1. PÍSEMKA Z OPTIMALIZACE

pondělí 30. 3. 2015 14:00

Písemku vypracovávejte samostatně a bez vlastních poznámek. Můžete však použít dostatečně historické kalkulačky. Každý příklad je za **5 bodů**.

Nezapomeňte všude **uvádět postup**. Může vás to zachránit v případě numerické chyby. Všechna tvrzení je třeba **řádně zdůvodnit**, věty z přednášky či cvičení však dokazovat nemusíte, vždy pouze uveďte, co a kde používáte.

Příklady mohou být rozdílně složité a proto doporučujeme nejdříve pročíst všechna zadání a začít od těch, které vám budou připadat jednodušší.

Hodně štěstí!

Užitečné definice a věty:

D: Buď $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ a $cA := \{ca : a \in A\}$.

D: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je mnohostěn, pokud je množinou řešení nějaké soustavy neostrých lineárních nerovnic.

T: Průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Speciálně mnohostěny a jednotlivé body jsou uzavřené množiny.

D: Množina je omezená, pokud je částí nějaké koule konečného průměru.

D: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, pokud $\forall a, b \in A$ je i celá úsečka $ab \subseteq A$.

D: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní, pokud je tvaru $L + v$ pro nějaký lineární podprostor L a vektor v.

D: Mějme mnohostěn $P \in \mathbb{R}^n$ a nadrovinu h. Podle průniku s mnohostěnem označujeme nadrovinu h jako:

- **tečnou**, pokud celé P leží v jednom z uzavřených poloprostorů určených h a průnik $P \cap h$ je neprázdný,
- **sečnou**, pokud je průnik P s každým z otevřených poloprostorů určených h neprázdný, a nebo
- **mimoběžnou**, pokud h není ani tečná ani sečná.

PŘÍKLAD PRVNÍ Zformulujte následující problém jako úlohu lineárního programování:

Je následující orientovaný graf $\overrightarrow{G} = (V, E)$ *silně souvislý*? Jinými slovy, potřebujeme rozhodnout, jestli pro každé $u, v \in V$ existuje orientovaná cesta z u do v a také z v do u.

PŘÍKLAD DRUHÝ Máte mnohostěn $P \in \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů:

$$\begin{aligned} a &= (\ \ 2,\ \ 1,\ \ 6\,) \\ b &= (\ \ 0, -5,\ \ 0\,) \\ c &= (-2,\ \ 2, -1\,) \\ d &= (\ \ 0, -4,\ \ 0\,) \\ e &= (\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1\,) \end{aligned}$$

Pro následující nadroviny určete, zda jsou vůči P tečné, sečné či mimoběžné:

1. $5x + 3y - 2z = 1$
2. $x + 2y + z = 2$

Pro tečnou nadrovinu navíc určete dimenzi příslušné stěny.

PŘÍKLAD TŘETÍ Vyřešte následující lineární program pomocí simplexového algoritmu:

$$\begin{array}{rl} \max & 4x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 \geq -4 \\ & -2x_1 - x_2 \geq -28 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Pro dva vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujme sčítání po složkách $x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Pro dvě množiny vektorů $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ definujeme $A + B := \{x + y | x \in A, y \in B\}$. Nakonec pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a skalár $c \in \mathbb{R}$ definujme $cA := \{ca | a \in A\}$.

- Dokažte, že pokud A, B jsou konvexní, potom také $A + B$ je konvexní.
- Dokažte také, že pro konvexní A platí $A + A = 2A$.
- Ukažte, že obrácená implikace neplatí. Tedy přestože $A + B$ je konvexní, tak A nebo B konvexní být nemusí.

PŘÍKLAD PÁTÝ

Zformulujte následující problém jako úlohu celočíselného lineárního programování:

Pro ohodnocený ($w : E \to \mathbb{R}$) neorientovaný graf $G = (V, E)$ nalezněte MaxCut – maximálni řez. To je podmnožina hran C s maximální vahou taková, že pro nějakou podmnožinu $A \subseteq V$ platí, že C je tvořena všemi hranami mezi A a $V \setminus A$.