Zápočtový test č. 1.

Jméno: Skupina:

1. Spočítejte (nebo ukažte, že neexistuje)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} + (-1)^n n}{\sqrt{n^2-n} + 2n}.$$

2. Spočítejte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

3. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{2n} \cdot n!}.$$

4. V závislosti na parametru $x (\in \mathbb{R})$ zjistěte, zda konverguje absolutně, konverguje neabsolutně či diverguje řada

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{3n}{n^2+1} (x+1)^n.$$

5. Nechť $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Co je možné říci o $\lim_{n\to\infty} (-1)^n b_n$? Pečlivě dokažte.

Zápočtový test č. 1. (B)

Jméno: Skupina:

1. Spočtěte limitu (nebo ukažte, že neexistuje):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{|\sin n|} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{4n+1} - \cos n\pi}.$$

2. Posloupnost $\{a_n\}$ je dána rekurentně:

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ukažte, že existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$ a tuto limitu vypočtěte.

3. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}.$$

4. V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ rozhodněte, zda konverguje absolutně, konverguje neabsolutně či diverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2n^2-1} \cdot \frac{(x-2)^n}{2^n}.$$

5. Nechť $\lim_{n\to\infty} |a_n| = a$, $a > 0$. Pak buď $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = -a$, nebo posloupnost $\{a_n\}$ limitu nemá. Ukažte.