Důkaz. V libovolném okruhu R z $a \in R^*$ plyne $a \in R^*$ i $b \in R^*$. Dokažme. Proto $a \in R - R^* \Rightarrow ra \in R - R^*$ pro $\forall r \in R$.

Ať R je valuační a ať $a, b \in R - R^*$ jsou libovolné. Je $a/b \in R$ nebo $b/a \in R$. Ať třeba $a/b \in R$. Pak $a + b = b(1 + a/b)$ leží v R, nikoliv však v R^* (pak by bylo $b \in R^*$). Proto $a + b \in R - R^*$, takže $R - R^*$ je ideál.

Předpokládejme, že $I \neq \{0\}$ je (vlastní) ideál. Takový, že $a \in I - \{0\}$ a $b \in \{0\} - I$. Ať například $a/b \in R$. Pak $a = (a/b) \cdot b \in R\{0\} = \{0\}$, což je spor. Proto $I \subset \{0\}$ nebo $\{0\} \subset I$. Zřejmě je zřejmý. ☒

1.7 Tvrzení Každý DVR je lokální obor hlavních ideálů a naopak.

Důkaz. Ať $I \neq 0$ je ideál R. Položme $m = \min\{v(a); a \in I\}$. Pak $m \geq 0$ a bez