Věta 8.8 (Cauchyho–Schwarzova nerovnost[1]). *Pro každé $x, y \in V$ platí $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.*

Důkaz. (Reálná verze) Nejprve ukážeme reálnou verzi, protože má elegantní důkaz. Pro $y = o$ platí nerovnost triviálně, tak předpokládejme $y \neq o$. Uvažujme reálnou funkci $f(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle \geq 0$ proměnné $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$f(t) = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.$$

Jedná se o kvadratickou funkci, která je všude nezáporná, nemůže mít tedy dva různé kořeny. Proto je příslušný diskriminant nekladný:

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0.$$

Z toho dostáváme $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$, odmocněním $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. □

Algoritmus 8.22 (Gramova–Schmidtova ortogonalizace[3]). Buďte $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.

1: **for** $k := 1$ **to** n **do**

2: $\quad y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j\rangle z_j,$ //vypočítáme kolmici

3: $\quad z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k,$ //normalizujeme délku na 1

4: **end for**

Výstup: $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální báze prostoru $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Důkaz. (Správnost Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace.) Matematickou indukcí podle n dokážeme, že $z_1, \ldots, z_n$ je ortonormální báze prostoru $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Pro $n = 1$ je $y_1 = x_1 \neq o$ a $z_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$ je dobře definované a $\operatorname{span}\{x_1\} = \operatorname{span}\{z_1\}$.

Indukční krok $n \leftarrow n-1$. Předpokládejme, že $z_1, \ldots, z_{n-1}$ je ortonormální báze prostoru $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Kdyby bylo $y_n = o$, tak $x_n = \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, z_j\rangle z_j$ a $x_n \in \operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, což by byl spor s lineární nezávislostí vektorů $x_1, \ldots, x_n$. Proto $y_n \neq o$ a $z_n = \frac{1}{\|y_n\|} y_n$ je dobře definovaný a má jednotkovou normu.

Nyní dokážeme, že $z_1, \ldots, z_n$ je ortonormální systém. Z indukčního předpokladu je $z_1, \ldots, z_{n-1}$ ortonormální systém a proto $\langle z_i, z_j\rangle$ je rovno 0 pro $i \neq j$ a rovno 1 pro $i = j$. Stačí ukázat, že z_n je kolmé na ostatní z_i pro $i < n$:

$$\begin{aligned}\langle z_n, z_i\rangle &= \frac{1}{\|y_n\|}\langle y_n, z_i\rangle = \frac{1}{\|y_n\|}\left\langle x_n - \sum_{j=1}^{n-1}\langle x_n, z_j\rangle z_j, z_i\right\rangle \\ &= \frac{1}{\|y_n\|}\langle x_n, z_i\rangle - \frac{1}{\|y_n\|}\sum_{j=1}^{n-1}\langle x_n, z_j\rangle\langle z_j, z_i\rangle = \frac{1}{\|y_n\|}\langle x_n, z_i\rangle - \frac{1}{\|y_n\|}\langle x_n, z_i\rangle = 0.\end{aligned}$$

Zbývá ověřit $\operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Z algoritmu je vidět, že $z_n \in \operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n\} \subseteq \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$, a tedy $\operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Protože oba prostory mají stejnou dimenzi, nastane rovnost (věta 5.42). □

Gramova–Schmidtova ortogonalizace má tu přednost, že je použitelná v každém prostoru se skalárním součinem. Speciálně při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^n$ můžeme ortogonalizaci vyjádřit maticově (viz poznámka 13.9), ale na druhou stranu v tomto případě existují i jiné metody, které mají lepší numerické vlastnosti; srov. sekce 13.3.

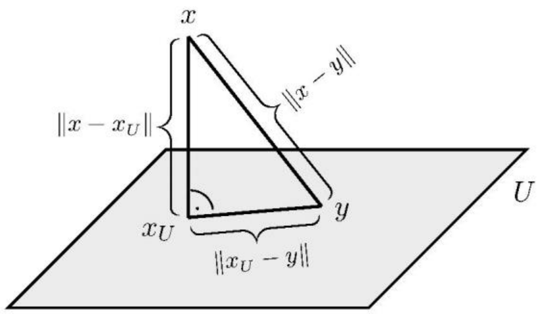
Věta 8.32 (O ortogonální projekci). *Buď V vektorový prostor a $U \Subset V$. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce $x_U \in U$ do podprostoru U. Navíc, je-li $z_1, \ldots, z_m$ ortonormální báze U, pak*

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i. \tag{8.1}$$

Důkaz. Buď $z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n$ rozšíření na ortonormální bázi V. Zadefinujme $x_U := \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i \in U$ a ukážeme, že je to hledaný vektor. Nyní

$$x - x_U = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i - \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \in U^{\perp}. \tag{8.2}$$

Buď $y \in U$ libovolné. Nyní máme $x - x_U \in U^{\perp}$ a $x_U - y \in U$, viz obrázek:



Tudíž $(x - x_U) \perp (x_U - y)$ a můžeme použít Pythagorovu větu, která dává

$$\|x - y\|^2 = \|(x - x_U) + (x_U - y)\|^2 = \|x - x_U\|^2 + \|x_U - y\|^2 \geq \|x - x_U\|^2,$$

neboli $\|x - y\| \geq \|x - x_U\|$, což dokazuje minimalitu. Abychom dokázali jednoznačnost, uvědomíme si, že rovnost nastane pouze tehdy, když $\|x_U - y\|^2 = 0$, čili když $x_U = y$. □

Věta 9.4 (Řádková linearita determinantu). *Buď $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ a $b \in \mathbb{T}^n$. Pak pro libovolné $i = 1, \ldots, n$ platí:*

$$\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*})).$$

Jinými slovy,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_1 & \ldots & a_{in} + b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \ldots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \det(A + e_i b^T) &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \ldots (a_{i,p(i)} + b_{p(i)}) \ldots a_{n,p(n)} \\ &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \ldots a_{i,p(i)} \ldots a_{n,p(n)} + \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \ldots b_{p(i)} \ldots a_{n,p(n)} \\ &= \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*})) \end{aligned}$$

□

Vzhledem k tvrzení 9.3 je determinant nejen řádkově, ale i sloupcově lineární.

Věta 9.9 (Multiplikativnost determinantu). *Pro každé $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ platí* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Důkaz. (1) Nejprve uvažujme speciální případ, když A je matice elementární úpravy:

1. $A = E_i(\alpha)$, vynásobení i-tého řádku číslem α. Potom $\det(AB) = \alpha\det(B)$ a $\det(A)\det(B) = \alpha\det(B)$.
2. $A = E_{ij}$, prohození i-tého a j-tého řádku. Pak $\det(AB) = -\det(B)$ a $\det(A)\det(B) = -1\det(B)$.
3. $A = E_{ij}(\alpha)$, přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému. Pak $\det(AB) = \det(B)$ a $\det(A)\det(B) = 1\det(B)$.

Tedy rovnost platí ve všech případech.

(2) Nyní uvažme obecný případ. Je-li A singulární, pak i AB je singulární (tvrzení 3.26) a tedy podle věty 9.7 je $\det(AB) = 0 = 0\det(B) = \det(A)\det(B)$. Je-li A regulární, pak jde rozložit na součin elementárních matic $A = E_1 \dots E_k$. Nyní postupujme matematickou indukcí, případ $k = 1$ máme vyřešený v bodě (1), takže se věnujme indukčnímu kroku. Podle indukčního předpokladu a z bodu (1) dostáváme

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1(E_2 \dots E_k B)) = \det(E_1)\det((E_2 \dots E_k)B)\\ &= \det(E_1)\det(E_2 \dots E_k)\det(B) = \det(E_1 E_2 \dots E_k)\det(B)\\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

□

Věta 9.11 (Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku). *Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}),$$

kde A^{ij} je matice vzniklá z A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

Poznámka. Podobně jako podle řádku můžeme rozvíjet podle libovolného sloupce.

Důkaz. (1) Nejprve uvažujme případ $A_{i*} = e_j^T$, tj. i-tý řádek matice A je jednotkový vektor. Postupným vyměňováním řádků $(i, i+1), (i+1, i+2), \dots, (n-1, n)$ převedeme jednotkový vektor do posledního řádku. Podobně postupujeme pro sloupce a j-tý sloupec převedeme na poslední. Výslednou matici označme

$$A' := \left(\begin{array}{ccc|c} & A^{ij} & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a znaménko determinantu se změní koeficientem $(-1)^{(n-i)+(n-j)} = (-1)^{i+j}$. Nyní máme

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{i+j}\det(A') = (-1)^{i+j} \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a'_{i,p(i)}\\ &= (-1)^{i+j} \sum_{p;\, p(n)=n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n-1} a'_{i,p(i)} = (-1)^{i+j}\det(A^{ij}).\end{aligned}$$

(2) Nyní uvažme obecný případ. Z řádkové linearity determinantu a z předchozího dostáváme

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix} \dots & & & \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \end{pmatrix} + \dots + \det\begin{pmatrix} \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{in} \\ \dots & & & \end{pmatrix}\\ &= a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A^{i1}) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}\det(A^{in}).\end{aligned}$$

□

Tvrzení 10.11 (Součin a součet vlastních čísel). *Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pak*

(1) $\det(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$,

(2) $\operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Důkaz.

(1) Víme, že $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$. Dosazením $\lambda = 0$ dostáváme $\det(A) = (-1)^n(-\lambda_1)\ldots(-\lambda_n) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$.

(2) Porovnejme koeficienty u λ^{n-1} různých vyjádření charakteristického polynomu. V rozvoji $\det(A - \lambda I_n)$ dostáváme, že koeficient vznikne pouze ze součinu $(a_{11} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda)$, a má hodnotu $(-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})$. Koeficient u λ^{n-1} v rozvoji $(-1)^n(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$ je očividně $(-1)^n(-\lambda_1 - \ldots - \lambda_n)$. Porovnáním tedy $(-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^n(-\lambda_1 - \ldots - \lambda_n)$. □

Poznamenejme, že porovnáním koeficientů u jiných členů charakteristického polynomu dostaneme další vztahy mezi prvky matice A a vlastními čísly, ale již trochu komplikovanější.

Tvrzení 10.12 (Vlastnosti vlastních čísel). *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Pak:*

(1) A je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo,

(2) je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(3) A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(4) αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(5) $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(6) A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Důkaz. Dokážeme první dvě tvrzení, ostatní necháme čtenáři na rozmyšlení.

(1) A má vlastní číslo 0 právě tehdy, když $0 = \det(A - 0I_n) = \det(A)$, neboli když A je singulární.

(2) Pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $Ax_i = \lambda_i x_i$. Přenásobením A^{-1} dostaneme $x_i = \lambda_i A^{-1} x_i$ a vydělením $\lambda_i \neq 0$ pak $A^{-1}x_i = \lambda_i^{-1} x_i$. □

Věta 10.22 (Vlastní čísla podobných matic). *Podobné matice mají stejná vlastní čísla.*

Důkaz. Z podobnosti matic existuje regulární matice S taková, že $A = SBS^{-1}$. Pak

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(SBS^{-1} - \lambda S I_n S^{-1}) = \det(S(B - \lambda I_n)S^{-1}) \\ &= \det(S)\det(B - \lambda I_n)\det(S^{-1}) = \det(B - \lambda I_n) = p_B(\lambda). \end{aligned}$$

Obě matice mají stejné charakteristické polynomy, tedy i vlastní čísla. □

Věta 10.27 (Charakterizace diagonalizovatelnosti). *Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.*

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“. Je-li A diagonalizovatelná, pak má spektrální rozklad $A = S\Lambda S^{-1}$, kde S je regulární a Λ diagonální. Rovnost přepíšeme $AS = S\Lambda$ a porovnáním j-tých sloupců dostaneme

$$AS_{*j} = (AS)_{*j} = (S\Lambda)_{*j} = S\Lambda_{*j} = S\Lambda_{jj}e_j = \Lambda_{jj}S_{*j},$$

což můžeme názorně zapsat jako

$$AS = A\begin{pmatrix} | & & | \\ S_{*1} & \dots & S_{*n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ (\Lambda_{11}S_{*1}) & \dots & (\Lambda_{nn}S_{*n}) \\ | & & | \end{pmatrix} = S\Lambda.$$

Tedy Λ_{jj} je vlastní číslo a S_{*j} je příslušný vlastní vektor. Sloupce matice S jsou lineárně nezávislé díky její regularitě.

Implikace „$\Leftarrow$“. Analogicky opačným směrem. Nechť A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim přísluší lineárně nezávislé vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Sestavme regulární matici $S := (x_1 \mid \cdots \mid x_n)$ a diagonální $\Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pak

$$(AS)_{*j} = AS_{*j} = Ax_j = \lambda_j x_j = \Lambda_{jj}S_{*j} = S(\Lambda_{jj}e_j) = S\Lambda_{*j} = (S\Lambda)_{*j}.$$

Tedy $AS = S\Lambda$, z čehož $A = S\Lambda S^{-1}$. □

Věta 10.49 (Spektrální rozklad symetrických matic). *Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $A = Q\Lambda Q^T$.*

Důkaz. Matematickou indukcí podle n. Případ $n = 1$ je triviální: $\Lambda = A$, $Q = 1$.

Indukční krok $n \leftarrow n-1$. Buď λ vlastní číslo A a x odpovídající vlastní vektor normovaný $\|x\|_2 = 1$. Doplňme x, jakožto ortonormální systém (důsledek 8.24), na ortogonální matici $S := (x \mid \cdots)$. Protože $(A - \lambda I_n)x = o$, máme $(A - \lambda I_n)S = (o \mid \cdots)$, a tudíž $S^T(A - \lambda I_n)S = S^T(o \mid \cdots) = (o \mid \cdots)$. A jelikož je tato matice symetrická, máme

$$S^T(A - \lambda I_n)S = \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix},$$

kde A' je nějaká symetrická matice řádu $n-1$. Podle indukčního předpokladu má spektrální rozklad $A' = Q'\Lambda'Q'^T$, kde Λ' je diagonální a Q' ortogonální. Matice a rovnost rozšíříme o jeden řád takto:

$$\begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & \Lambda' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q'^T \end{pmatrix},$$

což snadno můžeme ověřit pronásobením. Označme

$$R := \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q' \end{pmatrix}, \quad \Lambda'' := \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & \Lambda' \end{pmatrix}.$$

Matice R je ortogonální (věta 8.52(4)), matice Λ'' diagonální. Nyní můžeme psát

$$S^T(A - \lambda I_n)S = R\Lambda''R^T,$$

z čehož

$$A = SR\Lambda''R^TS^T + \lambda I_n = SR\Lambda''R^TS^T + \lambda SRR^TS^T = SR(\Lambda'' + \lambda I_n)R^TS^T.$$

Nyní máme hledaný rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde $Q := SR$ je ortogonální matice a $\Lambda := \Lambda'' + \lambda I_n$ je diagonální. □

Věta 10.48 (Vlastní čísla symetrických matic). *Vlastní čísla reálných symetrických (resp. obecněji komplexních hermitovských) jsou reálná.*

Důkaz. Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitovská a buď $\lambda \in \mathbb{C}$ její libovolné vlastní číslo a $x \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor jednotkové velikosti, tj. $\|x\|_2 = 1$. Pak $Ax = \lambda x$, přenásobením x^* máme $x^*Ax = \lambda x^*x = \lambda$. Nyní

$$\lambda = x^*Ax = x^*A^*x = (x^*Ax)^* = \lambda^*.$$

Tedy $\lambda = \lambda^*$ a proto $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Věta 11.7 (Charakterizace positivní definitnosti). *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) A je positivně definitní,

(2) vlastní čísla A jsou kladná,

(3) existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti n taková, že $A = U^TU$.

Důkaz. Implikace (1) $\Rightarrow$ (2): Sporem nechť existuje vlastní číslo $\lambda \le 0$, a x je příslušný vlastní vektor s eukleidovskou normou 1. Pak $Ax = \lambda x$ implikuje $x^TAx = \lambda x^Tx = \lambda \le 0$. To je spor s positivní definitností A.

Implikace (2) $\Rightarrow$ (3): Protože A je symetrická, má spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální matice s prvky $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Definujme matici Λ' jako diagonální s prvky $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} > 0$. Pak hledaná matice je $U = \Lambda'Q^T$, neboť $U^TU = Q\Lambda'\Lambda'Q^T = Q\Lambda'^2Q^T = Q\Lambda Q^T = A$. Uvědomme si, že U má hodnost n a je tudíž regulární, neboť je součinem dvou regulárních matic.

Implikace (3) $\Rightarrow$ (1): Sporem nechť $x^TAx \le 0$ pro nějaké $x \ne o$. Pak $0 \ge x^TAx = x^TU^TUx = (Ux)^TUx = \langle Ux, Ux\rangle = \|Ux\|_2^2$. Tedy musí $Ux = o$, ale sloupce U jsou lineárně nezávislé, a tak $x = o$, spor. □

Pro positivní semidefinitnost máme následující charakterizaci. Důkaz již neuvádíme, je analogický.

Věta 11.8 (Charakterizace positivní semidefinitnosti). *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) A je positivně semidefinitní,

(2) vlastní čísla A jsou nezáporná,

(3) existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ taková, že $A = U^TU$.

Věta 11.9 (Rekurentní vzoreček na testování positivní definitnosti). *Symetrická matice $A = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & a^T\\ a & \tilde{A}\end{smallmatrix}\right)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ je positivně definitní právě tehdy, když $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je positivně definitní.*

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“. Buď A positivně definitní. Pak $x^TAx > 0$ pro všechna $x \ne o$, tedy speciálně pro $x = e_1$ dostáváme $\alpha = e_1^TAe_1 > 0$. Dále, buď $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{x} \ne o$. Pak

$$\tilde{x}^T\big(\tilde{A} - \tfrac{1}{\alpha}aa^T\big)\tilde{x} = \tilde{x}^T\tilde{A}\tilde{x} - \tfrac{1}{\alpha}(a^T\tilde{x})^2 = \big(-\tfrac{1}{\alpha}a^T\tilde{x} \quad \tilde{x}^T\big)\begin{pmatrix}\alpha & a^T\\ a & \tilde{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\alpha}a^T\tilde{x}\\ \tilde{x}\end{pmatrix} > 0.$$

Implikace „$\Leftarrow$“. Buď $x = \left(\begin{smallmatrix}\beta\\ \tilde{x}\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^n$. Pak

$$\begin{aligned} x^TAx &= \big(\beta \quad \tilde{x}^T\big)\begin{pmatrix}\alpha & a^T\\ a & \tilde{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \tilde{x}\end{pmatrix} = \alpha\beta^2 + 2\beta a^T\tilde{x} + \tilde{x}^T\tilde{A}\tilde{x}\\ &= \tilde{x}^T\big(\tilde{A} - \tfrac{1}{\alpha}aa^T\big)\tilde{x} + \big(\sqrt{\alpha}\beta + \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}a^T\tilde{x}\big)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

Rovnost nastane pouze tehdy, když $\tilde{x} = o$ a druhý čtverec je nulový, tj. $\beta = 0$. □

Věta 11.10 (Choleského rozklad). *Pro každou positivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$.*

Důkaz. Matematickou indukcí podle n. Pro $n = 1$ máme $A = (a_{11})$ a $L = (\sqrt{a_{11}})$.

Indukční krok $n \leftarrow n-1$. Mějme $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{smallmatrix}\right)$. Podle věty 11.9 je $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je positivně definitní. Tedy dle indukčního předpokladu existuje dolní trojúhelníková matice $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ s kladnou diagonálou tak, že $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$. Potom $L = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{\alpha} & o^T \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a & \tilde{L} \end{smallmatrix}\right)$, neboť

$$LL^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & o^T \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a^T \\ o & \tilde{L}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \frac{1}{\alpha}aa^T + \tilde{L}\tilde{L}^T \end{pmatrix} = A.$$

Pro důkaz jednoznačnosti mějme jiný rozklad $A = L'L'^T$, kde $L' = \left(\begin{smallmatrix} \beta & o^T \\ b & \tilde{L}' \end{smallmatrix}\right)$. Pak

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} = A = L'L'^T = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta b^T \\ \beta b & bb^T + \tilde{L}'\tilde{L}'^T \end{pmatrix}.$$

Porovnáním matic dostaneme: $\beta = \sqrt{\alpha}$, $b = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a$ a $\tilde{A} = bb^T + \tilde{L}'\tilde{L}'^T$, neboli $\tilde{L}'\tilde{L}'^T = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$. Jenže podle indukčního předpokladu je $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$ jednoznačné, tedy $\tilde{L}' = \tilde{L}$, a tudíž i $L' = L$. □

Tvrzení 11.15 (Sylvestrovo[2)] kriterium positivní definitnosti). *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic $A_1, \dots, A_n$ jsou kladné, přičemž A_i je levá horní podmatice A velikosti i (tj. vznikne z A odstraněním posledních $n-i$ řádků a sloupců).*

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně definitní. Pak pro každé $i = 1, \dots, n$ je A_i positivně definitní, neboť pokud $x^T A_i x \le 0$ pro jisté $x \ne o$, tak $(x^T\ o^T)A\left(\begin{smallmatrix} x \\ o \end{smallmatrix}\right) = x^T A_i x \le 0$. Tedy A_i má kladná vlastní čísla a její determinant je také kladný (je roven součinu vlastních čísel).

Implikace „$\Leftarrow$“. Během Gaussovy eliminace matice A jsou všechny pivoty kladné, neboť pokud je i-tý pivot první nekladný, pak $\det(A_i) \le 0$. Podle tvrzení 11.14 je tedy A positivně definitní. □

Věta 11.17 (Skalární součin a positivní definitnost). *Operace $\langle x, y\rangle$ je skalárním součinem v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když má tvar $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ pro nějakou positivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“. Definujme matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ předpisem $a_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$, kde e_i, e_j jsou standardní jednotkové vektory. Matice A je zjevně symetrická, ale nemusí být jednotková, protože daný skalární součin nemusí být ten standardní. Nyní podle linearity skalárního součinu v první i druhé složce můžeme psát

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} = x^T Ay.\end{aligned}$$

Matice A musí být positivně definitní, neboť z definice skalárního součinu $x^T Ax = \langle x, x\rangle \ge 0$ a nulové jen pro $x = o$.

Implikace „$\Leftarrow$“. Nechť A je positivně definitní. Pak $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ tvoří skalární součin: $\langle x, x\rangle = x^T Ax \ge 0$ a nulové jen pro $x = o$, je lineární v první složce a je symetrický neboť

$$\langle x, y\rangle = x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x = y^T Ax = \langle y, x\rangle.$$ □

Věta 12.12 (Sylvestrův zákon setrvačnosti[1)]). *Buď $f(x) = x^T Ax$ kvadratická forma. Pak existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky $1, -1, 0$. Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.*

Důkaz. „Existence“. Protože A je symetrická, tak má spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Tedy $\Lambda = Q^T AQ$ je diagonalizace formy. Abychom docílili na diagonále ± 1, tak provedeme ještě úpravu $\Lambda' Q^T AQ\Lambda'$, kde Λ' je diagonální matice s prvky $\Lambda'_{ii} = |\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}$, pokud $\lambda_i \neq 0$ a $\Lambda'_{ii} = 1$ jinak. Nyní můžeme $Q\Lambda'$ považovat za matici ${}_{\text{kan}}[id]_B$ přechodu od hledané báze B do kanonické báze. Tudíž bázi B vyčteme ve sloupcích matice $Q\Lambda'$.

„Jednoznačnost“. Sporem předpokládejme, že máme dvě různé diagonalizace D, D':

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & q & q+1 & \dots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad D' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & q & q+1 & \dots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

První nechť odpovídá bázi $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ a druhá bázi $B' = \{w'_1, \dots, w'_n\}$. Buď $u \in \mathbb{R}^n$ libovolné a nechť má souřadnice $y = [u]_B$, $z = [u]_{B'}$. Pak podle věty 12.6

$$f(u) = [u]_B^T D[u]_B = y^T Dy = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_q^2 + 0y_{q+1}^2 + \ldots + 0y_n^2,$$
$$f(u) = [u]_{B'}^T D[u]_{B'} = z^T D'z = z_1^2 + \ldots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \ldots - z_t^2 + 0z_{t+1}^2 + \ldots + 0z_n^2.$$

Nejprve si povšimneme, že $q = t$. Protože $D = S^T D'S$ pro nějakou regulární S, konkrétně pro $S = {}_{B'}[id]_B$, tak matice D, D' mají stejnou hodnost. Tudíž musí $q = t$. Nyní zbývá ukázat, že nutně $p = s$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $p > s$. Definujme prostory $P = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_p\}$ a $R = \operatorname{span}\{w'_{s+1}, \dots, w'_n\}$. Pak

$$\dim P \cap R = \dim P + \dim R - \dim(P + R) \geq p + (n - s) - n = p - s \geq 1.$$

Tedy existuje nenulový vektor $u \in P \cap R$ a pro něj máme $u = \sum_{i=1}^p y_i w_i = \sum_{j=s+1}^n z_j w'_j$, z čehož dostáváme

$$f(u) = \begin{cases} y_1^2 + \ldots + y_p^2 > 0, \\ -z_{s+1}^2 - \ldots - z_t^2 \leq 0. \end{cases}$$

To je spor. $\square$