Písemka 12. 2. 2016

Příklad 1 (7 bodů). V osudí je umístěno 7 bílých míčů a 3 černé míče. Určete:

(a) S jakou pravděpodobností ve třetím tahu táhneme bílý míček, taháme-li **bez vracení**?

(b) Jaká je střední doba čekání na vytažení černého míčku, taháme-li **bez vracení**

(c) Jaká je pravděpodobnost, že jsme v prvním tahu vytáhli bílý míček, jestliže ve třetím tahu byl vytažen černý míček. Uvažujte obě situace: **s vracením i bez vracení**.

(d)* Uvažujte situaci **bez vracením**. Postupně taháme míče a hru ukončíme vytažením bílého a černého míče za sebou. Jaká je střední hodnota počtu vytažených bílých míčků?

Příklad 2 (4 bodů). Pro celočíselný náhodný vektor X, Y definujte podmíněnou střední hodnotu $\mathrm{E}(X|Y)$. Dokažte

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X|Y)\big).$$

Příklad 3 (5 bodů). Náhodná veličina X má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ pro } x > 1, f(x) = 0, \text{ pro } x < 1.$$

Definujme $Y := [X]$ (tj. Y je dolní celá část X). Spočtěte $P(X = k)$ pro $k = 0, 1, \dots$ a určete $\mathrm{E}Y$.

Příklad 4 (8 bodů). Pojišťovna letos uzavřela 20000 smluv o náhradě škody. Každý klient zaplatí roční pojistné a nezávisle na ostatních během roku uplatní s pravděpodobností 0,005 nárok na pojistné plnění ve výši 250 000 korun. V následujícím využijte centrální limitní větu (použijte $u_{0,95} = 1,645$, $u_{0,975} = 1,96$ a $u_{0,99} = 2,33$):

(a) Určete 95% intervalový odhad počtu uplatněných škod (tedy interval, který obsáhne **počet** škod s danou pravděpodobností).

(b) Jaké pojistné by měla pojišťovna žádat, aby její **ztráta** v daném roce s pravděpodobností 0,99 nepřesáhla 1,5 milionu korun?

(c) S jakou pravděpodobností při ročním pojistném 1350 Kč pojišťovna dosáhne vyššího než loňského zisku, který činil 2,5 milionu korun? (Výsledek stačí uvést ve formě distribuční funkce normálního rozdělení.)

Příklad 5 (6 bodů). Definujte náhodný vektor, vysvětlete a spočítejte následující.

(a) Distribuční funkce dvourozměrného náhodného vektoru a její vlastnosti.

(b) Marginální rozdělení a jeho vztah ke sdruženému rozdělení. Jak poznáme nezávislost?

(c) Kovariance a její vlastnosti.

(d)* Uvažujte hod dvěma **čtyřstěnnými** hracími kostkami, modrou a červenou. Určete **korelaci** mezi *rozdílem výsledků* na modré a červené kostce *a součtem výsledků* na modré a červené kostce. (Rozdíl tedy může být i záporný, odečtete výsledek na červené kostce od výsledku na modré.)

Příklad 6 (6 bodů). Definujte bodový odhad parametru. Jaká je jeho interpretace? Vysvětlete metodu momentů. Pomocí vhodných limitních vět ukažte, že vhodně zkonstruovaný bodový odhad je konzistentní.
(Začněte od náhodného výběru a jeho parametrického rozdělení. Můžete uvažovat i konkrétní rozdělení jako příklad, na kterém své úvahy vysvětlíte; například můžete ukázat bodový odhad pravděpodobnosti nuly v Poissonově rozdělení.)

Poznámky: Za každý příklad lze získat určený počet bodů, celkem 36. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **19 bodů**. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Ne vždy musí být výsledek jednoduše vyjádřitelný (jedna hodnota, jednoduchá funkce). Pokuste se výsledek dostat do co nejkompaktnějšího tvaru (například nekonečná řada, určitý integrál,...).

Oddělujte, prosím, zřetelně jednotlivé otázky a jejich podotázky. Výsledky přehledně zapište.
Podepište všechny odevzdávané papíry a vyznačte jejich počet