Datum: Jméno:

Písemná část zkoušky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď A(no)/N(e) nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednodušším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Zdůvodnění každé položky odpovědi uveďte do rámečku **Zdůvodnění**.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a všeobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalšího může být principiálně správný, avšak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřešena správně, se ziskem 2 body, jsou-li všechny její části zodpovězeny správně včetně požadovaných zdůvodnění; jinak je rozřešena nesprávně. Písemná zkouška je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřešeny správně 3 (6 b.) resp. 2 úlohy (4b.); jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřešené úlohy může znamenat zisk zlomků bodů a pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkoušky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, že jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „x, y jsou proměnné“ značí, že x, y jsou různé proměnné.)

Ohodnocení v prvovýroků $\{p_0, \ldots, p_{l-1}\}$ se značí také jako l-tice $\langle v(0), \ldots, v(l-1)\rangle$.

V úlohách z predikátové logiky jsou všechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL] Nechť množina $\mathbb{P}$ všech prvovýroků je nekonečná, $\mathsf{K} = \{v_0, v_1, v_2\} \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ je tříprvková množina ohodnocení prvovýroků z $\mathbb{P}$ a T teorie, axiomatizující K (tj. $\mathsf{M}(T) = \mathsf{K}$).

A)

a) Uveďte konkrétní axiomatiku ekvivalentní s T.

b) Je množina ${}^{\mathbb{P}}2 - \mathsf{K}$ axiomatizovatelná?

Odpověď.

a) $\{\bigvee_{i<3} p_i^{v_i(p_i)};\ \langle p_0, p_1, p_2\rangle \in \mathbb{P}^3\}$.

b) N

Zdůvodnění.

a) Platí $w(p^{v(p)}) = 1 \Leftrightarrow w(p) = v(p)$. Odtud plyne: když $v \in \mathsf{K}$, tak $v(\bigvee_{i<3} p_i^{v_i(p_i)}) = 1$, a tedy $v \models T$. Když $v \notin \mathsf{K}$, tak $v \not\models T$, neboť existují p_i tak, že $v(p_i) \neq v_i(p_i)$ pro $i < 3$ a tedy $v(\bigvee_{i<3} p_i^{v_i(p_i)}) = 0$.

b) Kdyby ${}^{\mathbb{P}}2 - \mathsf{K}$ byla axiomatizovatelná, byla by K konečně axiomatizovatelná; to plyne z věty o kompaktnosti. Pro splnitelný výrok φ je díky nekonečnosti $\mathbb{P}$ množina $\mathsf{M}(\varphi)$ nekonečná; tudíž žádné φ neaxiomatizuje konečnou množinu K.

B) Buď $S = \{p \in \mathbb{P};\ T \vdash p\}$. Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

a) $S = \bigcap_{i<3} v_i^{-1}[1]$.

b) $S = \bigcup_{i<3} v_i^{-1}[0]$.

c) $T \vdash p \to q \quad \Leftrightarrow \quad v_i(p) \leq v_i(q)$ pro některé $i < 3$.

d) $T \vdash p \vee \neg q \quad \Leftrightarrow \quad v_i(q) \leq v_i(p)$ pro každé $i < 3$.

Odpověď.

a) A

b) N

c) N

d) A

Zdůvodnění.

a) $T \vdash p \Leftrightarrow T \models p \Leftrightarrow v(p) = 1$ pro každé $v \in \mathsf{M}(T)\,(= \mathsf{K}) \Leftrightarrow p \in \bigcap_{i<3} v_i^{-1}[1]$.

b) Platí $S = \bigcap_{i<3} v_i^{-1}[1]$.

c) $T \vdash p \to q \Leftrightarrow T \models p \to q \Leftrightarrow v(p) \leq v(q)$ pro každé $v \in \mathsf{M}(T)\,(= \mathsf{K})$.

d) $T \vdash p \vee \neg q \Leftrightarrow T \vdash q \to p \Leftrightarrow T \models q \to p \Leftrightarrow v(q) \leq v(p)$ pro každé $v \in \mathsf{M}(T)\,(= \mathsf{K})$.

ÚLOHA 2 [PL] Buď L jazyk $\langle < \rangle$, kde $<$ je binární relační, a nechť T je L-teorie s axiomy $\{\chi_0, \chi_1\}$, kde χ_0 je otevřená formule vyjadřující „$<$ je ostré lineární uspořádání“, χ_1 je $(\forall x)(\exists y)(x < y)$.
Buď F unární funkční symbol a T^* buď $\langle <, F \rangle$-teorie s axiomy $\{\chi_0, x < F(x)\}$.

A)

a) Uveďte Skolemovu variantu formule χ_1.
b) Je T^* konzervativní otevřená extenze T?
c) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <^A, F^A \rangle$, kde $<^A$ je obvyklé ostré uspořádání $\mathbb{R}$ a $F^A(a) = a + 1$ pro $a \in \mathbb{R}$. Platí $\mathcal{A} \models T^*$?
d) Buď $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, <^B, G^B \rangle$, kde $<^B$ je obvyklé ostré uspořádání $\mathbb{R}$ a $G^B(a) = a + 1/2$ pro $a \in \mathbb{R}$. Platí $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

Odpověď.

a) $(\forall x)(x < G(x))$, kde G je unární funkční symbol.
b) A
c) A
d) A

Zdůvodnění.

a) Plyne to přímo z definice Skolemovy varianty.
b) T^* je evidentně otevřená teorie. Extenze T' teorie T o axiom $x < F(x)$ je konzervativní extenze T dle věty o extenzi o funkční symbol. Je $\vdash (\forall x)(x < F(x)) \rightarrow \chi_1$ díky tvaru χ_1. ($(\forall x)(x < F(x))$ je Skolemova varianta χ_1.) Tudíž je T^* ekvivalentní s T'.
c) Jasně platí oba axiomy T^* v $\mathcal{A}$.
d) Zobrazení $h(a) = a/2$ je izomorfizmus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. ($h(F^A(a)) = h(a+1) = a/2 + 1/2 = h(a) + 1/2 = G^B(h(a))$.) Tedy $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

B) Buď $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}, <^C, F^C \rangle$, kde $<^C$ je obvyklé ostré uspořádání $\mathbb{R}$ a F^C je absolutní hodnota.
Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

a) $\mathcal{C} \models T^*$.
b) $T^* \vdash x < y \rightarrow F(x) < F(y)$.

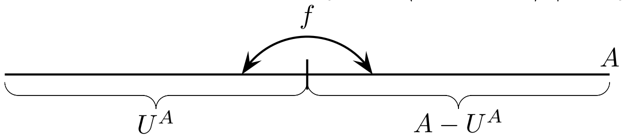
Odpověď.

a) N
b) N

Zdůvodnění.

a) $\mathcal{C} \not\models x < F(x)[0]$.
b) Buď $\mathcal{D} = \langle \mathbb{R}, <^D, F^D \rangle$, kde $<^D$ je obvyklé ostré uspořádání $\mathbb{R}$ a $F^D(a) = |a| + 1$. Pak $\mathcal{D} \models T^*$, avšak F^D není rostoucí.

ÚLOHA 3 [PL] Buď $L = \langle U, P\rangle$ jazyk s rovností, přičemž U je unární a P binární predikátový symbol. Nechť T je L-teorie s axiomy vyjadřujícími „P je prosté zobrazení U na $\neg U$“, tj. pro $\langle A, U^A, P^A\rangle \models T$ je $f = \{\langle a, b\rangle;\ P^A(a, b)\}$ bijekce U^A na $A - U^A$ – viz obr.



A) Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

a) $\mathrm{I}(n, T) = 1$ pro každé $0 < n \in \mathbb{N}$ a $\mathrm{I}(\omega, T) = 1$.

b) T je kompletní.

c) T je rozhodnutelná.

d) Jednoduchá extenze T^* teorie T o schema axiomů „existuje nekonečně prvků“ je modelově kompletní.

Odpověď.

a) N
b) N
c) A
d) A

Zdůvodnění.

a) $\mathrm{I}(n, T)$ je 0 resp. 1 pro n liché resp. jinak. Pro dva stejně velké (nejvýše spočetné) modely $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ teorie T se sestrojí jejich automorfizmus jako jednoznačná extenze jakékoli bijekce množiny U^A na U^B.

b) T není kompletní, protože má konečné i nekonečné modely.

c) T má rekurzivní kompletaci. Je totiž právě spočetně neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí teorie T. Jsou to právě extenze o axiom „existuje právě $2n$ prvků“ s $0 < n \in \mathbb{N}$, a ještě extenze o schema „existuje nekonečně prvků“; jasně je lze prezentovat jako rekurzivní kompletaci.

d) Zřejmě lze každé neprázdné konečné parciální vnoření mezi dvěma modely teorie T^* bezprostředně prodloužit. Tedy T^* je f-homogenní, tudíž má T^* eliminaci kvantifikátorů a tedy je modelově kompletní.

B) Buď $\mathcal{A} = \langle A, U^A, P^A\rangle \models T$ s A nekonečným a $X \subseteq U^A$ buď konečná množina. Popište množinu W právě všech $b \in A - U^A$ takových, že $\{b\}$ je definovatelné v $\mathcal{A}$ z parametrů X?

Odpověď.

$W = \{b;\ \langle a, b\rangle \in P^A,\ a \in X\}$.

Zdůvodnění.

Prvek $b \in W$ je definovaný v $\mathcal{A}$ formulí $P(y, x)$ s parametrickou proměnnou y a z parametru a. Když $b \in (A - U^A) - W$, existuje jasně automorfizmus h struktury $\mathcal{A}$ identický na X a takový, že $b \neq h(b) \in (A - U^A) - W$. Tudíž $\{b\}$ není definovatelné v $\mathcal{A}$ z X.

Jiné řešení. $\mathcal{A}$ je model jednoduché extenze T^* teorie T o schema „existuje nekonečně prvků“, která má eliminaci kvantifikátorů. Tudíž uvažované jednoprvkové množiny jsou definované jen atomickými formulemi tvaru $x = y$, $P(x, y)$, $P(y, x)$ s parametrickou proměnnou y a tedy jsou jasně právě tvaru $\{b\}$ pro nějaké $b \in W$.