VELKÁ PÍSEMKA Z OPTIMALIZACE

Písemku vypracovávejte samostatně a bez vlastních poznámek. Můžete však použít dostatečně historické kalkulačky. Každý příklad je za **6 bodů**.

Nezapomeňte všude **uvádět postup**. Může vás to zachránit v případě numerické chyby. Všechna tvrzení je třeba **řádně zdůvodnit**, věty z přednášky či cvičení však dokazovat nemusíte, vždy pouze uveďte, co a kde používáte.

Příklady mohou být rozdílně složité a proto doporučujeme nejdříve pročíst všechna zadání a začít od těch, které vám budou připadat jednodušší.

Hodně štěstí!

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

Příklad první Zformulujte následující problém a asymptoticky odhadněte kolik potřebuje proměnných a kolik potřebuje podmínek:

Problém 3-SUM, tedy mám množinu přemětů P různé ceny $w : P \to \mathbb{N}_0$ a chci zjistit, zda-li z nich lze vytvořit trojice takové, že mají vždy stejný součet S.

Příklad druhý Máte mnohostěn $P \in \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů:

$$\begin{aligned} a &= (\ \ 2,\ \ 1,\ \ 6\ ) \\ b &= (\ \ 0, -5,\ \ 0\ ) \\ c &= (-2,\ \ 2, -1\ ) \\ d &= (\ \ 0, -4,\ \ 0\ ) \\ e &= (\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1\ ) \end{aligned}$$

Pro každou následující nadrovinu určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná a pro tečné nadroviny určete dimenzi příslušné stěny.

$$5x + 3y - 2z = 1$$

$$5x + 2y + 4z = -10$$

$$3x + 1z = 0$$

$$x + y + z = 1$$

Příklad třetí

Zformulujte primární program, následně ho zrelaxujte a vytvořte k němu duální program.

Umístění poboček (Facility Location): V tomto problému máme n potenciálních poboček a m zákazníků. Abychom pobočku i otevřeli, potřebujeme zaplatit f_i. Chceme-li převézt jeden produkt z i-té pobočky k j-tému zákazníkovi, musíme zaplatit d_{ij} za převoz.

Úkolem je najít řešení nejlevnější ceny takové, že každý zákazník dostane alespoň jeden produkt.

Příklad čtvrtý

Převeďte úlohu na standardní tvar, formulujte pomocnou úlohu, s její pomocí nalezněte přípustné bazické řešení a z něho optimální řešení.

Poznámka: Plný počet bodů je za nalezení optimálního řešení pomocí alespoň dvou kroků simplexového algoritmu nebo provedení alespoň 3 správných kroků.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4x_1 + x_2 \\
& x_1 - 3x_2 \geq 1 \\
& -3x_1 + 13x_2 \geq 1 \\
& -x_1 + x_2 \geq -13 \\
& 3x_1 - 11x_2 \geq -1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Příklad pátý

Pro zadanou matici rozhodněte, je-li totálně unimodulární a je-li unimodulární:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$