}} \left(e^{-\lambda_{(99\text{Mo})} t} - e^{-\lambda_{(99\text{mTc})} t} \right) \\ &= 0,86 \cdot \frac{A_{(99\text{Mo}),0} T_{1/2, (99\text{Mo})}}{T_{1/2, (99\text{Mo})} - T_{1/2, (99\text{mTc})}} \times \\ &\quad \times \left[\exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2, (99\text{Mo})}}\right) - \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2, (99\text{mTc})}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

– Po dosazení numerických hodnot nakonec máme

$$\boxed{A_{(99\text{mTc})}(t [\text{h}]) = 0,946 \left(e^{-\frac{t \ln 2}{66}} - e^{-\frac{t \ln 2}{6}} \right) [\text{Ci}]} \quad (\text{B.23})$$

b) – Aktivita $^{99\text{mTc}}$, pokud by se na něj izotop $^{99\text{Mo}}$ rozpadal ve 100% případech, je

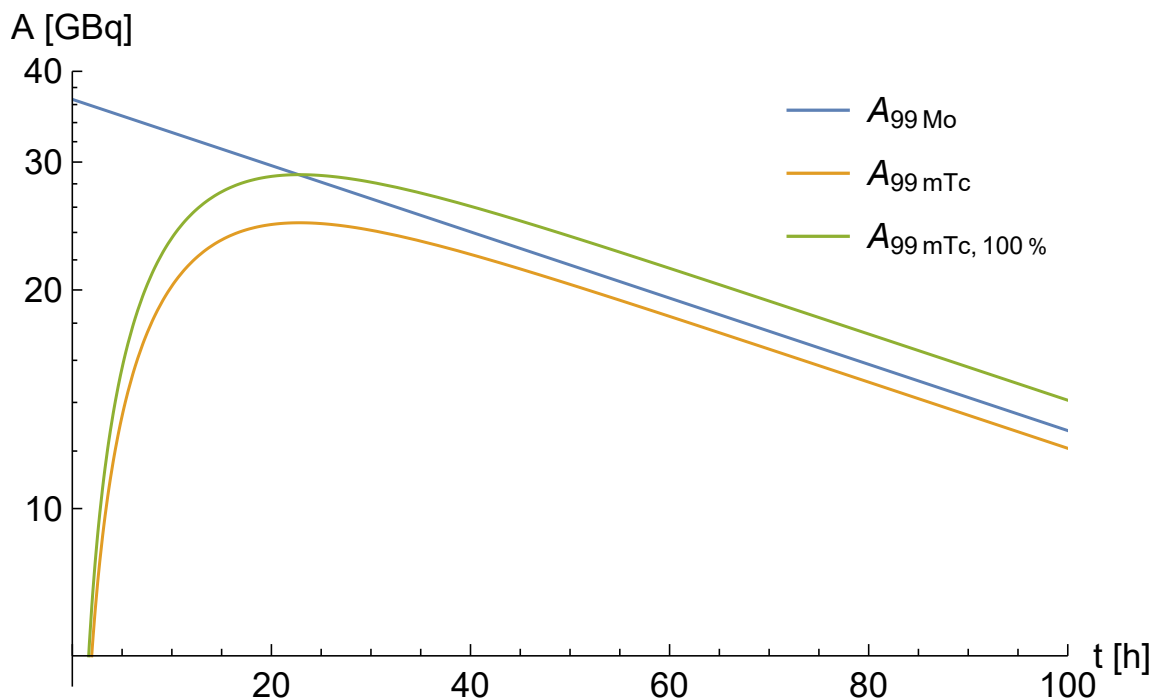
$$A_{(99\text{mTc}),100\%}(t) = \frac{A_{(99\text{mTc})}(t)}{0,86}.$$

– Dále je naším úkolem uvažovat aktivitu v jednotkách Bq, přičemž (viz příklad č. 27)

$$1 \text{ Ci} = 36,6 \text{ GBq}.$$

– Potom dostáváme upravením (B.20), (B.23), (B.4) vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} A_{(99\text{Mo})}(t [\text{h}]) &\doteq 36,6 e^{-\frac{t \ln 2}{66}} [\text{GBq}], \\ A_{(99\text{mTc})}(t [\text{h}]) &\doteq 34,6 \left(e^{-\frac{t \ln 2}{66}} - e^{-\frac{t \ln 2}{6}} \right) [\text{GBq}], \\ A_{(99\text{mTc}),100\%}(t [\text{h}]) &\doteq 40,3 \left(e^{-\frac{t \ln 2}{66}} - e^{-\frac{t \ln 2}{6}} \right) [\text{GBq}]. \end{aligned}}$$



Obrázek 1. Aktivita mateřského a dceřiného radionuklidu v generátoru.

- Všechny tři aktivity zakreslíme do jednoho grafu, viz Obrázek 1. Všimněme si, že po úvodní fázi trvající zhruba 20 hodin je aktivita dceřiného izotopu přímo úměrná aktivitě mateřského radionuklidu. Zajímavé je také pozorování, že aktivita ^{99m}Tc v případě 100% rozpadu ^{99}Mo na ^{99m}Tc je potom dokonce větší, než aktivita mateřského izotopu. Tento fakt lze jednoduše vyčíst ze vztahů (B.22) a (B.4), kde pro velké časy

$$A_{(^{99m}\text{Tc}), 100\%}(t) \approx \frac{A_{(^{99}\text{Mo}), 0} T_{1/2, (^{99}\text{Mo})}}{T_{1/2, (^{99}\text{Mo})} - T_{1/2, (^{99m}\text{Tc})}} e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2, (^{99}\text{Mo})}}} > A_{(^{99}\text{Mo})}(t),$$

jelikož

$$\frac{T_{1/2, (^{99}\text{Mo})}}{T_{1/2, (^{99}\text{Mo})} - T_{1/2, (^{99m}\text{Tc})}} > 1.$$

- c) – Z definice absorbované dávky víme, že

$$D = \frac{E N}{m},$$

kde $E = 141 \text{ keV} = 2,26 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ je energie de-excitovaného fotonu, $m = 300 \text{ g} = 0,3 \text{ kg}$ je hmotnost srdce a N je celkový počet fotonů, které přenechají veškerou svou energii v srdci.

- Jelikož 90% fotonů ze srdce uniklo, platí, že N je 10% ze všech fotonů vzniklých z deexcitace ^{99m}Tc na ^{99}Tc . Jinými slovy, N je 10% z počtu všech rozpadů ^{99m}Tc .

- Za jednotku času se rozpadne

$$A_{(\text{Tc})}(t) = A_{(\text{Tc}),0} e^{-\lambda_{(99\text{mTc})} t}$$

nuklidů $^{99\text{m}}\text{Tc}$ (pozor — neplést $A_{(\text{Tc})}(t)$ a $A_{(99\text{mTc})}(t)$ z předchozích bodů, kde bylo technicium ještě v generátoru). Vyintegrováním přes všechny časy dostáváme²³

$$N = 0,1 \cdot \int_0^\infty A_{(\text{Tc}),0} e^{-\lambda_{(99\text{mTc})} t} dt = 0,1 \cdot \frac{A_{(\text{Tc}),0}}{\lambda_{(99\text{mTc})}} = 0,1 \cdot \frac{A_{(\text{Tc}),0} T_{1/2, (99\text{mTc})}}{\ln 2},$$

což po dosazení dá

$$N = 37,4 \cdot 10^{10}.$$

- Výsledná absorbovaná dávka v jednotkách Gy je

$$D = 0,1 \cdot \frac{E A_{(\text{Tc}),0} T_{1/2, (99\text{mTc})}}{m \ln 2} = 28,2 \text{ mGy}. \quad (\text{B.24})$$

- d) Pro fotony je ekvivalentní dávka numericky rovna absorbované dávce. Platí tedy použitím výsledku (B.24), že ekvivalentní dávka obdržena srdcem byla

$$H = D = 28,2 \text{ mSv}.$$

To je větší množství, než efektivní dávka celého těla, kterou člověk průměrně akumuluje za jeden rok z radioaktivních zdrojů přirozeně se vyskytujících v přírodě. Pro velkou část radiologických lékařských vyšetření platí, že ekvivalentní dávka přijatá jedním orgánem převyšuje mez 1 mSv. Není proto vhodné taková vyšetření zbytečně nadužívat.

B.5 Antineutrína ze supernovy SN1987A²⁴

Dne 23. února 1987 v 7:35 světového času detekoval experiment Kamiokande II dvanáct elektronových antineutrin v intervalu $\Delta t = 12 \text{ s}$, a to s energiemi od $E_{\min} = 7 \text{ MeV}$ do $E_{\max} = 40 \text{ MeV}$. Zdrojem těchto antineutrin byl výbuch supernovy SN1987A, vzdálené od Země 170 tisíc světelných let, který trval po dobu $t_0 = 4 \text{ s}$.

Experiment spočíval v detekci antineutrin v procesu $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ na všech dostupných protonech vodního detektoru o hmotnosti $m_{\text{det}} = 2200 \text{ t}$. Tato interakce byla identifikována na základě následné elektron-pozitronové anihilace, jejímž důsledkem byla koincidenční detekce dvou γ -kvant fotonásobiči, které byly umístěny po stěnách vodního detektoru.

Účinný průřez interakce elektronového antineutrina s protonem je $\sigma_{\bar{\nu}p} = 10^{-45} \text{ m}^2$, kilomolová hmotnost vody je $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$, Avogadrova konstanta je $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ a rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

²³Ke stejnému výsledku lze přijít jednoduchou úvahou, že radionuklid $^{99\text{m}}\text{Tc}$ je nestabilní a tak dříve či později všechna jádra deexcitují, tj. $N = 0,1 \cdot N_{(99\text{mTc}),0} = 0,1 \cdot \frac{A_{(\text{Tc}),0}}{\lambda_{(99\text{mTc})}}$.

²⁴Autor: Tomáš Kadavý.

- a) Určete, kolik elektronových antineutrín bylo celkově uvolněno při výbuchu supernovy.
- b) Určete, jaká celková energie byla odnesena elektronovými antineutriny při výbuchu supernovy, jestliže střední energie elektronového antineutrína byla 12 MeV.
- c) Určete odhad klidové energie elektronového antineutrína za předpokladu, že ve sporu se zadáním došlo k výbuchu supernovy i vyzáření všech antineutrín v jednom okamžiku.
- d) Určete horní a dolní odhad klidové energie elektronového antineutrína, když výbuch ve skutečnosti trval $t_0 = 4$ s a k vyzáření antineutrín docházelo po celou tuto dobu.

Nápověda:

- Pro $|x| \ll 1$ a $a \in \mathbb{R}$ platí $(1 - x)^a = 1 - ax + \mathcal{O}(x^2)$. Je rozumné toho využít.
- Nenechte se zmást numerickými hodnotami uvedenými na slajdu č. 87 v „[PDF dodatečných materiálů](#)“.

Řešení

- Začneme tím, že si převedeme jednotky. Pro hmotnost m_{det} detektoru, kilomolovou hmotnost $M_{\text{H}_2\text{O}}$ vody a vzdálenost L supernovy SN1987A od Země platí

$$m_{\text{det}} = 2200 \text{ t} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1} = 18 \text{ kg} \cdot (10^3 \text{ mol})^{-1} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$L = 1,7 \cdot 10^5 \text{ ly} = (1,7 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (365 \cdot 86400 \text{ s}) \doteq 1,6 \cdot 10^{21} \text{ m}.$$

- a) – Vzhledem k tomu, že zkoumáme interakci neutrin v detektoru tvořeném vodou velkým desítky metrů, je jasné, že budeme moci použít přiblížení tenkého terče. Nicméně chceme-li si být naprosto jistí, můžeme tuto aproximaci ověřit výpočtem střední volné dráhy neutrina:

$$l_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\sigma_{\bar{\nu}p} n_p} = \frac{M_{\text{H}_2\text{O}}}{2 \sigma_{\bar{\nu}p} \rho_{\text{H}_2\text{O}} N_A} \doteq 1,5 \cdot 10^{16} \text{ m},$$

kde jsme již dosadili za objemovou hustotu volných protonů n_p , přičemž faktor „2“ značí, že v každé molekule vody H_2O jsou právě dva volné protony. Vzhledem k velikosti volné dráhy neutrina je aproximace tenkého terče zjevně oprávněná.

- Dále si můžeme povšimnout, že v této části nás zajímá jen počet antineutrín, a nikoliv to, jak je jejich detekce rozložena v čase. Můžeme si tedy zavést integrovanou hustotu toku antineutrín $J_{\bar{\nu}}$ s jednotkou m^{-2} :

$$J_{\bar{\nu}} = \int j_{\bar{\nu}}(t) dt.$$

- V tom případě (s použitím aproximace tenkého terče) platí pro detekovaný počet antineutrin

$$N_{\text{int}} = N_p J_{\bar{\nu}} \sigma_{\bar{\nu}p},$$

kde N_p značí počet volných protonů v detektoru. Z tohoto vztahu si můžeme vyjádřit integrovanou hustotu toku antineutrin jako

$$J_{\bar{\nu}} = \frac{N_{\text{int}}}{N_p \sigma_{\bar{\nu}p}} = \frac{N_{\text{int}} M_{\text{H}_2\text{O}}}{2 m_{\text{det}} N_A \sigma_{\bar{\nu}p}}.$$

- Předpokládáme-li, že antineutrino byla emitována izotropně, jejich celkový počet $N_{\bar{\nu}}$ dostaneme jako součin integrované hustoty toku na Zemi a povrchu sféry o poloměru odpovídající vzdálenosti L supernovy od Země. Platí tak

$$N_{\bar{\nu}} = 4\pi L^2 J_{\bar{\nu}} = 2\pi L^2 \frac{N_{\text{int}} M_{\text{H}_2\text{O}}}{m_{\text{det}} N_A \sigma_{\bar{\nu}p}} \doteq 2,64 \cdot 10^{57}.$$

- b) – Pakliže je střední energie $\bar{E}_{\bar{\nu}}$ vyzářeného antineutrino 12 MeV, pak energie odnesená všemi antineutrinami při výbuchu supernovy je

$$E_{\bar{\nu}} = N_{\bar{\nu}} \bar{E}_{\bar{\nu}} \doteq 3,17 \cdot 10^{58} \text{ MeV} \doteq 5 \cdot 10^{45} \text{ J}.$$

- c) – Vzhledem k tomu, že klidová energie elektronových (anti)neutrin se odhaduje na méně než 1 eV, bude jejich celková energie $E_{\bar{\nu}}$ tvořena z velké většiny jejich kinetickou energií. Jinými slovy, můžeme předpokládat, že

$$E_{\bar{\nu}} \gg m_{\bar{\nu}} c^2. \quad (\text{B.25})$$

- Pro celkovou energii $E_{\bar{\nu}}$ elektronového antineutrino platí

$$E_{\bar{\nu}} = \gamma_{\bar{\nu}} m_{\bar{\nu}} c^2, \quad (\text{B.26})$$

kde

$$\gamma_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\bar{\nu}}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\bar{\nu}}}{c}\right)^2}}, \quad (\text{B.27})$$

je relativistický Lorentzův faktor, a kde jsme již dosadili za parametr $\beta_{\bar{\nu}}$, který je podílem velikosti rychlosti $v_{\bar{\nu}}$ antineutrino vůči velikosti rychlosti světla ve vakuu.

- Ze vztahu (B.26) je možno, užitím definice (B.27), vyjádřit rychlost antineutrino jako

$$v_{\bar{\nu}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_{\bar{\nu}} c^2}{E_{\bar{\nu}}}\right)^2} \doteq c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_{\bar{\nu}} c^2}{E_{\bar{\nu}}}\right)^2\right], \quad (\text{B.28})$$

kde přibližná rovnost plyne na základě předpokladu (B.25), a to s využitím Taylorova rozvoje $(1 - x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)$ pro $x \equiv \frac{m_{\bar{\nu}} c^2}{E_{\bar{\nu}}} \ll 1$.

- Z rychlosti antineutrína (B.28) můžeme určit, jakou dobu $t_{\bar{\nu}}$ mu trvá uletět vzdálenost L . Platí

$$t_{\bar{\nu}} = \frac{L}{v_{\bar{\nu}}} = \frac{L}{c} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_{\bar{\nu}} c^2}{E_{\bar{\nu}}} \right)^2} \doteq \frac{L}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_{\bar{\nu}} c^2}{E_{\bar{\nu}}} \right)^2 \right],$$

kde přibližná rovnost v tomto případě plyne z Taylorova rozvoje $(1 - x)^{-1} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ pro x definované výše.

- Přeznačme nyní předchozí vztah explicitně pro taková antineutrína, která mají minimální a maximální energii s hodnotami dle zadání. Čas, který trvá antineutrínu s energií E_{\max} uletět dráhu L , označme jako t_1 . Podobně, čas odpovídající dráze L pro antineutrino s energií E_{\min} označíme t_2 . Jelikož je antineutrino s maximální energií nejrychlejší, je $t_1 < t_2$, a tedy

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= \frac{L}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_{\bar{\nu}} c^2}{E_{\min}} \right)^2 \right] - \frac{L}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_{\bar{\nu}} c^2}{E_{\max}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{L}{2c} (m_{\bar{\nu}} c^2)^2 \left(\frac{1}{E_{\min}^2} - \frac{1}{E_{\max}^2} \right), \end{aligned}$$

odkud pak máme odhad pro klidovou energii antineutrína jako

$$\boxed{m_{\bar{\nu}} c^2 = E_{\min} E_{\max} \sqrt{\frac{2c\Delta t}{L(E_{\max}^2 - E_{\min}^2)}} \doteq 15 \text{ eV}. \quad (\text{B.29})$$

- d) – Dolní a horní odhad klidové energie antineutrína zjistíme tehdy, vezmeme-li v úvahu krajní možnosti vyzáření antineutrína s nejmenší a největší energií.
- Dolní odhad klidové energie antineutrína odpovídá situaci, kdy je nejprve detekováno neutrino s největší energií, vyzářené na začátku výbuchu, a až poté detekujeme antineutrino s nejmenší energií, vyzářené na konci výbuchu. Pak platí²⁵

$$\boxed{m_{\bar{\nu}} c^2 = E_{\min} E_{\max} \sqrt{\frac{2c(\Delta t - t_0)}{L(E_{\max}^2 - E_{\min}^2)}} \doteq 12 \text{ eV}. \quad (\text{B.30})$$

- Horní odhad klidové energie antineutrína odpovídá situaci, kdy je nejprve detekováno neutrino s největší energií, vyzářené na konci výbuchu, a až poté detekujeme antineutrino s nejmenší energií, vyzářené na začátku výbuchu. Pak platí

$$\boxed{m_{\bar{\nu}} c^2 = E_{\min} E_{\max} \sqrt{\frac{2c(\Delta t + t_0)}{L(E_{\max}^2 - E_{\min}^2)}} \doteq 17 \text{ eV}. \quad (\text{B.31})$$

²⁵Pro přehlednost zápisu úmyslně neodlišujeme symbolické značení jednotlivých spočítaných klidových energií elektronového antineutrína (B.30) a (B.31) od (B.29).

C Výběr starších zápočtových příkladů

Níže je uveden výběr řešených příkladů ze zápočtových písemných prací, které autor zadával na svých paralelkách cvičení v akademických letech 2018/2019 a 2019/2020.

C.1 Urychlovač

Odhadněte rozměry hypotetického kruhového urychlovače, který by dokázal urychlit protony na energie, které jsou v současnosti pozorovatelné pouze v kosmickém záření, tj. energie řádu 10^{20} eV, a to za předpokladu, že magnetické pole tohoto urychlovače by bylo stejné jako na LHC v CERN, tj. velikost magnetické indukce je $B = 8,33$ T. Klidová energie protonu je $m_p c^2 = 938$ MeV.

Řešení

- Na částici s hmotností m a nábojem q pohybující se rychlostí \mathbf{v} magnetickým polem s magnetickou indukcí \mathbf{B} působí Lorentzova síla $\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Pohybuje-li se částice v urychlovači po kružnici o poloměru R , působí na ni dostředivé zrychlení \mathbf{a} , které je kolmé na vektor rychlosti \mathbf{v} . Relativistický faktor γ se tak nemění.
- Z požadavku stability dráhy se tak musí dostředivá síla vyrovnat síle Lorentzově, tj. máme $qv_{\perp}B = \gamma ma$, kde $a = \frac{v_{\perp}^2}{R}$ je velikost zrychlení a v_{\perp} je složka rychlosti kolmá na magnetické pole. Po dosazení pak máme jednoduchý vztah $p_{\perp} = qBR$, kde levá strana rovnice je složka hybnosti částice kolmá na magnetické pole, $p_{\perp} = \gamma m v_{\perp}$. Měli se jednat o pohyb po kružnici, musí být složka hybnosti rovnoběžná s magnetickým polem nulová, $p_{\parallel} = 0$, jinak by se jednalo o pohyb po šroubovici. Jinými slovy, pro velikost hybnosti platí

$$\boxed{p = qBR}, \quad (\text{C.1})$$

odkud při znalosti hybnosti, resp. energie, dostaneme odhad na poloměr urychlovače R pro dané magnetické pole.

- Dříve než numericky dosadíme, je zásadní si uvědomit, že v částicové fyzice často uvádíme hybnost v GeV/c namísto SI jednotky $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, což je ovšem jednotka hybnosti na levé straně rovnice (C.1). Pro vzájemný převod zmíněných jednotek platí

$$1\text{GeV}/c \doteq \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9 \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{0,3} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Jelikož hovoříme o protonu urychleném na energii $E = 10^{20} \text{ eV} = 10^{11} \text{ GeV}$, můžeme jeho klidovou hmotu $m_p \approx 1 \text{ GeV}/c^2$ zcela zanedbat a hybnost identifikovat s energií, viz $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$, tj. $E \doteq pc$ pro $E \gg m$. Pro částici o jednotkovém náboji $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, tj. náboji protonu, tak lze, po jednoduchých numerických úpravách, psát

$$\boxed{E [\text{GeV}] = 0,3 \cdot B [\text{T}] \cdot R [\text{m}]},$$

kde, jak zdůrazněno, energii dosazujeme v GeV a velikost magnetické indukce v Tesla a poloměr v metrech. Dosazením pak konečně vyjde poloměr hypotetického urychlovače jako

$$R \doteq 4 \cdot 10^7 \text{ km}.$$

Alternativně, jeho obvod by pak byl $2,5 \cdot 10^8$ km. Pro ilustraci, poloměr lze porovnat zhruba se čtvrtinou vzdálenosti mezi Zemí a Sluncem.

C.2 Kosmické záření I

Uvažujme protony kosmického záření.

- Studujte hraniční energii kosmických protonů, pro které již vesmír není průhledný. Jinými slovy, odvoďte prahovou energii protonu, při níž může nepružně interagovat s fotonem reliktního záření za vzniku neutrálního pionu: $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$. Klidové energie protonu a neutrálního pionu jsou $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$ a $m_\pi c^2 = 135 \text{ MeV}$. Současná teplota reliktního záření je $2,7 \text{ K}$. Boltzmannova konstanta je $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Jaká je střední volná dráha protonu kosmického záření z příkladu a) v naší galaxii, kde je průměrně jeden nukleon na každý centimetr krychlový a kde proton interaguje pouze s nukleony s účinným průřezem interakce 100 b ?
- Určete Larmorův poloměr protonu kosmického záření z příkladu a) v galaktickém magnetickém poli o velikosti magnetické indukce $B = 2 \cdot 10^{-10} \text{ T}$.

Řešení

- Zapišme celkovou čtyř-hybnost P systému protonu a fotonu před srážkou v laboratorní soustavě jako $P = (E_p + E_\gamma, \mathbf{p}_p c + \mathbf{p}_\gamma c)$. Prahová kinematika pro reakci $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ nastává v takovém případě, kdy se proton s fotonem srazí čelně (úhel ϑ mezi hybnostmi \mathbf{p}_p a \mathbf{p}_γ je tak $\vartheta = \pi$), přičemž celková hybnost vzniknuvších produktů reakce, tj. protonu a pionu, je v těžiškové soustavě částic koncového stavu nulová. Jejich celkovou čtyř-hybnost P' tak v této soustavě zapišme jako $P' = (m_p c^2 + m_\pi c^2, \mathbf{0})$.
 - Invariantní veličinou tohoto procesu je kvadrát celkových čtyř-hybností, resp.

$$P^2 = P'^2. \tag{C.2}$$

- Pro levou stranu rovnice (C.2) platí

$$\begin{aligned} P^2 &= (E_p + E_\gamma)^2 - (\mathbf{p}_p c + \mathbf{p}_\gamma c)^2 \\ &= E_p^2 + E_\gamma^2 + 2E_p E_\gamma - (p_p^2 + p_\gamma^2 + 2\mathbf{p}_p \cdot \mathbf{p}_\gamma) c^2 \\ &= E_p^2 + E_\gamma^2 + 2E_p E_\gamma - (p_p^2 + p_\gamma^2 + 2p_p p_\gamma \cos \vartheta) c^2 \\ &= E_p^2 + E_\gamma^2 + 2E_p E_\gamma - (p_p^2 + p_\gamma^2 - 2p_p p_\gamma) c^2. \end{aligned} \tag{C.3}$$

- Užitím relativistického vztahu energie–hybnost, tj. $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$, můžeme (C.3) zjednodušit (připomeňme, že foton je nehmotný, tj. $E_\gamma = p_\gamma c$):

$$\begin{aligned} P^2 &= (m_p c^2)^2 + 2E_p E_\gamma + 2E_\gamma p_p c \\ &= (m_p c^2)^2 + 2E_\gamma (E_p + p_p c). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

- Pro pravou stranu rovnice (C.2) platí

$$P'^2 = (m_p c^2 + m_\pi c^2)^2. \quad (\text{C.5})$$

- Porovnáním (C.4) a (C.5) tak dostaneme

$$E_p + p_p c = \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \left(m_p c^2 + \frac{1}{2} m_\pi c^2 \right). \quad (\text{C.6})$$

- Pro energii fotonu máme ze zadané teploty reliktního záření vztah

$$E_\gamma \approx k_B T \doteq 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ eV},$$

kde $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = 8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta.

- Dosazením numerických hodnot klidových energií jednotlivých částic dle zadání do pravé strany rovnice (C.6) zjistíme, že $E_p + p_p c \doteq 6 \cdot 10^{20} \text{ eV}$. Evidentně tak lze zcela zanedbat klidovou energii protonu a psát $E_p \doteq p_p c$. Jinými slovy, pro energii protonu ze zadání máme

$$E_p \doteq \frac{m_\pi c^2}{2E_\gamma} \left(m_p c^2 + \frac{1}{2} m_\pi c^2 \right) \doteq 3 \cdot 10^{20} \text{ eV}.$$

- b)
- Dle zadání se v naší galaxii vyskytuje průměrně jeden nukleon na každý centimetr krychlový. Tedy pro hustotu n terčíkových center v podobě těchto protonů máme $n = 1 \cdot \text{cm}^{-3} = 10^6 \cdot \text{m}^{-3}$.
 - Účinný průřez σ interakce kosmických protonů s ostatními nukleony je pro dané energie roven dle zadání $\sigma = 100 \text{ b}$, tj. $\sigma = 10^{-26} \text{ m}^2$.
 - Pro střední volnou dráhu ℓ takových protonů pak máme, užitím známého vztahu, jednoduše

$$\ell = \frac{1}{\sigma n} = 10^{20} \text{ m}.$$

- Alternativně můžeme předchozí výsledek vyjádřit jako $\ell \doteq 3,2 \cdot 10^3 \text{ pc}$. Zde pc nám neznačí součin hybnosti a rychlosti světla, ale tzv. parsek, tj. vzdálenost, z níž má jedna astronomická jednotka ($1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$) úhlový rozměr jedné vteřiny.²⁶ Konkrétně, $1 \text{ pc} \doteq 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

²⁶Jelikož se jedná o jednotku, nepíšeme ji kurzívou. Tím je rozdíl mezi parsekem a součinem hybnosti a rychlosti světla zřejmý.

- c) – Vzpomeneme-li si na řešení úlohy „Urychlovač“, je řešení tohoto bodu zřejmé. Již dříve jsme si totiž odvodili, že pro poloměr stabilní kruhové dráhy, po které se pohybuje částice (s nábojem velikosti q a s nulovou složkou hybnosti p rovnoběžnou s vektorem magnetické indukce \mathbf{B}) v magnetickém poli (o velikosti magnetické indukce B), platí

$$R = \frac{p}{qB}, \quad (\text{C.7})$$

což není nic jiného, než právě tzv. Larmorův poloměr.

- Pro protony o energiích dle řešení bodu a) víme, že jsme oprávněni psát $E_p \doteq p_p c$. Dosazením do vztahu (C.7) tak pro Larmorův poloměr R_p protonu ze zadání máme

$$R_p = \frac{E_p}{qBc} \doteq 5,4 \cdot 10^4 \text{ pc}.$$

C.3 Kosmické záření II

Ve srážkách kosmického záření s vnějšími vrstvami atmosféry vznikají ve výšce $d = 12$ km miony μ^- o energii $E = 6$ GeV. Ověřte výpočtem, doletí-li většina mionů na úroveň mořské hladiny. Předpokládejte, že letí kolmo k Zemi. Dále, diskutujte vliv ionizačních ztrát v atmosféře (náповěda: vrstvu atmosféry aproximujte vhodnou výškou vodního sloupce; pro jistotu uvažujte, že mion prolétává celou atmosférou). Klidová energie a vlastní doba života mionu jsou $m_\mu c^2 = 105,7$ MeV a $\tau_{\mu,0} = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s.

Řešení

- Předpokládejme nejdříve, že k žádným energetickým ztrátám vlivem ionizace v prostředí nedochází. Na počátku máme určité množství N_0 mionů, každý o energii $E = 6$ GeV. Miony pozorujeme v soustavě pevně spojené se Zemí. Aby úroveň mořské hladiny dosáhla většina všech mionů, tj. více než polovina, v čase t dopadu na mořskou hladinu pak jejich počet musí být $N(t) > \frac{1}{2}N_0$, přičemž pro čas t máme z exponenciálního rozpadového zákona

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\mu}\right) > \frac{1}{2}N_0$$

vztah

$$t < t_{1/2} = \tau_\mu \ln 2,$$

kde τ_μ je střední doba života mionu v soustavě pevně spojené se Zemí.

- Jinými slovy, aby na úroveň moře dolétla více než polovina všech mionů, musejí dráhu $d = 12$ km překonat za čas kratší než $t_{1/2}$, jelikož v tomto čase bude mionů právě polovina. Stačí tak určit, jakou dráhu l uletí miony za čas $t_{1/2}$, a ověřit, bude-li $l > d$. Pro tuto dráhu l platí (uvažujeme, že miony letí kolmo k Zemi)

$$l = \beta c t_{1/2}.$$

- V soustavě pevně spojené se Zemí je střední doba života τ_μ mionu γ -krát větší než jeho vlastní doba života $\tau_{\mu,0}$, tj. $\tau_\mu = \gamma\tau_{\mu,0}$, kde $\gamma = \frac{E}{m_\mu c^2}$. Platí tak

$$l = \beta c \tau_\mu \ln 2 = \beta \gamma c \tau_{\mu,0} \ln 2. \quad (\text{C.8})$$

- Jelikož relativistický faktor γ je svázán s parametrem β vztahem $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, máme $\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}}$. Pro energii $E = 6 \text{ GeV}$ je $\gamma \doteq 57$, můžeme tak psát $\beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \doteq 1$. Tedy po dosazení dostaneme

$$l \doteq 26 \text{ km},$$

a tedy mionů, vzniknuvších srážkami kosmického záření s atmosférou, tak na úroveň moře dolétne alespoň polovina.

- Nyní odhadneme energetické ztráty vlivem ionizace, přičemž ionizační ztráty mionu v atmosféře aproximujeme ionizačními ztrátami ve vodě. Z úvah o hydrostatickém tlaku si pamatujeme, že atmosférický tlak na hladině moře lze přirovnat k vodnímu sloupci o výšce asi 10 m. Miony ztrácejí ve vodě ionizací přibližně $2 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^{-1}$, neboli $200 \text{ MeV} \cdot \text{m}^{-1}$. Tedy, po průchodu vodním sloupcem této výšky mion ztratí ionizací $\Delta E = 2 \text{ GeV}$.
- Pro jednoduchost a hrubý odhad si můžeme dále představit, že mion nebude ztrácet energii ionizací průběžně během letu atmosférou, ale ztratí $\Delta E = 2 \text{ GeV}$ najednou. Tedy, uvažujme nyní, jakou dráhu uletí za čas $t_{1/2}$ mion o energii $E' = E - \Delta E = 4 \text{ GeV}$. V tomto případě je $\gamma' \doteq 38$, čímž ze vztahu (C.8) dostáváme $l \doteq 17 \text{ km}$. Tedy, i se započtením ionizačních ztrát dopadne na úroveň mořské hladiny alespoň polovina všech mionů.

C.4 Rozpad protonu

Při studiích potenciálních rozpadů protonu (s uvažovaným poločasem rozpadu $\tau_{1/2} > 10^{30}$ let) se uvažuje rozpad $p \rightarrow e^+ + \pi^0$. Klidové energie protonu, pozitronu a pionu jsou $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$, $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ a $m_\pi c^2 = 135 \text{ MeV}$.

- Určete celkové energie produkovaného pozitronu a neutrálního pionu v tomto rozpadu za předpokladu, že se proton rozpadá v klidu. Postupujte relativisticky.
- Mohou pozitron a pion emitovat Čerenkovovo záření ve vodě o indexu lomu $n = 1,33$? Pokud ano, určete, pod kterým úhlem, vzhledem k jejich směru letu, k emisi Čerenkovova záření dochází.

Řešení

- Položme $c = 1$. Zapišme čtyř-hybnosti protonu, pozitronu a pionu v soustavě pevně spojené s protonem po řadě jako $P_p = (m_p, \mathbf{0})$, $P_e = (E_e, \mathbf{p}_e)$ a $P_\pi =$

(E_π, \mathbf{p}_π) , přičemž $P_p = P_e + P_\pi$. Ze zákona zachování energie plyne $m_p = E_e + E_\pi$, ze zákona zachování hybnosti pak $\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\pi = \mathbf{0}$, tj. $p_e = p_\pi$. Platí

$$(P_p - P_e)^2 = P_\pi^2,$$

tj.

$$(m_p - E_e)^2 - p_e^2 = E_\pi^2 - p_\pi^2.$$

- Roznásobením levé strany a užitím relativistického vztahu energie–hybnost na obou stranách rovnice, je možné vyjádřit energii pozitronu jako

$$E_e = \frac{m_p^2 + m_e^2 - m_\pi^2}{2m_p}. \quad (\text{C.9})$$

Jelikož $E_\pi = m_p - E_e$, platí

$$E_\pi = \frac{m_p^2 + m_\pi^2 - m_e^2}{2m_p}.$$

- Co se týče emise Čerenkovova záření, pion jej emitovat nemůže, jelikož je elektricky neutrální. O tom, zdalipak může toto záření emitovat pozitron, se však musíme přesvědčit výpočtem. Tím musíme určit rychlost pozitronu ve vodě a zjistit, je-li jeho rychlost větší než rychlost světla ve vodě.
- Pro rychlost β_e pozitronu platí

$$\beta_e = \frac{p_e}{E_e},$$

kde jeho energii E_e již známe, viz. (C.9), a velikost hybnosti p_e lze určit ze vztahu energie–hybnost, konkrétně $p_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2}$. Po dosazení za energii E_e a jednoduchých algebraických úpravách lze dojít k výrazu

$$p_e = \frac{\sqrt{m_p^4 + m_e^4 + m_\pi^4 - 2m_p^2 m_e^2 - 2m_p^2 m_\pi^2 - 2m_e^2 m_\pi^2}}{2m_p} = \frac{\sqrt{\lambda_K(m_p^2, m_e^2, m_\pi^2)}}{2m_p},$$

kde jsme využili elegantního zápisu pomocí Källénovy funkce. Pro rychlost pozitronu ve vodě tak máme

$$\beta_e = \frac{\sqrt{\lambda_K(m_p^2, m_e^2, m_\pi^2)}}{m_p^2 + m_e^2 - m_\pi^2}.$$

- b) – Dosazením číselných hodnot dostaneme, že rychlost pozitronu ve vodě je $\beta_e \doteq 1$, zatímco rychlost světla ve vodě je $\beta_{\text{light}} = \frac{1}{n} \doteq 0,75$. Ano, pozitron tak bude ve vodě emitovat Čerenkovovo záření, a to pod úhlem

$$\theta_e = \arccos\left(\frac{1}{\beta_e n}\right) \doteq 41,2^\circ$$

vůči jeho směru letu.

C.5 Rozpad neutrálního pionu

Neutrální pion π^0 o klidové energii $m_\pi c^2 = 135 \text{ MeV}$ se za letu rozpadá na dvojici fotonů, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, přičemž pozorovatel detekoval foton, který letěl proti směru pohybu pionu, o energii $E_\gamma = 10 \text{ MeV}$. Určete rychlost pionu.

Řešení

- Položme $c = 1$. Studujeme rozpad $\pi^0 \rightarrow \gamma_a + \gamma_b$. Uvažujme těžišтовую soustavu spojenou s rozpadajícím se pionem (pion je v klidu, fotony letí proti sobě se stejnou energií). Zde je čtyř-hybnost pionu $P_\pi = (m_\pi, \mathbf{0})$, zatímco čtyř-hybnosti obou vzniknuvších fotonů jsou $P_a = (E_a, \mathbf{p}_a)$ a $P_b = (E_b, \mathbf{p}_b)$. Ze zákona zachování energie máme $E_a + E_b = m_\pi$. V těžištové soustavě letí fotony do opačných směrů, tj. $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{0}$, resp. $p_a = p_b$, a tedy $E_a = E_b$.

- Ze zákona zachování energie tak máme

$$E_a = E_b = \frac{1}{2} m_\pi.$$

- Pro foton γ_a , který se v těžištové soustavě pohybuje proti směru rozpadajícího se pionu ($\mathbf{p}_a \cdot \boldsymbol{\beta} = -\beta p_a$), lze z Lorentzovy transformace psát

$$E_\gamma = \gamma(E_a - \beta p_a),$$

kde E_γ je energie tohoto fotonu γ_a měřená pozorovatelem v laboratorní soustavě, p_γ je odpovídající velikost hybnosti, též v soustavě pozorovatele. Ekvivalentně, pro druhý foton by bylo

$$E'_\gamma = \gamma(E_b + \beta p_b).$$

Foton γ_a letí v těžištové soustavě „dozadu“, zatímco foton γ_b „dopředu“, tj. v původním směru letu pionu. To, že γ_b letí opačným směrem než γ_a , vede ke změně znaménka u parametru β .

- Dosazením $E_a = p_a$ energie za hybnost dostáváme

$$E_\gamma = \gamma(E_a - \beta p_a) = \gamma(E_a - \beta E_a) = E_a \gamma(1 - \beta).$$

Jelikož $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, je $\gamma(1 - \beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, a tedy

$$E_\gamma = E_a \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

- Pro velikost v rychlosti těžištové soustavy, a tedy pionu, pak platí $v = \beta c$, kde

$$\beta = \frac{E_a^2 - E_\gamma^2}{E_a^2 + E_\gamma^2} = \frac{m_\pi^2 - 4E_\gamma^2}{m_\pi^2 + 4E_\gamma^2}.$$

Číselně vychází

$$\beta \doteq 0,96, \quad v \doteq 2,9 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Literatura

- [1] D. Nosek, *Jádra a částice. Řešené příklady*, Matfyzpress, Praha (2005).