Zápočtové příklady

3. Již na cvičeních jsem zmínil, že je možné najít grupu G, v ní normální podgrupu H ($H \trianglelefteq G$), a v H (to je samo o sobě též grupa) normální podgrupu K ($K \trianglelefteq H$), ale nebude platit, že $K \trianglelefteq G$. Nalezněte taková G, H a K.

4. Představte si rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy pojmenuji 1, 2, a 3. Symetrií trojúhelníka rozumím bijektivní zobrazení mezi vrcholy, které stranu převádí na stranu (například $1 \to 1$, $2 \to 3$, $3 \to 2$ převádí skutečně strany na strany – $12 \to 13$, $13 \to 12$, $23 \to 32$ a toto zobrazení odpovídá osové symetrii podle osy strany 23). Bijektivní zobrazení na konečné množině jsou vlastně permutace (výše uvedený příklad odpovídá permutaci (23)). Uvážíme-li nyní, že všechny symetrie pravidelného n-úhelníka tvoří grupu (to si rozmyslete!), označme jí D_n, vidíme, že $D_n \leq S_n$. Pro $n = 3$ platí, že $D_3 = S_3$, neboť permutace (12) odpovídá osové symetrii dle osy strany 12, permutace (13) odpovídá osové symetrii dle osy strany 13, permutace (23) odpovídá osové symetrii dle osy strany 23, permutace (123) odpovídá otočení o 120 stupňů, permutace (132) odpovídá otočení o 240 stupňů a identita zůstává identitou. Nyní konečně úkol pro vás. Popište D_4, tedy grupu symetrií čtverce a všechny její podgrpuy.

5. V písemce jste mi měli dokázat, že v grupě $G(\cdot, ^{-1}, 1_G)$, pro daný prvek $g \in G$, je zobrazení $f_g : G \to G$, $f_g(x) = gxg^{-1}$ automorfismus. Teď zavedu zobrazení $F : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $F(g) = f_g$. Zjistěte, zda je F homomorfismus grup ($\mathrm{Aut}(G)$ uvažujte s operacemi $\circ$, $^{-1}$, id_G) a zda je prosté (jestli je na po vás po zkušenosti z písemky radši vědět nechci). Dále zjistěte, jak vypadá množina $\mathrm{Ker}(F)$ (o ní ze cvičení víte, že to bude normální podgrupa G). Ještě vám prozradím, že $\mathrm{Im}(F) = \{f_g; g \in G\}$ se nazývá množina vnitřních automorfismů a značí se $\mathrm{Inn}(G)$. A poslední úkol pro vás je dokázat, že $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.