

Písemná část zkoušky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď A(no)/N(e) nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednodušším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Zdůvodnění každé položky odpovědi uveďte do rámečku **Zdůvodnění**.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a všeobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalšího může být principiálně správný, avšak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřešena správně, se ziskem 2 body, jsou-li všechny její části zodpovězeny správně včetně požadovaných zdůvodnění; jinak je rozřešena nesprávně. Písemná zkouška je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřešeny správně 3 (6 b.) resp. 2 úlohy (4b.); jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřešené úlohy může znamenat zisk zlomků bodů a pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkoušky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, že jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „ x, y jsou proměnné“ značí, že x, y jsou různé proměnné.)

Jednoduchá extenze teorie T je extenze teorie T ve stejném jazyce, jaký má T .

Ohodnocení v prvovýroků $\{p_0, \dots, p_{l-1}\}$ se značí také jako l -tice $\langle v(0), \dots, v(l-1) \rangle$.

V úlohách z predikátové logiky jsou všechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

A) Buď $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ tříprvková množina všech prvovýroků. Nechť $T = \{p, q \rightarrow r\}$ je $\mathbb{P}$ -teorie.

- Napište formuli v DNF, axiomatizující T .
- Napište axiomatiku každé jednoduché kompletní extenze teorie T .

Odpověď.

- $(p \& \neg q) \vee (p \& r)$.
- $p \& \neg q \& r, \quad p \& \neg q \& \neg r, \quad p \& q \& r$.

Zdůvodnění.

- Axiomatika $p \& (q \rightarrow r)$ se „booleovskými úpravami“ snadno převede na ekvivalentní formuli $(p \& \neg q) \vee (p \& r)$.
- Je $\vdash (p \& \neg q) \vee (p \& r) \leftrightarrow (p \& \neg q \& r) \vee (p \& \neg q \& \neg r) \vee (p \& q \& r)$. (1)
Každá JKE teorie T je ekvivalentní elementární konjunkci tvaru $p^{v(p)} \& q^{v(q)} \& r^{v(r)}$, kde $v \models T$. Každý disjunkt ψ_i s $i < 3$ vpravo od $\leftrightarrow$ v (1) má jediný model a tyto jsou právě všemi (třemi) modely T ; tudíž hledanými axiomatikami jsou právě ψ_i s $i < 3$.

B) Nechť množina $\mathbb{P}$ všech prvovýroků je nekonečná.

- Buď $T = \{\neg p \vee \neg q; p, q \text{ jsou různé prvovýroky}\}$. Určete $M(T)$.
- Je T konečně axiomatizovatelná?
- Je množina $K = \{v \in {}^{\mathbb{P}}2; v(p) = 1 \text{ pro alespoň dva různé prvovýroky } p\}$ axiomatizovatelná?

Odpověď.

- $M(T) = \{v \in {}^{\mathbb{P}}2; v(p) = 1 \text{ pro nejvýše jedno } p \in \mathbb{P}\}$.
- N.
- N.

Zdůvodnění.

- Jasně.
- Kdyby byla, tak by měla kontinuum modelů; má však spočetně.
- Je $K = -M(T)$; protože T není konečně axiomatizovatelná, není K axiomatizovatelná.

ÚLOHA 2 [PL] Buď $L = \langle F \rangle$ jazyk s rovností a binárním funkčním symbolem F , T buď L -teorie s jediným axiomem χ tvaru $(\exists y)(\forall x)(F(x, y) \neq x)$. Nechť $\mathcal{A} = \langle 4, + \rangle$ je L -struktura, kde $+$ je sčítání modulo 4. ($4 = \{0, 1, 2, 3\}$.)

- A)
- a) Je $\mathcal{A} \models T$?
 - b) Je množina $\{2\}$ definovatelná bez parametrů v $\mathcal{A}$?
 - c) Kolik a jaké automorfizmy má struktura $\mathcal{A}$.
 - d) Kolik prvků má algebra $\text{Df}^1(\emptyset, \mathcal{A})$?
 - e) Buď $S = \text{Th}(\mathcal{A})$. Kolik je, až na ekvivalenci v S , formulí $\varphi(v_0)$, splňujících zároveň $S \not\models \varphi$ a $S \not\models \neg\varphi$?

Odpověď.

- a) A.
- b) A.
- c) 2. Identitu a $\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$.
- d) 8.
- e) 6.

Zdůvodnění.

- a) $\mathcal{A} \models (\forall x)(F(x, y) \neq x)[a]$ pro $a \in 1, 2, 3$.
- b) Definující formule: $(\exists z)(F(x, x) = z \ \& \ (\forall y)(F(y, z) = y))$.
- c) $\{0\}$, $\{2\}$ jsou definovatelné bez parametrů, tedy $\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$ je jediný neidentický automorfizmus.
- d) Má právě 3 atomy $\{0\}$, $\{2\}$, $\{1, 3\}$, tedy má $2^3 = 8$ prvků.
- e) Je to počet prvků algebry $\text{B}^1 S$ bez $0, 1$. S je kompletní, tedy $\text{B}^1 S \cong \text{Df}^1(\emptyset, \mathcal{A})$ a $\text{Df}^1(\emptyset, \mathcal{A})$ má 8 prvků.

- B)
- a) Je T otevřeně axiomatizovatelná?
 - b) Je $L \cup \{c\}$ -teorie T^* s jediným axiomem $F(x, c) \neq x$ otevřená konzervativní extenze T ? (c je konstantní symbol.)
 - c) Kolik má $\mathcal{A}$ expanzí do modelu T^* , ztotožníme-li elementárně ekvivalentní?

Odpověď.

- a) N.
- b) A.
- c) 2.

Zdůvodnění.

- a) $\mathcal{A} \upharpoonright \{0\} \subseteq \mathcal{A}$, ale $\mathcal{A} \upharpoonright \{0\} \not\models T$.
- b) Axiom $F(x, c) \neq x$ je otevřené jádro Skolemovy varianty axiomu χ (který je v prenexním tvaru).
- c) Jsou to struktury $\langle \mathcal{A}, 2 \rangle$, $\langle \mathcal{A}, 1 \rangle$; druhá je izomorfní s $\langle \mathcal{A}, 3 \rangle$ díky automorfizmu $\mathcal{A}$, identickému na $\{0, 2\}$ a převádějícímu 1 na 3 a naopak.

ÚLOHA 3 [PL] Buď L extenze jazyka uspořádání o konstantní symboly c_0, c_1 .

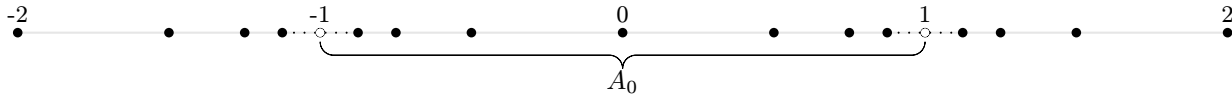
- T buď L -teorie rozšiřující teorii lineárního uspořádání o následující axiomy:

$$c_0 \neq c_1, \quad c_0 \leq x \leq c_1,$$

$$c_0 \neq x \rightarrow x \text{ má bezprostředního předchůdce}, \quad c_1 \neq x \rightarrow x \text{ má bezprostředního následníka}.$$

- Označme T_n extenzi T o formulí „existuje právě n prvků“ a T_∞ extenzi T o schema „existuje nekonečně prvků“.

- A) a) Určete $I(n, T)$ pro $2 \leq n \in \mathbb{N}$.
b) i) Má T algebraický prvomodel? ii) Má T prvomodel?
c) Má T_∞ algebraický prvomodel?
d) Je T_∞ kompletní?
e) Buď $A_0 = \{\pm(1 - \frac{1}{2^n}); n \in \mathbb{N}\}$, $A_1 = \{\pm(1 + \frac{1}{2^n}); n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{A} = \langle A_0 \cup A_1, \leq, -2, 2 \rangle \models T_\infty$ ($\leq$ je obvyklé uspořádání); viz obr. Je množina $\{0\}$ definovatelná v $\mathcal{A}$ bez parametrů? (Návod: lze např. užít vhodný automorfismus.)



Odpověď.

- a) $I(n, T) = 1$ pro $2 \leq n \in \mathbb{N}$.
b) i) A. ii) N.
c) A.
d) A.
e) N.

Zdůvodnění.

- a) Dvě n -prvková lineární uspořádání s $0 < n \in \mathbb{N}$ jsou izomorfní.
b) i) Je to jasně $\langle 2, \leq, 0, 1 \rangle$ (s $0 \leq 1$). ii) T není kompletní, nemá tedy prvomodel.
c) Je to jasně $\mathcal{B} = \langle \{\pm 2^{-n}; n \in \mathbb{N}\}, \leq, -1, 1 \rangle$.
d) Buď T_∞° extenze T_∞ o definice $x <_n y \leftrightarrow$ „mezi x, y je ostře právě n prvků“ s $n \in \mathbb{N}$ stejně jako pro DiLO. Zcela stejně jako pro DiLO plyne 1-koexistence pro T_∞° . Speciálně je T_∞° modelově kompletní. Má algebraický prvomodel $\mathcal{B}^\circ$, jenž je jednoznačnou expanzí $\mathcal{B}$ do modelu T_∞° , tedy je T_∞° kompletní. Protože to je konzervativní extenze T_∞ , je T_∞ kompletní.
e) Zobrazení $h : A \rightarrow A$ identické na A_1 a takové, že $h(a)$ je bezprostřední následník prvku $a \in A_0$, je automorfismus $\mathcal{A}$ s $h(0) = 1/2 \neq 0$ a obrazem $\{0\}$ není $\{0\}$. Dokazované platí díky tvrzení o automorfismu obrazu definovatelné množiny.

- B) a) Je T rozhodnutelná?
b) Kolik má T neekvivalentních rozhodnutelných jednoduchých extenzí?

Odpověď.

- a) A.
b) Spočetně (tj. ω).

Zdůvodnění.

- a) Má rekurzivní kompletaci R , kde $R[n] = \{\ulcorner T \urcorner\} \cup \{\ulcorner \text{existuje právě } n \text{ prvků} \urcorner\}$ pro $2 \leq n \in \mathbb{N}$,
 $\{\ulcorner T \urcorner\} \cup \{\ulcorner \text{existuje alespoň } m \text{ prvků} \urcorner; 1 \leq m \in \mathbb{N}\}$ pro $n = 0$.
 $R[n]$ kóduje teorii T_n s $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $R[0]$ teorii T_∞ .
b) Jsou to např. teorie T_n s $2 \leq n \in \mathbb{N}$.