Axiomy VL:
A1 (A→(B→ A))
A2 (A→ (B →C))→[(A→ B)→(A→C)]
A3 (¬B →¬A)→(A→ B)

A, A→B / B

(v1) A→ A

Veta o dedukci
Nechť T je množina formulí a nechť A, B jsou formule, potom T |– A→ B práve když T, A |– B

(v2) ¬A→(A→ B)
(v3) ¬¬A→ A
(v4) A→¬¬A
(v5) (A→ B)→(¬B→¬A)
(v6) A→ (¬B → ¬(A→ B))
(v7) (¬A→ A)→ A

• Con(T) = {A|T |- A}
• T ⊆ Con(T)
• Je - li T ⊆ S potom Con(T) ⊆ Con(S)
• Con(Con(T)) = Con(T)
• Tl-A práve když T, ¬A je sporná

Nechť T je maximální bezesporná mnozina a A, B jsou formule.
• je-li T |- A, potom A∈T
• T je sporná práve když T |- p & ¬p pro nejakou výrokovou promennou
• pro kazdou formuli A, prave jedna z formuli A, ¬A je prvkem T
• A&B∈T práve když A∈T a B∈T
• AvB∈T práve když A nebo B náleží do T

Veta (Lindenbaum)
Každnou bezespornou množinu formulí T lze rozšírit do maximální bezesporné množiny S, T⊆S.

Veta o bezespornosti a splnitelnosti
Je-li T množina formulí výrokové logiky, potom T je bezesporná, práve když je splnitelná.

Vety o úplnosti.
Je-li T množina formulí, A formule, potom platí
(i) T |– A práve když T |= A
(ii) |– A práve když |= A
Z (ii) plyne, že A je vetou výrokové logiky, práve když A je tautologie.

Veta o kompaktnosti.
Množina formulí T je splnitelná, práve když je splnitelná každá konecná podmnožina množiny T.
Dusledek: Je li T |= A pak existuje konecná podmnožina T'⊆T taková že T'|=A

A&B |– A; A&B |– B; A, B |– A&B

(i) |– A ↔ (A& A) (idempotence)
(ii) |– (A& B) ↔ (B& A) (komutativnost)
(iii) |– ((A& B)&C) ↔ (A&(B&C)) (asociativnost)
(iv) |– (A1→...(An→B)...)) ↔ ((A1&...&An) →B)

Věta o ekvivalenci.
Nechť formule A´ vznikne z formule A nahrazením některých výskytů podformulí $A_1,...,A_n$ formulemi A'1,...,A'n. Je-li |– A_1 ↔ A'1,..., |– A_n ↔ A'n, potom |– A ↔ A'

de Morganova pravidla.
(i) |– ¬ (A& B) ↔ (¬ Av ¬ B)
(ii) |– ¬ (Av B) ↔ (¬ A&¬ B)

Důsledek.
(i) |– A → (AvB), |– B → (AvB) (monotonnost)
(ii) |– A ↔ (AvA) (idempotence)
(iii) |– (AvB) ↔ (BvA) (komutativnost)
(iv) |– ((AvB)vC) ↔ (Av(BvC)) (asociativnost)

Lemma o důkazu rozborem případů.
Je-li T množina formulí a A, B, C jsou formule, potom
T, (AvB) |– C právě když T, A |– C a T, B |– C

Distributivnost konjunkce a disjunkce
(i) |– (Av(B&C)) ↔ ((AvB)&(AvC))
(ii) |– (A&(BvC)) ↔ ((A& B)v(A&C))

Věta o normálních tvarech.
Ke každé formuli A lze sestrojit formule A_k, A_d v konjunktivním a disjunktivním tvaru, tak že |– A ↔ A_k a |– A ↔ A_d.

(i) Každá proměnná je **term**.
(ii) Je-li f n-ární funkční symbol a výrazy $t_1,...,t_n$ jsou termy, potom výraz $f(t_1,...,t_n)$ je term.
Termy jsou definovány konečným počtem užití pravidel (i) a (ii). Tedy jsou to konečná slova.

(i) Je-li p n-ární predikátový symbol, potom výraz $p(t_1,...,t_n)$ kde $t_1,...,t_n$ jsou termy, je (atomická) **formule**.
(ii) Jsou-li výrazy A, B formule, potom výrazy ¬A, (A& B), (AvB), (A → B), a (A ↔ B) jsou také formule.
(iii) Je-li x proměnná a A formule, potom výrazy (∀x)A a (∃x)A jsou formule.

Nechť t je term a A je formule.
(i) Podslovo s termu t, které je samo termem nazveme **podtermem** termu t. Podslovo B formule A, které je samo formulí nazveme **podformulí** formule A.
(ii) Daný výskyt proměnné x ve formuli A je **vázaný**, je-li součástí nějaké podformule tvaru (∀x)B nebo (∃x)B. Není-li daný výskyt proměnné x vázaný, říkáme, že je **volný**.
(iii) Říkáme, že proměnná x je **volná** ve formuli A, má-li tam volný výskyt. Proměnná x je **vázaná** v A, má-li tam vázaný výskyt.
(iv) Formule A je **otevřená**, pokud neobsahuje žádnou vázan ou proměnnou. A je **uzavřená**, neobsahuje-li žádnou volnou proměnnou.

Interpretace jazyka je definována množinovou (relační) strukturou M která ke každému symbolu jazyka a k množině proměnných přiřadí množinu individuí. Relační struktura M obsahuje
• neprázdnou množinu M pro individua.
• zobrazení f_M:M^n→M pro n-ární funkční symbol f
• relaci p_M⊆M pro každý n-ární predikát p

Interpretaci termu t při ohodnocení e označíme t[e]. Definujeme
t[e] = e(x), je-li t proměnná x
$t[e] = f_M(t_1[e],...,t_n[e])$, je-li t tvaru $f(t_1,...,t_n)$

Tarského definice pravdy
Nechť L je jazyk, M jeho interpretace, e pravdivostní ohodnocení a A je formule jazyka L.
(i) Říkáme, že A je splněna v M při ohodnocení e a píšeme M |= A[e] jestliže (indukcí podle složitosti A)
a) A je atomická , kde p není rovnost. Potom M |= A[e] , jestliže $(t_1[e],...,t_n[e]) \in p_M$
b) A je atomická, A ≡ t_1=t_2 a $t_1[e]$=$t_2[e]$
c) A je tvaru ¬B a M |≠ B[e].
d) A je tvaru B → C a M |≠ B[e] nebo M |= C[e].
Je-li e ohodnocení proměnných, x je proměnná a m je prvek z domény M, pozměněné ohodnocení e(x/m) definujeme
e(x/m)(y)=m, je-li y≡x nebo =e(y), je-li y≡/x
e) A je tvaru(∀x)B a M |= B[e(x/m)] pro každé m∈M.

f) A je tvaru(∃x)B a M |= B[e(x/m)] pro nějaké m∈M.
(ii) Říkáme, že formule A je pravdivá v M a píšeme M |= A, je-li A splněna v M při každém ohodnocení proměnných.

Říkáme, že formule je **validní (platná) nebo logicky pravdivá** a píšeme |= A, jestliže je pravdivá při každé interpretaci daného jazyka. Tedy |= A právě když M |= A pro každou interpretaci M.

(∃x)A je zkratka za formuli ¬(∀x)¬A.

Formální systém predikátové logiky bez rovnosti.
Axiomy pro kvantifikátory.
Schéma specifikace. Je-li A formule, x proměnná a t je term, potom formule (∀x)A → $A_x[t]$ je axiom specifikace predikátové logiky.
Schéma „přeskoku“. Jsou-li A, B formule a je-li x proměnná, která nemá volný výskyt ve formuli A, potom formule
(∀x)(A→B)→(A→(∀x)B) je axiom predikátové logiky.

Odvozovací pravidla.
Modus ponens: A, A → B / B
Pravidlo generalizace: A / (∀x)A pro libovolnou proměnnou x.

Základní věty o kvantifikátorech.
Pravidlo zavedení V.
Nemá-li proměnná x volný výskyt ve formuli A a |– A→B potom |– A→(∀x)B
Pravidlo substituce, Pravidlo zavedení E.
(i) |– $A_x[t]$ → (∃x)A
(ii) Je-li |– A → B a x není volná v B, potom také |– (∃x)A → B.

Specifikace a substituce.
Je-li A formule, $x_1,...,x_n$ proměnné a $t_1,...,t_n$ termy, potom platí
(i) $(\forall x_1),..., (\forall x_n)A \rightarrow Ax_1,...,x_n[t_1,...t_n]$
(ii) $Ax_1,...,x_n [t_1,...t_n] \rightarrow (\exists x_1),... (\exists x_n)A$

Uzávěr formule
Jsou-li všechny proměnné s volným výskytem ve formuli A v nějakém pořadí, potom formuli $(\forall x_1)... (\forall x_n)$A nazveme uzávěrem formule A.

Věta o uzávěru.
Je-li A´ uzávěr formule A, potom platí |– A právě když |– A´

Lemma o distribuci kvantifikátorů
Je-li |– A → B, potom |– (∀x)A → (∀x)B a |– (∃x)A → (∃x)B

Věta o ekvivalenci.
Nechť formule A´ vznikne z formule A nahrazením některých výskytů podformulí $B_1,...,B_n$ po řadě formulemi $B'_1,...B'_n$. Je-li |- B_1 ↔ B'_1,..., |- B_n ↔ B'_n potom |– A ↔ A´

Říkáme, že formule A´ je **variantou** formule A, jestliže A´ vznikne z A postupným nahrazením podformulí (Qx)B formulemi kde y není volná ve formuli B a Q je univerzální nebo existenční kvantifikátor.

Věta o variantách
Je-li A´ variantou formule A, potom |– A ↔ A´

Věta o dedukci
Nechť T je množina formulí, A je uzavřená formule a B je libovolná formule. Potom T |– A → B právě když T, A|– B.

Věta o konstantách
Nechť T je množina formulí jazyka L a A je formule jazyka L.
Nechť $x_1,...,x_n$ jsou proměnné. Nechť jazyk L´ vznikne rozšířením L o nové symboly $c_1,...,c_n$ pro konstanty. Potom platí T |-L'
$Ax_1,...,x_n[c_1,...,c_n]$ prave když T |-L A

Konstanty a Věta o dedukci.
Chceme-li dokázat implikaci A → B z T a A má volné proměnné $x_1,...,x_n$, rozšíříme jazyk o nové konstanty $c_1,...,c_n$. Stačí dokázat T, $Ax_1,...,x_n[c_1,...,c_n]$ |- $Bx_1,...,x_n[c_1,...,c_n]$ a z Věty o dedukci a Věty o konstantách dostaneme T |– A → B.

Důsledek.
Je-li A´ uzávěr formule A a T je množina formulí, potom T |– A, právě když T∪{¬A´} je sporná.

Formule A je v **prenexním tvaru**, jeli A = $(Q_1x_1)...(Q_nx_n)$B
B je otevřená formule a kvantifikované proměnné jsou navzájem různé. Formule B se nazývá otevřené jádro A a posloupnost kvantifikací před B se nazývá prefix.

Věta o prenexních tvarech
Ke každé formuli A lze sestrojit formuli A´, v prenexním tvaru, která je s ní ekvivalentní.

Prenexní operace.
Pro libovolné formule B, C , kvantifikátor Q a proměnnou x platí
a) v případě potřeby nahradíme nějakou podformuli její variantou (ta je s ní ekvivalentní).
b) |– ¬(Qx)B ↔ (Qx)¬B
c) |– (B → (Qx)C) ↔ (Qx)(B → C) , pokud x není volná v B.
d) |– ((Qx)B → C) ↔ (Qx)(B → C) , pokud x není volná v C.
e) |– ((Qx)B ◊ C) ↔ (Qx)(B ◊ C) , pokud x není volná v C.
Symbol ◊ zastupuje konjunkci nebo disjunkci.

Schema axiomů identity.
Je-li x proměnná, pak následujicí formule je axiom identity x = x (**R1**) {Leibnitzův axiom}

Schema axiomů rovnosti pro funkce.
Je-li f n-ární funkční symbol, a $x_1,...,x_n$ a $y_1,...,y_n$ jsou proměnné, potom následující formule je axiom rovnosti pro funkce.
$x_1=y_1 \rightarrow ...x_n=y_n \rightarrow f(x_1,...,x_n)=f(y_1,...y_n)$ (**R2**)

Schema axiomů rovnosti pro predikáty.
Je-li p n-ární predikátový symbol, a $x_1,...,x_n$ a $y1,...,y_n$ jsou proměnné, potom následující formule je axiom rovnosti pro predikáty. $x_1=y_1 \rightarrow ...x_n=y_n \rightarrow p(x_1,...,x_n)=p(y_1,...y_n)$ (**R3**)

Elementární vlastnosti rovnosti.
O rovnosti se předpokládá, že je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
|– x=x, |– x = y → y = x, |– y = x → y = z → x = z

Základní věta o rovnosti.
Nechť T je množina formulí a $t_1,...,t_n$ a $s_1,...,s_n$ jsou termy pro, které platí T |– t_1 = s_1, ... T |– t_n = s_n
(i) Je-li t term a term s z něj vznikne záměnou některých výskytů termů ti odpovídajícími termy si, potom T |– t = s
(ii) Je-li A´ formule, která vznikne z formule A záměnou některých výskytů termů ti odpovídajícími termy si ne však bezprostředně za kvantifikátorem, potom T |– A´≡ A

Teorie prvního řádu.
Je-li L jazyk prvního řádu a T množina jeho formulí, říkáme, že T je teorie prvního řádu s jazykem L. Formulím z množiny T říkáme speciální axiomy teorie T. Predikátová logika je zvláštním případem teorie prvního řádu, která nemá žádné speciální axiomy.

(i) Je-li T teorie s jazykem L a M je interpretace jazyka L, říkáme, že M je **modelem teorie** T a píšeme M |= T, jestliže každý speciální axiom teorie T , tedy každá formule z T je pravdivá v M.
(ii) Říkáme, že formule A je **sémantickým důsledkem teorie** (množiny) T a píšeme T |= A, jestliže A je pravdivá v každém modelu teorie T .

Jazyk elementární aritmetiky obsahuje rovnost a speciální symboly 0, S, +, ∗ kde
• 0 je konstanta pro nejmenší přirozene číslo,
• S je unární funkční symbol pro následující přirozené číslo S(x) = x+1
• + a ∗ jsou binární funkční symboly pro operace sčítání a násobení.

Elementární aritmetika má tyto speciální axiomy
S(x) ≠ 0
S(x) = S(y) → x = y
x ≠ 0 → (∃y)(S(y) = x)
x + 0 = x
x + S(y) = S(x + y)
x ∗0 = 0
x ∗ S(y) = (x ∗ y) + x

Interpretace N , jejíž doménou jsou přirozená čísla,
0_N = 0
S_N (x) = x + 1 = (x ∪ {x})
x +N y = x + y = (x ⊕ y) ordinální součet
x *N y = x * y = (x ⊗ y) ordinální součin
Se **nazývá standardní model aritmetiky**.

Věta o korektnosti.
Je-li T teorie, A formule T, potom platí T |– A => T |= A. Speciálně |– A => |= A

Věta o úplnosti.
Nechť T je teorie s jazykem L.
(i) je-li A libovolná formule jazyka L, potom platí T |– A právě když T |= A
(ii) Teorie T je bezesporná, právě když má model.

Kanonická struktura M .
• Universum M = {t | t je term bez proměnných}
• Funkční symboly (nepotřebujeme ohodnocení proměnných). Je-li $t_1,...t_n \in$ M a f je n-ární funkční symbol, jeho realizaci definujeme následovně
$f_M(t_1,...t_n)=f(t_1,...t_n) \in$ M
• Predikátové symboly. Je-li p n-ární predikátový symbol, jeho interpretace pM se definuje takto
$(t_1,...t_n) \in p_M <=> T \vdash p(t_1,...,t_n)$

Nechť M je kanonická struktura pro L. Nechť A je atomická formule bez proměnných jazyka L. Potom platí M |= A <=> T |– A

Nechť T je teorie s jazykem L.
(i) Říkáme, že T je **úplná teorie**, je-li bezesporná a pro libovolnou uzavřenou formuli A jazyka L je jedna z formulí A a ¬A dokazatelná v T.
(ii) Říkáme, že T je **Henkinova teorie**, jestliže pro libovolnou uzavřenou formuli tvaru (∃x)B existuje konstanta c, taková, že T |- (∃x)B → $B_x[c]$

Věta o kanonickém modelu.
Je-li T úplná a Henkinova teorie, potom kanonická struktura M pro T je modelem T .

• Nechť L a L´ jsou jazyky, nechť T je teorie s jazykem L a T´ je teorie s jazykem L´.
• Definice. Říkáme, že jazyk L´ je **rozšířením jazyka** L, jestliže každý symbol jazyka L je symbolem jazyka L´ stejného významu a stejné četnosti.
• Definice. Říkáme, že teorie T´ je **rozšířením teorie** T , jestliže L´ je rozšířením L a každý axiom teorie T je větou teorie T´.
• Definice. Říkáme, že T´ je **konzervativní rozšíření** T, je-li to rozšíření a pro každou formuli A jazyka L platí T´|– A => T |– A.

Pozorování.
(i) je-li T´ rozšířením teorie T a T´ je bezesporná, potom T je také bezesporná.
(ii) je-li T´ konzervativní rozšíření T, potom T je bezesporná, právě když je bezesporná teorie T´.

Věta. (Henkin)
Ke každé teorii T lze sestrojit konzervativní rozšíření T_H, které je Henkinovou teorií.

Věta (Lindenbaum)
Každnou bezespornou teorii T lze rozšířit do úplné teorie S se stejným jazykem jako T .

Redukce a expanze struktur
Definice. Je-li L´ rozšíření jazyka L, potom
(i) je-li M´ je interpretace jazyka L´, redukce struktury M´ do jazyka L, kterou označíme M´| L, vznikne z M´ vynecháním těch zobrazení a relací, které interpretují funkční a predikátové symboly, které nejsou v jazyce L.
(ii) je-li M interpretace jazyka L a M´ interpretace L´, říkáme, že M´ je expanzí M, jestliže M = M´| L. Povšimněme si, že redukce a expanze mají stejné univerzum.

Lemma.
Nechť T´ je rozšíření teorie T, která má jazyk L. Je-li M´ model teorie T´ potom redukt M = M´| L je model teorie T.

Věta o kompaktnosti.
Teorie T má model, právě když každý její konečný fragment T´⊆T má model.

Důsledek.
Je-li T teorie s jazykem L, A je libovolná formule jazyka L, potom T |= A <=> T' |- A pro nějaký konečný fragment T'⊆T

Peanova aritmetika prvního řádu vznikne z Elementární aritmetiky přidáním schematu axiomů indukce: pro každou formuli A a proměnnou x je následující formule axiom indukce.
$A_x[0] \rightarrow ((\forall x)(A \rightarrow A_x[S(x)]) \rightarrow (\forall x)A)$
Snadno se ověří, že standardní model (elementární) aritmetiky je také modelem Peanovy aritmetiky prvního řádu.

Užitečné lemma
Nechť L´ je rozšířením jazyka L a nechť T je teorie s jazykem L a T´ teorie s jazykem L´.
(i) T´ je rozšířením T, právě když redukt M´|L každého modelu M´ teorie T´ je modelem T.
(ii) Je-li T´ rozšířením T a každý model M teorie T lze expandovat do modelu M´ teorie T´, potom T´ je konzervativní rozšíření T.

Věta o definici predikátu.
Nechť T je teorie s jazykem L , nechť $x_1,...,x_n$ jsou proměnné. Nechť D je formule jazyka L, taková, že všechny její volné proměnné jsou mezi $x_1,...,x_n$.
Nechť jazyk L´ vznikne z L přidáním nového n-árního predikátového symbolu p a nechť rozšíření T´ teorie T vznikne přidáním axiomu $p(x_1,...,x_n) \leftrightarrow D$
Potom T´ je konzervativní rozšíření T a nově definovaný symbol lze z každé formule B´ jazyka L´ eliminovat tak, že pro upravenou formuli B platí T´|– B ↔ B´

Rozšíření teorie o funkční symboly.
a) Řekneme-li „nechť p je nějaké prvočíslo p > x“, zavádíme funkci f(x), formulí, která určí množinu možných hodnot a f(x) vyberere jednu z nich, ale nám nezáleží na tom, kterou.
b) Řekneme-li „nechť p je nejmenší prvočíslo p, p > x“, definujeme hodnotu p jednoznačně. V takovém případě definujeme funkci f(x) = p formulí, která definuje hodnotu funkce jednoznačně.
Zavedení funkčního symbolu je jedinou možností v situaci, kdy umíme dokázat, že pro každou hodnotu argumentu je množina možných hodnot neprázdná, ale neumíme z nich žádnou jednoznačně definovat. Definice funkčního symbolu odpovídá situaci, kdy se nám to podaří.

Věta o zavedení funkčního symbolu.
Nechť T je teorie s jazykem L , nechť formule (∃y)A jazyka L má všechny volné proměnné mezi $x_1,...,x_n$. Nechť T´ vznikne z T rozšířením jazyka o nový funkční n-ární symbol f a přidáním axiomu $Ay[f(x_1,...,x_n)]$. Potom T´ je konzervativním rozšířením teorie T .

Připomeňme, že množina m je dobře uspořádaná relací < jestliže každá neprázná podmnožina m´ má nejmenší prvek vzhledem k < .
Věta o dobrém uspořádání.
Na každé množině existuje relace dobrého uspořádání.

Říkáme, že T je **otevřená teorie**, jestliže všechny axiomy z T jsou otevřené formule.
Věta (Skolem)
K libovolné teorii T lze sestrojit otevřenou teorii T´, která je konzervativním rozšířením T .

(i) říkáme, že formule A je **univerzální (existenční)**, je-li v prenexním tvaru a všechny kvantifikátory jsou univerzální (existenční).
(ii) **Teorie** T a S se stejným jazykem jsou **ekvivalentní**, jestliže mají stejné věty. Píšeme T ≡ S.

Skolemova varianta formule.
Je-li A uzavřená formule v prenexním tvaru, indukcí podle počtu existenčních kvantifikátorů sestrojíme uzavřenou univerzální formuli A_S takovou, že |- $A_S \rightarrow A$.
(i) je-li A univerzální, A_S je A
(ii) je-li A tvaru $(\forall x_1)... (\forall x_n) (\exists y)B$, n ≥0, nechť f je nový n-ární funkční symbol, definujeme
formuli $A°, (\forall x_1)... (\forall x_n)B_y[f(x_1,...,x_n)]$
Pokud formule A° není otevřená, stejným postupem sestrojíme formuli A°° ... až po konečném počtu kroků sestrojíme formuli A_S.
K sestrojení Skolemovy varianty potřebujeme rozšířit jazyk o konečně mnoho nových funkčních symbolů. Podle substitučního lemmatu platí |- $A_0 \rightarrow A$ a tedy |- $A_S \rightarrow A$

Věta o definici funkčního symbolu.
Nechť L je jazyk, různé proměnné. Nechť T je teorie s jazykem L a D formule jazyka L s volnými proměnnými mezi $x_1,...,x_n,y$.
Nechť platí
T |- (∃y)D
T |- D →$(D_y[t] \rightarrow y=t)$
Nechť T´ vznikne z T přidáním nového n-árního funkčního symbolu f a definujícího axiomu $y= f(x_1,...,x_n) \leftrightarrow D$
Potom T´ je konzervativní rozšíření teorie T a definovaný symbol lze eliminovat. To znamená, že ke každé formuli A´ jazyka teorie T´ lze sestrojit formuli A jazyka L , takovou, že T´|– A ↔ A´

Definice.
Říkáme, že T´ je **rozšířením teorie** T **o definice** jestliže T´ vznikne z T konečným počtem rozšíření o definice funkcí a a predikátů.

Věta (Church)
Nechť L je spočetný jazyk prvního řádu takový, že
• obsahuje alespoň jednu konstantu a alespoň jeden funkční symbol četnosti k > 0.
• pro každé přirozené číslo n obsahuje spočetně mnoho predikátových symbolů.
Potom množina { #A | A je uzavřená formule a L|= A } není rozhodnutelná.

Věta.
Nechť L je jazyk prvního řádu bez rovnosti, který obsahuje alespoň dva binární predikáty, potom **predikátová logika** s jazykem L je **nerozhodnutelná**.

Tři axiomatizace aritmetiky
Jazyk L = {0, S, +, ∗, ≤}
Robinsonova aritmetika Q.
Q1 S(x) ≠ 0
Q2 S(x) = S(y) → x = y
Q3 x ≠ 0 → (∃y)(x = S(y))
Q4 x + 0 = x
Q5 x + S(y) = S(x + y)
Q6 x ∗0 = 0
Q7 x ∗ S(y) = (x ∗ y) + x
Q8 x ≤ y ↔ (∃z)(z + x = y)

Peanova aritmetika P (prvního řádu)
Má axiomy Q1, Q2, Q4 - Q8 a schema indukce
Pro každou formuli A a každou proměnnou x je následující formule axiom indukce.
$A_x[0] \rightarrow \{(\forall x)(A \rightarrow A_x[S(x)]) \rightarrow (\forall x)A\}$
Dá se ukázat, že v Peanově aritmetice je dokazatelný axiom Q3, takže Peanova aritmetika je rozšířením Robinsonovy aritmetiky. Dá se také dokázat, že axiomatika Peanovy aritmetiky je rekursivní.

Úplná aritmetika.
Je-li N standardní model aritmetiky, Úplná aritmetika má za axiomy všechny uzavřené formule pravdivé v N. Th(N) = { A| A je uzavřená formule N |= A}
Této teorii se také říká **Pravdivá aritmetika**, protože je axiomatizovaná všemi formulemi, které jsou pravdivé ve standardním modelu N. Množině formulí Th(N) se říká teorie modelu N.

Máme tři axiomatizace aritmetiky Q , P, Th(N), všechny v jazyku L = { 0, S, +, ∗, ≤} . Je zřejmé, že Q⊆P⊆Th(N), kde inkluze znamená rozšíření.
• Q má konečně mnoho axiomů, je tedy rekursivně axiomatizovatelná.
• P má spočetně axiomů. Dá se ukázat, že kódy axiomů schematu indukce tvoří rekurzivní množinu, spolu s dalšími konečně mnoha axiomy je P rekurzivně axiomatizovatelná.
• Th(N) podle důkazu není rekurzivně axiomatizovatelná.

Definice.
Říkáme, že **teorie** T je **rozhodnutelná**, je-li množina Thm(T) (kódů) vět rekurzivní. Jinak je teorie nerozhodnutelná.

Věta o nerozhodnutelnosti aritmetiky (Church)
Je-li T bezesporné rozšíření Robinsonovy aritmetiky Q, potom T je nerozhodnutelná teorie.

Věta o neúplnosti aritmetiky. (Gödel, Rosser)
Je-li T bezesporné, rekurzivně axiomatizovatelné rozšíření Robinsonovy aritmetiky Q , potom T není úplná teorie.

Označení.
Je-li T bezesporné, rekurzivně axiomatizovatelné rozšíření Peanovy aritmetiky P a A formule, píšeme
• ?A jako zkratku za formuli Thm(T)(#A)
• Con(T) jako zkratku za formuli ¬? (0=1)
• Con(T) čteme T je bezesporná (konzistentní).

Druhá věta o neúplnosti.
Nechť T je bezesporné rekurzivně axiomatizovatelné rozšíření Peanovy aritmetiky P , potom T |–/ Con(T)

Zermelo-Fraenkelova teorie množin ZF má jazyk prvního řádu s rovností, obsahuje Peanovu aritmetiku, má rekuzivní množinu axiomů, tedy je-li ZF bezesporná, pak ZF |–/ Con(ZF)
Můžeme, proto očekávat jen důkazy relativní bezespornosti Con(ZF) → Con(ZFC).