

Písemná část zkouky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď A(no)/N(e) nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednoduším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Zdůvodnění ka«dé polo«ky odpovědi uveďte do rámečku **Zdůvodnění**, není-li řečeno jinak.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a veobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalšího mů«e být principiálně správný, avak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřeena správně, se ziskem 2 body, jsou-li vechny její části zodpovězeny správně včetně po«adovaných zdůvodnění; jinak je rozřeena nesprávně. Písemná zkouka je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřeeny správně 3 (6 b.) resp. 2 úlohy (4b.); jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřeené úlohy mů«e znamenat zisk zlomků bodů a pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkouky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, «e jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „ x, y jsou proměnné“ značí, «e x, y jsou různé proměnné.)

Jednoduchá extenze teorie T je extenze teorie T ve stejném jazyce, jaký má T .

Ohodnocení v prvovýroků $\{p_0, \dots, p_{l-1}\}$ se značí také jako l -tice $\langle v(p_0), \dots, v(p_{l-1}) \rangle$.

V úlohách z predikátové logiky jsou vechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL]

- A) Nech $\mathbb{P}$ množina $\mathbb{P}$ vech prvovýroků je l -prvková s $l \in \mathbb{N}$, ψ_0, ψ_1 jsou $\mathbb{P}$ -výroky s $\vdash \psi_0 \rightarrow \psi_1$ a $m_i = |\mathbf{M}(\psi_i)|$, $i = 0, 1$.
- Uveďte $|\mathbf{M}(\psi_1 \rightarrow \psi_0)|$.
 - Kolik je $\mathbb{P}$ -výroků φ s $\vdash \psi_0 \rightarrow \varphi$, $\vdash \varphi \rightarrow \psi_1$, ztotožníme-li ekvivalentní?

Odpověď.

- $2^l - m_1 + m_0$.
- $2^{m_1 - m_0}$.

Zdůvodnění.

- $\mathbf{M}(\psi_1 \rightarrow \psi_0) = \mathbf{M}(\neg\psi_1) \cup \mathbf{M}(\psi_0)$ disjunktně díky $\mathbf{M}(\psi_0) \subseteq \mathbf{M}(\psi_1)$ a $\mathbf{M}(\neg\psi_1) = 2^l - m_1$.
- Jde právě o počet množin $K = \mathbf{M}(\varphi)$ s $\mathbf{M}(\psi_0) \subseteq K \subseteq \mathbf{M}(\psi_1)$; takových K je $2^{m_1 - m_0}$.

- B) Buďte p, q dva různé prvovýroky a $\dot{\vee}$ nech $\dot{\vee}$ značí výlučnou disjunkci čili XOR.

- Napíšte (co nejjednoduší) axiomatiku teorie $T = \{p \dot{\vee} q\}$, tvořenou jen klauzulemi.
- Nech $\mathbb{P}$ množina $\mathbb{P}$ vech prvovýroků je l -prvková s $2 \leq l \in \mathbb{N}$. Uveďte $|\mathbf{M}(p \dot{\vee} q)|$.

Odpověď.

- $\{p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$.
- 2^{l-1} .

Zdůvodnění.

- Evidentně $\vdash p \dot{\vee} q \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.
- Je to $2 \cdot 2^{l-2}$, nebo $\dot{\vee}$ to je velikost množiny $\mathbf{M}(T) = \{v : \mathbb{P} \rightarrow 2; v(p) = \neg v(q)\}$.

ÚLOHA 2 [PL]

- Buď T jednoduchá extenze teorie částečného uspořádání (v jazyce $\langle \leq \rangle$ s rovností) o axiom χ tvaru $(\forall x, y)(\exists z)(x \leq z \ \& \ y \leq z \ \& \ (\forall z')((x \leq z' \ \& \ y \leq z') \rightarrow z \leq z'))$ („každá dvouprvková množina má supremum“).
- Buď $\mathcal{A} = \langle N, \leq^A \rangle$, kde $\leq^A = \leq - \{ \langle 0, 1 \rangle \}$. ($\leq$ značí obvyklé uspořádání $\mathbb{N}$. Zřejmě je $0 \not\leq^A 1 \not\leq^A 0$.)

A)

- Je struktura $\mathcal{A}$ model T ?
- Je formule χ' tvaru $(\forall u, v)(\exists z)(\forall z')(u \leq z \ \& \ v \leq z \ \& \ (u \leq z' \ \& \ v \leq z' \rightarrow z \leq z'))$ prenexní ekvivalent χ ?
- Buď dále F unární funkční symbol a χ° buď formule $(\forall u, v)(\forall z')(u \leq F(u) \ \& \ v \leq F(v) \ \& \ (u \leq z' \ \& \ v \leq z' \rightarrow (F(u) \leq z' \ \& \ F(v) \leq z')))$.
Je χ° Skolemova varianta formule χ' ?
- Je T otevřeně axiomatizovatelná?

Odpověď.

- A
- A
- N
- N

Zdůvodnění.

- Jasně je $\mathcal{A} \models T$. ($\sup_{\mathcal{A}} \{0, 1\} = 2$, $\sup_{\mathcal{A}} \{m, n\} = \max\{m, n\}$, je-li $m \geq 2$ nebo $n \geq 2$.)
- Získá se z χ prenexními operacemi.
- Skolemova varianta formule χ' musí být v jazyce s binárním funkčním symbolem díky $(\forall u, v)(\exists z)$ na začátku χ' .
- Podstruktura $\mathcal{B} = \mathcal{A} \upharpoonright \{0, 1\}$ modelu $\mathcal{A}$ teorie T není model T , nebo $\{0, 1\}$ nemá v $\mathcal{B}$ supremum.

B) Buď ψ formule $(\exists y)(\neg(x \leq y) \ \& \ \neg(y \leq x))$.

- Existuje vlastní elementární extenze $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$ tak, «e $\{a \in A; \mathcal{A} \models \psi[a]\} \subsetneq \{b \in B; \mathcal{B} \models \psi[b]\}$?
- Existuje vlastní elementární extenze $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$ tak, «e $\{a \in A; \mathcal{A} \models \neg\psi[a]\} \subsetneq \{b \in B; \mathcal{B} \models \neg\psi[b]\}$?

Odpověď.

- N
- A

Zdůvodnění.

- Buď $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$. Proto «e v $\mathcal{A}$ platí „existují právě dva prvky splňující ψ “, platí to i v $\mathcal{B}$ a tedy $\{a \in A; \mathcal{A} \models \psi[a]\} = \{b \in B; \mathcal{B} \models \psi[b]\}$.
- Buď $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, $A \subsetneq B$. Je $\{a \in A; \mathcal{A} \models \psi[a]\} = \{b \in B; \mathcal{B} \models \psi[b]\}$, tedy $\{a \in A; \mathcal{A} \models \neg\psi[a]\} \subsetneq \{b \in B; \mathcal{B} \models \neg\psi[b]\}$.

ÚLOHA 3 [PL] Buď T extenze teorie SC_0 následníka s nulou právě jen o jeden konstantní symbol c (a o «ádný nový mimologický axiom).

A) Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

- a) $I(\omega, T) = 1$.
- b) T je kompletní.
- c) T je rozhodnutelná.
- d) T má eliminaci kvantifikátorů.

Odpověď.

- a) N
- b) N
- c) A
- d) A

Zdůvodnění.

- a) $\langle \mathbb{N}, S, 0, 0 \rangle \not\equiv \langle \mathbb{N}, S, 0, 1 \rangle$. Podrobněji: $I(\omega, T) = \omega$. Jednoduché kompletní extenze teorie T jsou $T_n = T \cup \{c = \underline{n}\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $T_\infty = T \cup \{c \neq \underline{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ je $I(\omega, T_n) = \omega = I(\omega, T_\infty)$ z analogických důvodů, jako je $I(\omega, SC_0) = \omega$.
- b) $c = 0$ je nezávislá sentence teorie T .
- c) T má rekursivní kompletaci. Nebo, jednoduché kompletní extenze teorie T jsou $T_n = T \cup \{c = \underline{n}\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $T_\infty = T \cup \{c \neq \underline{n}; n \in \mathbb{N}\}$.
- d) T je 1-koexistenční; plyne to zcela stejně jako pro SC_0 . Jiné řešení. T je extenze SC_0 o nový konstantní symbol a «ádné nové mimologické axiomy. Tedy T má eliminaci kvantifikátorů, má-li SC_0 , a SC_0 má.

B) Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

- a) Teorie $S = \text{Th}(\langle \mathbb{N}, S, 0, 1 \rangle)$ je ekvivalentní s jednoduchou extenzí T' teorie T o axiom $c = S0$.
- b) Teorie $S = \text{Th}(\langle \mathbb{N}, S, 0, 1 \rangle)$ je konečně axiomatizovatelná.

Odpověď.

- a) A
- b) N

Zdůvodnění.

- a) Stačí ukázat, «e T' je kompletní, nebo $\langle \mathbb{N}, S, 0, 1 \rangle \models T'$. Kompletlost T' plyne z kategorického kritéria, nebo $I(\kappa, T') = 1$ pro každou nekonečnou nespočetnou velikost κ a T' má jen nekonečné modely. Jiný důkaz kompletlosti T' . T' má eliminaci kvantifikátorů (i T má eliminaci kvantifikátorů) a $\langle \mathbb{N}, S, 0, 1 \rangle$ je algebraický prvomodel T' .
- b) Kdyby T' byla konečně axiomatizovaná, lo by její SC-schema nahradit jeho konečným fragmentem $\{S^n x \neq x; 0 < n < k\}$ pro jisté $k > 1$. Existuje model T' , obsahující $\langle \mathbb{N}, S, 0, 1 \rangle$ a část izomorfní s $\langle k, S \rangle$, kde $S^n = n + 1$ pro $n < k - 1$, $S(k - 1) = 0$; to není model T' , nebo v něm platí $(\exists x)(S^k x = x)$ – spor.