Písemka 3. 6. 2015

Příklad 1 (6 bodů). Adam a Bedřich hrají hru, ve které poražený dává vítězi jeden dolar. Hra se hraje opakovaně, dokud někdo není bez peněz (bankrot). Adam je ve hře o něco lepší a zvítězí v ní s pravděpodobností $\frac{3}{5}$. Adam má před první hrou 1 dolar, Bedřich má před první hrou 2 dolary.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí bankrotem Bedřicha?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že se hrálo celkem k her, za předpokladů, že zbankrotoval Adam?
(c)* Jaká je střední hodnota počtu her, než někdo zbankrotoval. Jaká je pravděpodobnost, že se hrálo celkem k her, za předpokladu, že zbankrotoval Adam?

Příklad 2 (3 body). Zformulujte a dokažte větu o úplné pravděpodobnosti.

Příklad 3 (8 bodů). Denní počet X oznámení o loupeži se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$, tedy

$$P[X = k] = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k =, 1, 2, \ldots$$

Je známo, že 15 % oznámení je falešný poplach. Jaké je rozdělení a jaké je střední hodnota denního počtu falešných poplachů.

Příklad 4 (7 bodů). Předpokládejte, že fakt, že člověk je levák je jev s pravděpodobností p. V náhodném výběru 700 lidí jich 112 uvedlo, že jsou leváci.

(a) Určete bodový odhad pravděpodobnosti p.
(b) Určete asymptotický intervalový odhad o spolehlivosti 95% pro podíl leváků v populaci (pro parametr p). Využijte $u_{0,975} = 1,96$
(c) Jak se postavíte k tvrzení, že podíl leváků v populaci je 12 %?

Příklad 5 (6 bodů). Definujte nezávislost náhodných jevů. Dále dokažte, či vyvraťte:

(a) Disjunktní jevy A a B jsou nezávislé.
(b) Jevy A a B jsou nezávislé právě když $P(A|B) = P(A)$.
(c) Jsou-li jevy A a B nezávislé, jevy A a C nezávislé a jevy B a C nezávislé, pak i jevy A, B a C jsou nezávislé.
(d)* Všechny jevy s nulovou pravděpodobností a všechny jevy s jednotkovou pravděpodobností jsou nezávislé s libovolným náhodným jevem.

Příklad 6 (6 bodů). Zformulujte zákon velkých čísel v podobě založené na Čebyševově nerovnosti. Co je to konvergence v pravděpodobnosti? Pomocí zákona velkých čísel ukažte, že pro náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots$ z Poissonova rozdělení (viz příklad 3) je

$$\exp(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

konzistentním odhadem $P[X = 0]$.

Poznámky: Za každý příklad lze získat určený počet bodů, celkem 36. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **19 bodů**. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Doporučujeme **nejdříve** každou teoretickou otázku alespoň **stručně zodpovědět** (tj. např. zformulovat tvrzení, uvést definici, apod.) a až když Vám zůstane čas, tak se pouštět do podrobnější odpovědi (tj. např. důkazu tvrzení, odvozování, apod.).

Oddělujte, prosím, zřetelně jednotlivé otázky a jejich podotázky. Výsledky přehledně zapište.
Podepište všechny odevzdávané papíry a vyznačte jejich počet

(2) $P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B|A_k) \cdot P(A_k)$, $A_1, A_2, \dots$ disjunktní rozklad Ω , $P(A_k) > 0$

<u>D</u>: $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap \bigcup_k A_k) = P(\bigcup_k (B \cap A_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B \cap A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) \cdot P(B|A_k)$

$P(B|A_k) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(A_k)} \longrightarrow P(B \cap A_k) = P(A_k) \cdot P(B|A_k)$

---

(6) $P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$ ZVČ: $\overline{X}_n \xrightarrow{s.j./p.} \lambda \overset{(*)}{\Rightarrow} e^{-\overline{X}_n} \xrightarrow{s.j./p.} e^{-\lambda}$

<u>ČEB</u>: $P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) = \frac{\operatorname{var} X}{\varepsilon^2}$; <u>DEF</u>: $X_n \xrightarrow{P} X \equiv P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

<u>ZVČ</u>: $\operatorname{var} X_1 < \infty$, $X_1, \dots, X_n$ iid $\Rightarrow \overline{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}X_1$

(3) ozn. Y počet falešných poplachů , $p := 0{,}15$ $\qquad Po(0{,}15 \cdot \lambda)$

$$P(Y=l) = \sum_{k=l}^{\infty} \underbrace{P(Y=l|X=k)}_{\sim Bi(p,k)} \cdot \underbrace{P(X=k)}_{\sim Po(\lambda)} = \sum_{k=l}^{\infty} \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\cancel{k!}}{l!(k-l)!} p^l (1-p)^{k-l} \frac{\lambda^k}{\cancel{k!}} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} (\lambda \cdot p)^l \cdot \frac{1}{l!} \underbrace{\sum_{k=l}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{k-l}}{(k-l)!} e^{-\lambda(1-p)}}_{=1} \cdot e^{\lambda(1-p)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda p} , \quad l = 0, 1, \dots \quad \Rightarrow Y \sim Po(p \cdot \lambda)$$

$$\mathbb{E}Y = p \cdot \lambda$$

(*): Věta: $X_n \xrightarrow{s.j./p.} c \wedge g$ je spojitá $\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{s.j./p.} g(c)$

④ $A_i = \mathbb{1}_{[i\text{-tý čl. je levák}]} \sim Alt(p)$ $\quad i = 1, \dots, n, \quad n = 700$

a) $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i =: \bar{A}_n$

b) $\frac{\bar{A}_n - p}{\sqrt{\operatorname{var} A_1}} \sqrt{n} = \frac{\bar{A}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{n} \;\dot\sim\; N(0;1)$ a také $\frac{\bar{A}_n - p}{\sqrt{\bar{A}_n(1-\bar{A}_n)}} \sqrt{n} \;\dot\sim\; N(0;1)$

$\Rightarrow P\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \qquad \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}95$

$P\left(-1{,}96 \sqrt{\frac{\bar{A}_n(1-\bar{A}_n)}{n}} \le \bar{A}_n - p \le 1{,}96 \sqrt{\frac{\bar{A}_n(1-\bar{A}_n)}{n}}\right) = 0{,}95$

$\bar{A}_n + \sqrt{\qquad} \ge p \ge \bar{A}_n - 1{,}96 \sqrt{\qquad}$

$\Rightarrow IS_{0{,}95}(p) = \left(\bar{A}_n \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\bar{A}_n(1-\bar{A}_n)}{n}}\right) \doteq (0{,}16 \pm 0{,}027)$

c) není to pravda (s pstí 95%), protože $12\% \notin IS_{0{,}95}(p)$

⑤ DEF: A, B nezávislé $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

a) $P(A \cap B) = 0 \; \dots \; P(A) \cdot P(B) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0$

$\Rightarrow$ A, B disjunktní jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0$

b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{\text{n}}{=} \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$, pokud $P(B) > 0$

c) není pravda, je třeba najít nějaký protipříklad

mějme 1 devítistěnnou kostku $\quad A = [\text{padlo } 1, 2, 3]$

$B = [\text{padlo } 3, 4, 5]$

$C = [\text{padlo } 1, 5, 9]$

$P(A \cap B) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(A)\, P(B)$

$P(B \cap C) = \frac{1}{9} = P(B) \cdot P(C)$

$P(A \cap C) = \frac{1}{9} = P(A) \cdot P(C)$

ale $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \ne P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

d) mějme jev A, $P(A) = 0$ a B, $P(B) = 1$. Chceme ukázat, že jsou nezávislé s libovolným jiným jevem C, tj. i) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ a ii) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

i) $P(A \cap C) \le P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap C) = 0 \quad \wedge \quad P(A) \cdot P(C) = 0 \cdot P(C) = 0$ ✓

ii) $P(B \cap C) \overset{?}{=} P(C) \qquad B = \Omega \setminus N, \quad P(N) = 0$

$P(B \cap C) = P(\Omega \setminus N \cap C) = P(\Omega \cap C \setminus N \cap C) = P(\Omega \cap C) - P(N \cap C) = P(C) - 0 = P(C)$ ✓

$P(N \cap C) \le P(N) = 0 \Rightarrow P(N \cap C) = 0$

a) $P(B \text{ prohraje v } k\text{-tém kole}) = 0 \quad k = 0,1$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^2, \quad k=2$

$= 0, \quad k=3$

$= \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3, \quad k=4$

$$= \begin{cases} 0 & k = 2l+1, \quad l\in\mathbb{N} \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{l+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{l-1} & k = 2l \end{cases}$$

$$P(B \text{ prohraje}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B \text{ prohraje v } k\text{-tém kole}) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{l+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{3\cdot 2}{5\cdot 5}\right)^{l}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{9}{25}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{6}{25}\right)^l = \frac{9}{25}\cdot\frac{1}{1-\frac{6}{25}} = \frac{9}{25}\cdot\frac{25}{19} = \frac{9}{19}$$

b) $$P(\text{Adam zbankrotoval v } k \mid \text{Adam zbankrotoval}) = \frac{P(\text{Adam zbankrotoval v } k)}{P(\text{Adam zbankrotoval})} =$$

$$= \frac{19}{11}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{k+1}{2}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{k-3}{2}}, \quad k = 2l+1,\ l\in\mathbb{N}, \quad 0 \text{ jinak}$$

$$P(A \text{ v } k) = \begin{cases} 0 & k = 2l \\ \left(\frac{2}{5}\right)^{l+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{l-1} & k = 2l+1 \quad \dots \quad l = \frac{k-1}{2} \end{cases}$$

c) lze počítat z definice stř. hodnoty $\qquad Y$ = počet her

$$\mathbb{E}Y = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot \underbrace{P(\text{hra skončí v } k\text{-tém kole})}_{= P(B \text{ prohraje v } k\text{-tém}) + P(A \text{ prohraje v } k\text{-tém})}$$

výpočet je ale náročnější, je třeba integrovat sumu, pak ji sečíst, a výsledek zderivovat

Elegantnější řešení: označ $K_i := [B \text{ má } i \text{ dolarů}], \quad i = 0,1,2,3$

$m_i :=$ střední doba trvání hry, když se začne v K_i

nás zajímá m_2, zřejmě $m_0 = m_3 = 0$, protože v K_0 a K_3 hra končí

soustava rovnic: $\begin{cases} m_1 = 1 + \frac{2}{5}\cdot m_2 \\ m_2 = 1 + \frac{3}{5}\cdot m_1 \end{cases}$ $\qquad m_2 = 1 + \frac{3}{5}\cdot\left(1 + \frac{2}{5}m_2\right) \rightsquigarrow m_2 = \dots$