I. Vime, że $I = bR$ pro wjaké $b \in R$. Proto $b \in aI = abR$, takže $b = abr$ pro nejakou $r \in R$. Jestli $b \neq 0$, je $1 = ar$, což je spor, neboť $a \notin R^*$. Proto $I = 0$.

To znamená, že $\forall b \in R^{\#}\ \exists i \geq 0$, že $b \notin a^i R$. Tedy $\forall b \in R^{\#}\ \exists! i \geq 0$, že $b \in a^i R \setminus a^{i+1}R = a^i R^*$.

Každé $b \in F^*$ lze proto vyjádřit ve tvaru $\frac{a^i s}{a^j t}$, kde $i, j \geq 0$ a $s, t \in R^*$. Potom $a^i s / a^j t = a^k r$, kde $k = i - j \in \mathbb{Z}$ a $r = st^{-1} \in R^*$. Je-li $k \geq 1$, je $b \in M$. Je-li $k \leq -1$, je $b^{-1} \in M$.

Je-li $b^{-1} \in M$, tak $\exists! i \geq 0$, že $b^{-1} \in a^i R^*$, Pak $b \in a^i R^*$. Vidíme, že $\forall b \in F^*\ \exists! i \in \mathbb{Z}$, že $b \in a^i R^*$

□