

Písemná část zkouky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď A(no)/N(e) nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednoduším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Zdůvodnění ka«dé polo«ky odpovědi uveďte do rámečku **Zdůvodnění**, není-li řečeno jinak.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a veobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalšího mů«e být principiálně správný, avak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřeena správně, se ziskem 2 body, jsou-li vechny její části zodpovězeny správně včetně po«adovaných zdůvodnění; jinak je rozřeena nesprávně. Písemná zkouka je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřeeny správně 3 (6 b.) resp. 2 úlohy (4b.); jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřeené úlohy mů«e znamenat zisk zlomků bodů a pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkouky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, «e jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „ x, y jsou proměnné“ značí, «e x, y jsou různé proměnné.)

Jednoduchá extenze teorie T je extenze teorie T ve stejném jazyce, jaký má T .

Ohodnocení v prvovýroků $\{p_0, \dots, p_{l-1}\}$ se značí také jako l -tice $\langle v(p_0), \dots, v(p_{l-1}) \rangle$.

V úlohách z predikátové logiky jsou vechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

A) Nech množina $\mathbb{P}$ vech prvovýroků je konečná, $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ (je nějaká množina ohodnocení prvovýroků z $\mathbb{P}$).

- Napíšte množinu T klauzulí, axiomatizující K .
- Kolik je $\mathbb{P}$ -výroků φ s $T \models \varphi$, ztotožníme-li ekvivalentní?

Odpověď.

- $\{\bigvee_{p \in \mathbb{P}} \neg p^{v(p)}; v \in {}^{\mathbb{P}}2 - K\}$.
- $2^{2^{|\mathbb{P}|} - |K|}$.

Zdůvodnění.

- Jasně pro $w \in {}^{\mathbb{P}}2$ je w model uvedených klauzulí, právě když $w \in K$.
- Má právě platit $K \subseteq M(\varphi)$, tj. jde o počet množin M s $K \subseteq M \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ (nebo každá taková M určuje a na ekvivalenci jednu $\mathbb{P}$ -formuli φ s $M(\varphi) = M$). Uvedených M je právě $2^{2^{|\mathbb{P}|} - |K|}$.

B) Buď T nějaká výroková teorie a φ, ψ její dva výroky. Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

- $(T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \psi)$ implikuje $(T \vdash \varphi \rightarrow \psi)$.
- $T \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\varphi) - M(\psi)$.

Odpověď.

- N
- A

Zdůvodnění.

- Protipříklad: pro dva různé prvovýroky p, q máme $\vdash p \Rightarrow \vdash q$, ale $\nvdash p \rightarrow q$.
- $T \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow T \vdash (\varphi \ \& \ \neg\psi) \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\varphi) \cap -M(\psi) = M(\varphi) - M(\psi)$.

ÚLOHA 2 [PL]

Buď T teorie v jazyce $\langle \cdot \rangle$ s rovností a binárním funkčním symbolem $\cdot$, přičemž axiomatika T je $\{\chi_0, \chi_1\}$, kde:

$$\chi_0 \text{ je } x \cdot y = y \cdot x, \quad \chi_1 \text{ je } (\exists x, y)(x \neq y) \ \& \ (\forall x)(\exists y)(y \cdot y = x).$$

A)

- Je struktura $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle$ model T ? ($\mathbb{C}$ je množina komplexních čísel a $\cdot$ je obvyklé násobení komplexních čísel.)
- Je formule χ'_1 tvaru $(\exists u, v)(\exists y)(\forall x)(u \neq v \ \& \ y \cdot y = x)$ ekvivalentní s χ_1 ?
- Buďte dále c, d konstantní symboly, G unární funkční symbol a χ_1° buď formule $(\forall x)(c \neq d \ \& \ G(x) \cdot G(x) = x)$.
Je χ_1° Skolemova varianta nějaké formule ekvivalentní s χ_1 ?
- S buď $\langle \cdot, c, d, G \rangle$ -teorie s axiomatikou $\{\chi_0, \chi_1^\circ\}$. Je S konzervativní extenze T ?

Odpověď.

- A
- N
- A
- A

Zdůvodnění.

- Jasně je $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle \models T$.
- V $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle$ platí χ_1 , neplatí však χ'_1 ; tedy χ_1 není ekvivalentní s χ'_1 . (Místo $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle$ lze vzít např. též $\langle \{0, 1\}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je obvyklé násobení přirozených čísel.)
- Formule $(\exists u, v)(\forall x)(\exists y)(u \neq v \ \& \ y \cdot y = x)$, ličí se od χ'_1 jen prohozením $(\exists y)$ a $(\forall x)$, je v prenexním tvaru a ekvivalentní s χ_1 . Formule χ_1° je její Skolemova varianta, což plyne bezprostředně z definice.
- Protože je χ_1° Skolemova varianta ekvivalentu axiomu χ_1 v prenexním tvaru, je extenze T' teorie T o χ_1° konzervativní extenze T (což plyne z věty o extenzi o funkční symbol). Díky $\vdash \chi_1^\circ \rightarrow \chi_1$ vynecháním axiomu χ_1 získáme teorii ekvivalentní s T' a je to ovšem teorie s axiomatikou $\{\chi_0, \chi_1^\circ\}$, tj. teorie S .

B) Buď T' extenze T o následující definici unárního predikátového symbolu R :

$$R(x) \leftrightarrow (\forall y, z)((y \cdot y = x \ \& \ z \cdot z = x) \rightarrow y = z).$$

- Nechť φ je $L(T')$ -formule $(\exists z)R(z)$ a φ^* její dR -překlad do T . Napíšte φ^* .
- Platí $T' \vdash (\forall x)R(x)$?

Odpověď.

- $(\exists z)(\forall y, y')((y \cdot y = z \ \& \ y' \cdot y' = z) \rightarrow y = y')$ (s y, y' různými od z, x).
- N

Zdůvodnění.

- dR -překlad se získá dle definice nahrazením každé podformule $R(t)$ variantou definující formule o termu t , ve které není žádná proměnná formule φ kvantifikovaná. V našem případě dostaneme např. uvedené.
- $\langle \mathbb{C}, \cdot, r \rangle$, kde $\cdot$ je obvyklé násobení komplexních čísel a r je (jednoznačně určená) realizace symbolu R , je model T' , ve kterém platí $(\exists x)\neg R(x)$, neboť např. $\langle \mathbb{C}, \cdot, r \rangle \models \neg R(x)[1]$ díky $1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$.

ÚLOHA 3 [PL] Buď T extenze teorie DeLO hustého lineárního uspořádání bez konců právě jen o dva konstantní symboly c, d (a o «ádný nový mimologický axiom).

A) Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

- a) $I(\omega, T) = 4$.
- b) T je rozhodnutelná.
- c) T má eliminaci kvantifikátorů.
- d) T má právě dva algebraické prvomodely.

Odpověď.

- a) N
- b) A
- c) A
- d) N

Zdůvodnění.

- a) $I(\omega, T) = 3$. Dva spočetné modely teorie T jsou jasně izomorfní, právě kdy« v obou platí $c = d$ nebo v obou platí $c \leq d \ \& \ c \neq d$ nebo v obou platí $d \leq c \ \& \ c \neq d$.
- b) T je extenze DeLO jen o dva nové konstantní symboly, tedy T a DeLO jsou ekvirozhodnutelné dle kriteria nerozhodnutelnosti. Proto«e je rozhodnutelné DeLO, je i T . Jiné řešení. T má právě tři neekvivalentní jednoduché kompletní extenze, totiž« $T \cup \{c = d\}$, $T \cup \{c \leq d \ \& \ c \neq d\}$ a $T \cup \{d \leq c \ \& \ c \neq d\}$; tudí« má T rekursivní kompletaci.
- c) T je jasně f-homogenní. (Díky existenci parciálního vnoření mezi dvěma modely teorie T v obou platí $c = d$ nebo v obou platí $c \leq d \ \& \ c \neq d$ nebo v obou platí $d \leq c \ \& \ c \neq d$.)
- d) T nemá «ádný algebraický prvomodel, nebo, spočetný model teorie T , ve kterém platí $c = d$, nelze vnořit do spočetného modelu T , ve kterém platí $c \neq d$.

B) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq, 0, 0 \rangle$ (kde $\leq$ je obvyklé uspořádání racionálních čísel).

- a) Uveďte všechny neprázdné množiny $D \subseteq \mathbb{Q}$ definovatelné bez parametrů v $\mathcal{A}$ a navíc „minimální“, tj. takové, «e jakmile množina D' je definovatelná bez parametrů v $\mathcal{A}$ a $D' \subseteq D$, tak $D' = \emptyset$ nebo $D' = D$.
- b) Kolik je právě podmnožin $\mathbb{Q}$ definovatelných bez parametrů v $\mathcal{A}$?

Odpověď.

- a) $(-\infty, 0)$, $\{0\}$, $(0, +\infty)$. ($(-, -)$ značí interval v $\mathbb{Q}$.)
- b) 8 ($= 2^3$).

Zdůvodnění.

- a) $\mathcal{A} \models T$ a T má eliminaci kvantifikátorů. Tudí« všechny bez parametrů v $\mathcal{A}$ definovatelné podmnožiny $\mathbb{Q}$ se získají pomocí $-$, $\cap$ a $\cup$ z množin definovaných bez parametrů atomickými formulemi, kterými jsou $x \leq x$, $x = x$, $x = c$, $x \leq c$, $c \leq x$ (formule s d nemusíme uvažovat díky $c^A = 0 = d^A$). Uvedené formule definují po řadě množiny: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$, $\{0\}$, $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$. Hledané množiny D jsou tudí« právě $(-\infty, 0)$, $\{0\}$, $(0, +\infty)$.
- b) Díky minimalitě $(-\infty, 0)$, $\{0\}$, $(0, +\infty)$ jsou uvažované definovatelné množiny právě tvořené sjednocením některých z uvedených (včetně prázdné), je jich tedy právě tolik, kolik je podmnožin tříprvkové množiny, tj. $2^3 = 8$.