Písemka 21. 1. 2016

Příklad 1 (6 bodů). V osudí je šest bílých, šest modrých a osm červených koulí.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že ve třech tazích **bez vracení** vytáhneme od každé barvy jednu kouli?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že ve třech tazích **s vracením** vytáhneme od každé barvy jednu kouli?

(c) Uvažujte tahy **bez vracení**. Určete pravděpodobnost, že v prvních dvou tazích byla vytažena červená koule, za podmínky, že ve třetím tahu byla vytažena modrá koule.

(d)* Uvažujte tahy **s vracením**. Jaká je střední hodnota počtu tahů předcházejících prvnímu vytažení červené koule (tedy: je-li červená vytažena **v prvním tahu**, předchází tomuto vytažení **nula** tahů).

Příklad 2 (3 body). Zformulujte a dokažte Bayesovu větu.

Příklad 3 (8 bodů). Denní počet K knih prodaných v knihkupectví na Zbraslavi se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$, tedy

$$P[K = k] = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Denní počet map M prodaných v témže knihkupectví se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\mu > 0$. Je známo, že počet prodaných knih a počet prodaných map jsou nezávislé náhodné veličiny. **Odvoďte** rozdělení celkového počtu prodaných map a knih za jeden den.

Příklad 4 (7 bodů). Dostali jste za úkol zjistit, zda hrací kostky hází hodnotu šest opravdu s pravděpodobností $p = 1/6$. Provedli jste 540 kontrolních hodů, přičemž šestka padla ve 108 případech.

(a) Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte shora pravděpodobnost, že bodový odhad $\widehat{p} = 108/540$ se od skutečné neznámé hodnoty p liší nejvýše o 0,02.

(b) Určete asymptotický intervalový odhad o spolehlivosti 90% pro pravděpodobnost šestky (pro parametr p). Využijte $u_{0,95} = 1,645$

(c) Jak se postavíte k tvrzení, že šestka padá s pravděpodobností 1/6?

Příklad 5 (6 bodů). Definujte podmíněnou pravděpodobnost. Dále za předpokladu $P(A \cap B) > 0$.dokažte, či vyvraťte následující tvrzení:

(a) Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

(b) Jevy A a B jsou nezávislé právě když $P(A|B) = P(B|A)$.

(c) Pro disjunktní jevy A a B platí $P(C|A) + P(C|B) = P(C|A \cup B)$.

(d)* $P(C|A \cap B) = P(C)$ právě když C a A jsou nezávislé jevy a současně C a B jsou nezávislé jevy.

Příklad 6 (6 bodů). Zformulujte centrální limitní větu (včetně předpolkadů!). Co je to konvergence v distribuci (v rozdělení)? S vyžitím centrální limitní věty ukažte, že pro náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots$ z alternativního rozdělení $P(X = 1) = P(X = 0) = 1/2$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{n}{2} + \sqrt{n}\right) = \infty.$$

Poznámky: Za každý příklad lze získat určený počet bodů, celkem 36. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **19 bodů**. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Doporučujeme **nejdříve** každou teoretickou otázku alespoň **stručně zodpovědět** (tj. např. zformulovat tvrzení, uvést definici, apod.) a až když Vám zůstane čas, tak se pouštět do podrobnější odpovědi (tj. např. důkazu tvrzení, odvozování, apod.).

Oddělujte, prosím, zřetelně jednotlivé otázky a jejich podotázky. Výsledky přehledně zapište.
Podepište všechny odevzdávané papíry a vyznačte jejich počet