Cvičení MAI – limita posloupnosti

I. Definice limity posloupnosti – unik.

1. Odhadněte existenci a hodnotu limit následujících posloupností a pak dokažte unikátnost definice (nebo ukažte, že posloupnost limitu nemá):

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\};\quad \left\{\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right\};\quad \left\{\frac{1}{n}\sin n\right\};\quad \left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\right\};$$

$$\left\{a^n\right\},\ a\in\mathbb{R};\quad \left\{\sqrt[n]{a}\right\},\ a>0;\quad \left\{na^n\right\},\ a>0.$$

2. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení, dokažte, případně opravte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$

c) $(\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : a_n \leq b_n) \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$

d) $(\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : a_n < b_n) \Rightarrow \lim a_n < \lim b_n$

e) $\lim a_n < \lim b_n \Rightarrow (\exists n_0\ \forall n>n_0 : a_n < b_n)$

f) Je dána posloupnost $\{a_n\}$; def. $\{b_n\}$:

$b_{2n-1} = a_n,\ b_{2n} = 0$; platí

$\lim a_n = a \iff \lim b_n = a$?

3. Dokažte následující tvrzení:

a) $\{a_n\}$ je konvergentní $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ je omezená

b) $\{a_n\}$ je konvergentní $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ je cauchyovská

c) $\lim a_n = 0$, $\{b_n\}$ ograniczony $\Rightarrow \lim a_n \cdot b_n = 0$;

d) $\lim a_n = +\infty$, $\{b_n\}$ zdala ograniczony dodatnio $\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim a_n b_n = +\infty$
(analog. dla $\lim a_n = -\infty$);

e) mamy dane $\{a_n\}$, wiemy $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$, dowieść $\lim_{n\to\infty} a_n = a$;

f) wiemy $\lim a_n = a$ a wiemy $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$, dowieść $\lim b_n = a$;

g) wiemy $\{a_n\}$ jest zbieżny, $\{a_{n_k}\}$ wybrany z $\{a_n\}$, wiemy $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, dowieść $\lim_{n\to\infty} a_n = a$;

h) $a_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim a_n = 0$;

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = A$,
$(a_n > 0)$

j) $\lim a_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$

$\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim \left|\frac{1}{a_n}\right| = +\infty$

$\lim a_n = 0 \;\wedge\; (\exists n_0 \; \forall n > n_0 : a_n > 0) \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = +\infty$

$\lim a_n = 0 \;\wedge\; (\exists n_0 \; \forall n > n_0 : a_n < 0) \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = -\infty$

I. Výpočet limit.

Určete následující limity:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1}$; 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+2}$; 3. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-n^2+1}{n^3+2n^2-n}$;

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$; 5. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+1}$; 6. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2-1}$;

7. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$; 8) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}\right)$;

9) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n-3} - n\right)$; 10) $\lim_{n\to\infty} \left(\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}\right)$;

10) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{n}$; 11) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$;

12) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$; 13) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}$ $(A,B,C>0)$

14) $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} q^n$; 15) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; 16) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

17) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$; 18) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$

Užití věty o „dvou policajtech"

1. Formulujte věty analogické větě „o dvou policajtech" pro nevlastní limity.

2. Určete následující limity:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2}$; $\lim_{n\to\infty} n(\sin n + 2)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a\in R$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$;

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^4}$; $\lim_{n\to\infty} n a^n$, $a>0$; $\lim_{n\to\infty} n^2 a^n$, $a>0$;

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$ ($[\cdot]$ - celá část)

Limita posloupnosti

1. Ukažte, že posloupnost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí a posloupnost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ klesající. Odtud ukažte, že tyto posloupnosti mají stejnou limitu (označujeme e), tj. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$

2. Nechť $\lim a_n = +\infty$ $(a_n \in \mathbb{Q}, a_n>0)$. Pak

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e^{-1}$.

3. Vypočtěte limity:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$;

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$; $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$.