2. PÍSEMKA Z OPTIMALIZACE

pondělí 4. 5. 2015 14:00

Písemku vypracovávejte samostatně. Můžete použít kalkulačky (nikoliv však „chytré přístroje“ s funkcí kalkulačka). Každý příklad je za **5 bodů**.

Nezapomeňte všude **uvádět postup**. Může vás to zachránit v případě numerické chyby. Všechna tvrzení je třeba **řádně zdůvodnit**, věty z přednášky či cvičení však dokazovat nemusíte, vždy pouze uveďte, co a kde používáte.

Příklady mohou být rozdílně složité a proto doporučujeme nejdříve pročíst všechna zadání a začít od těch, které vám budou připadat jednodušší.

Hodně štěstí!

Příklad první

Pro zadanou matici rozhodněte, je-li totálně unimodulární:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}$$

Příklad druhý

Zdualizujte následující lineární program:

Jako dříve se zajímáme o Rozvrhování, čili máme k učeben a n předmětů a budeme chtít každý předmět přiřadit do jedné učebny.

Zajímá nás jen přípustnost. Zadefinujme si *konfiguraci* C jako možné (i neoptimální) rozvrhnutí předmětů do učebny.

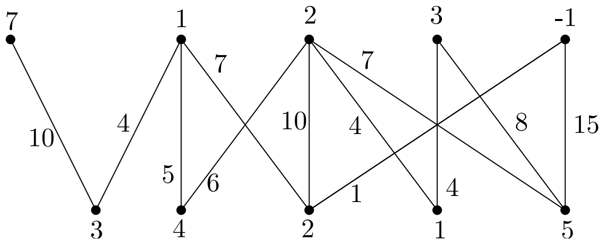
Naše LP má jednu proměnnou $x_{j,C}$ pro každou konfiguraci C a každou učebnu j:

$$\max 0$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, k\} : \sum_{C} x_{j,C} \leq 1$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \sum_{j=1}^{k} \sum_{C|i \in C} x_{j,C} \geq 1$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, k\}, \forall C : x_{j,C} \geq 0$$

Dualizujte tento lineární program.

Příklad třetí

Na obrázku je graf s váhami na hranách a na vrcholech jsou hodnoty přípustného řešení duálního programu k minimálnímu váženému perfektnímu párování.



Lineární program pro minimální vážené perfektní párování:

$$\min\left\{\sum_{e\in E} w_e x_e \middle| \forall v \ \in V\colon \sum_{uv\in E} x_{uv} = 1; \forall e \in E\colon x_e \geq 0\right\} \tag{1}$$

S užitím komplementarity ověřte, je-li duální řešení optimální.

Příklad čtvrtý Pro každé $n \geq 3$ nalezněte souvislý graf na n vrcholech takový, že relaxovaná lineární úloha pro perfektní párování nejmenší ceny (níže) nemá žádné přípustné řesení.

$$\min \sum_{e=1}^{m} c_e x_e; x_e \geq 0,$$

$$\forall v \in V: \sum_{e=uv\in E} x_e = 1.$$

Příklad pátý Pro zadaný následujíci NP-těžký problém vymyslete nejprve vhodný celočíselný lineární program, a pak tento program zrelaxujte a zdualizujte.

Problém je Pakování do košů. Máte na vstupu n objektů o velikosti $v_1, \ldots, v_n$, každá velikost je reálné číslo mezi 0 a 1. K dispozici máte v podstatě neomezené množství košů o kapacitě 1. Vaším úkolem je nalézt rozložení všech objektů do košů tak, že počet neprázdných košů bude co nejmenší.