

Lineární algebra II z přednášky Milana Hladíka 2009/2010

Marek Fišer

31. května 2010

Obsah

1	Permutace	3
	Def. (permutace)	3
	Def. (znaménko permutace)	3
2	Determinanty	3
	Def. (determinant)	3
	Věta (determinant transpozice)	3
	Věta (řádková linearita det.)	3
	Věta (determinant a elem. úpravy)	3
	Lemma (determinant a el. řádkové úpravy)	4
	Věta (součin determinantů)	4
	Věta (determinant a regularita)	4
	Věta (Laplaceův rozvoj dle i -tého řádku)	4
	Věta (Cramerovo pravidlo)	4
	Def. (adjungovaná matice)	4
	Věta (adjungovaná matice a determinant)	4
	Věta (geometrický význam determinantu)	4
3	Polynomy	4
	Def. (polynom)	4
	Věta (Malá Fermatova)	4
	Def. (kořen polynomu)	4
	Věta (základní věta algebry) [BD]	4
	Prokládání bodů polynomem (Vandermondova matice)	5
	Věta (Lagrange)	5
4	Vlastní čísla	5
	Def. (vl. čísla)	5
	Věta (charakteristika vl. čísel)	5
	Def. (char. polynom)	5
	Def. (spektrum)	5
	Def. (spektrální poloměr)	5
	Věta (vl. čísla trojúhelníkové matice)	5

Věta (součin a součet vl. čísel)	5
Věta (vl. čísla reálné matice)	5
Věta (regularita a vl. čísla matice)	6
Def. (podobnost matic)	6
Def. (diagonalizovatelnost)	6
Věta (podobnost a vl. čísla)	6
Věta (úplná charakterizace diagonalizovatelnosti)	6
Věta (vl. vektory pro různá vl. čísla)	6
Def. (hermitovská transpozice)	6
Def. (hermitovská matice)	6
Def. (unitární matice)	6
Věta (vl. čísla a sym. matice)	6
Věta (spektrální rozklad sym. matice)	6
Def. (Jordanova buňka)	6
Def. (Jordanova normální forma)	6
Věta (o Jordanově normální formě) [BD]	7
Věta (Oldenburger) [BD]	7
Věta (Cayley-Hamilton)	7
Věta (nezáporné matice a dominant. vl. č.) [BD]	7
Věta (Rayleigh quotient)	7
Mocninná metoda zjišťování vl. čísel	7
Věta (matice společnice)	7
Věta (vynulování vl. čísla)	8
Tvrzení (vl. čísla a základní operace s maticí)	8
Věta (Gerschgorinovy disky)	8
5 Pozitivně definitní matice	8
Def. (pozitivní (semi)definitnost)	8
Věta (operace s poz. def. maticemi)	8
Věta (charakterizace poz. def.)	8
Věta (rekurentní vzorec na poz. def.)	8
Věta (Choleského rozklad)	9
Věta (poz. def. a skalární součin)	9
Věta (odmocnina z matice)	9
Věta (Sylvestrova podmínka)	9
6 Kvadratické formy	9
Def. (bilineární forma)	9
Def. (kvadratická forma)	9
Věta (maticová reprezentace forem)	9
Věta (změna báze a vliv na matici formy)	9
Věta (Sylvestrův zákon setrvačnosti)	9
Def. (Householderova matice)	9
Tvrzení (vlastnosti Householderovy matice)	9
Věta (použití Householderovy matice)	9
7 QR rozklad	10
Věta (QR rozklad)	10

Věta (jednoznačnost QR rozkladu)	10
QR a ortogonalizace	10
8 SVD rozklad	10
Věta (SVD rozklad) [BD]	10
SVD a numerický rank	10
SVD a pseudo-inverze (More-Penrose)	10

1 Permutace

Def. (permutace) Permutace je bijekce z $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Def. S_n je množina všech permutací na $\{1, \dots, n\}$, $|S_n| = n!$.

Def. Identita $id(i) = i$.

Def. Inverze $p^{-1}(i) = j \iff p(j) = i$.

Def. Transpozice je permutace prohazující i -tý prvek s j -tým ($i \neq j$).

Def. (znaménko permutace) Znaménko permutace $sgn(p) = (-1)^m$ kde m je počet transpozic. Dále platí $sgn(p \circ q) = sgn(p) \cdot sgn(q)$ a $sgn(p) = sgn(p^{-1})$.

2 Determinanty

Def. (determinant) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak determinant

$$\det(A) = |A| = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,p(n)} = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)}.$$

Věta (determinant transpozice) $\det(A) = \det(A^T)$.

Věta (řádková linearita det.) Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Pak $\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i,*}))$.

Věta (determinant a elem. úpravy) A' vznikne z A elementární úpravou:

- (i) vynásobením i -tého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{R}$: $\det(A') = \alpha \cdot \det(A)$
- (ii) prohozením i -tého a j -tého řádku ($i \neq j$): $\det(A') = -\det(A)$
- (iii) přičtením α -násobku i -tého řádku k j -tému: $\det(A') = \det(A)$

Důsl. $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

Důsl. Determinant lze počítat Gaussovou eliminací.

Lemma (determinant a el. řádkové úpravy) Bud' E matice reprezentující nějakou el. řádkovou úpravu. Pak $\det(E \cdot B) = \det(E) \cdot \det(B)$.

Věta (součin determinantů) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak $\det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$.

Věta (determinant a regularita) Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak A je regulární $\iff \det(A) \neq 0$.

Věta (Laplaceův rozvoj dle i -tého řádku) Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Pak $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det(A^{i,j})$ ($A^{i,j}$ je matice, která vznikne z matice A po vyškrtnutí i -tého řádku a j -tého sloupce).

Věta (Cramerovo pravidlo) Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $b \in \mathbb{R}^n$. Pak $Ax = b$ má řešení se složkami $x_i = \frac{\det(A + (b - A_{*,i})e_i^T)}{\det(A)}$.

Def. (adjungovaná matice) Adjungovaná matice k A je $\text{adj}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{j,i})$.

Věta (adjungovaná matice a determinant) $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$

Věta (geometrický význam determinantu) Pro vektory $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ sestavíme matici $A = (x_1, \dots, x_n)$. Poté platí, že objem rovnoběžníku určeného x_1, \dots, x_n je $\det(A)$.

Důsl. Je-li lin. zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $A = {}_Y[f]_Y$ je matice tohoto zobrazení vůči bázi Y , potom se objem těles mění $\text{vol}(f(v)) = |\det(A)| \cdot \text{vol}(v)$.

3 Polynomy

Def. (polynom) Polynom (neboli též mnohočlen) stupně n v proměnné x nad tělesem \mathbb{K} rozumíme výraz:

$$\mathcal{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$. Značíme $p \in \mathbb{K}(x)$.

Pozorování (identická nula) Pro $\mathcal{P} \in \mathbb{K}(x)$ platí: $\forall x \in \mathbb{K} : \mathcal{P}(x) = 0 \iff a_0, \dots, a_n = 0$. Neboli když vyhodnotím polynom stupně n v $n+1$ bodech a vždy vyjde 0, jde o identickou nulu.

Věta (Malá Fermatova) Pro každé $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$ platí, že $a^{p-1} = 1$.

Důsl. $\forall q \in \mathbb{Z}_p(x) \exists r \in \mathbb{Z}_p(x)$ stupně $r \leq p-1$ takový, že $\forall x \in \mathbb{Z}_p$: $r(x) = q(x)$ a r je zbytek po dělení q po dělení $(x^p - x)$. Neboli libovolný polynom nad \mathbb{Z}_p lze zredukovat až na polynom stupně p .

Def. (kořen polynomu) Kořen polynomu $\mathcal{P} \in \mathbb{K}(x)$ je takové $x \in \mathbb{K}$, že $\mathcal{P}(x) = 0$.

Věta (základní věta algebry) [BD] Každý mnohočlen stupně alespoň 1 nad \mathbb{C} má alespoň 1 kořen.

Důsl. Každý takový mnohočlen lze rozložit na součin monomů.

Prokládání bodů polynomem (Vandermondova matice)

$$\mathcal{P}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

vede na:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{n-1}x_1^{n-1} + \dots + a_1x_1 + a_0 \\ y_2 &= a_{n-1}x_2^{n-1} + \dots + a_1x_2 + a_0 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n-1}x_n^{n-1} + \dots + a_1x_n + a_0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad V = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(V) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

Neboli determinant je nulový pokud jsou nějaké 2 body stejné.

Věta (Lagrange) $\mathcal{P}(x) = \sum_{k=1}^n y_k \mathcal{P}_k(x)$, kde $\mathcal{P}_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}$.

4 Vlastní čísla

Def. (vl. čísla) Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n} (\mathbb{C}^{n \times n})$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo A a $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastní vektor A pokud $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$.

Věta (charakteristika vl. čísel) λ je vl. číslo matice $A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Def. (char. polynom) Charakteristický polynom matice A je $\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \prod_{i=1}^n (A - \lambda I)_{i,p(i)} = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$ a tedy $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ jsou vlastní čísla (kořeny char. polynomu).

Def. (spektrum) Spektrum je množina vlastních čísel.

Def. (spektrální poloměr) $\rho(A) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_i|$.

Pozorování $\rho(A) \in \mathbb{R}$ a $\rho(A) \geq 0$

Věta (vl. čísla trojúhelníkové matice) A je trojúhelníková matice. Potom její vl. čísla jsou hodnoty na diagonále: $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$.

Věta (součin a součet vl. čísel) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vl. čísla A . Pak:

- (i) $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$
- (ii) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n}$ (stopa matice).

Věta (vl. čísla reálné matice) Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ vl. číslo. Potom $\bar{\lambda}$ je také vl. číslo.

Věta (regularita a vl. čísla matice) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární $\iff 0$ není vl. číslem A .

Def. (podobnost matic) Matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou podobné, pokud \exists reg. matice S tak, že $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$.

Def. (diagonalizovatelnost) Matice A je diagonalizovatelná, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

Věta (podobnost a vl. čísla) Podobné matice mají stejná vl. čísla.

Věta (úplná charakterizace diagonalizovatelnosti) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná \iff má n lin. nezávislých vl. vektorů.

Věta (vl. vektory pro různá vl. čísla) Nechť A má vl. čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ navzájem různá. Pak odpovídající vl. vektory x_1, \dots, x_n jsou lin. nezávislé.

Def. (hermitovská transpozice) $A_{i,j}^* = \overline{a_{j,i}}$

Def. (hermitovská matice) $A = A^*$

Def. (unitární matice) Q je unitární (pro reálné matice ortogonální) $\iff Q \cdot Q^* = I$.

Věta (vl. čísla a sym. matice) Buď A reálná symetrická (komplexní hermitovská) matice. Pak A má reálná vl. čísla.

Věta (spektrální rozklad sym. matice) Buď A reálná symetrická matice. Pak \exists ortogonální Q , diagonální Λ : $A = Q \cdot \Lambda \cdot Q^T$.

Důsl. A sym. s vl. čísla $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Pak $\lambda_1 = \max_{\|x\|=1, x \in \mathbb{R}^n} x^T \cdot A \cdot x$ a $\lambda_n = \min_{\|x\|=1, x \in \mathbb{R}^n} x^T \cdot A \cdot x$.

Def. (Jordanova buňka) $J_k(\lambda) \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Def. (Jordanova normální forma) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Věta (o Jordanově normální formě) [BD] Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je podobná matici mající Jordanovu normální formu. Navíc Jordanova forma je až na pořadí buněk jednoznačná.

Věta (Oldenburger) [BD] Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\rho(A) < 1 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

Důsl. $\rho(A) < 1 \implies (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$ (analogie s $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots$ pro $q < 1$)

Věta (Cayley-Hamilton) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{P}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$. Pak $(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$. Neboli matice je kořenem svého charakteristického polynomu.

Důsl. A^{-1} je lin. kombinace $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

Důsl. A^k je lin. kombinace $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$, $k \geq n$.

Věta (nezáporné matice a dominant. vl. č.) [BD] $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- (i) $A_{i,j} \geq 0$, pak největší vl. číslo v abs. hodnotě (dominantní) je reálné, nezáporné a odpovídá mu nezáporný vl. vektor.
- (ii) $A_{i,j} > 0$, pak největší vl. číslo v abs. hodnotě je reálné, kladné a je jediné. Jemu odpovídající vl. vektor je kladný a je to jediný vl. vektor s touto vlastností.

Věta (Rayleigh quotient) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, x vl. vektor. Pak $\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}$ je vl. číslo odpovídající x .

Mocninná metoda zjišťování vl. čísel

algoritmus

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

while požadujeme vyšší přesnost **do**

$x_{i+1} := A \cdot x_i$

$x_{i+1} := \frac{x_{i+1}}{\|x_{i+1}\|}$

$i := i + 1$

end while

tvrzení $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vl. čísla a $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, vl. vektory v_1, \dots, v_n lin. nezávislé (matice je diagonalizovatelná) a x_0 má nenulovou složku souřadnice vůči v_1 . Pak x_i konverguje k v_1 a $\frac{x_i^T A x_i}{x_i^T x_i}$ konverguje k λ_1 .

Věta (matice společnice) $\mathcal{P}(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

$$C_{(\mathcal{P})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Vl. čísla $C_{(\mathcal{P})}$ jsou kořeny $\mathcal{P}(x)$.

Věta (vynulování vl. čísla) A symetrická, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vl. čísla a v_1, \dots, v_n odpovídající vl. vektory, $\forall i \neq j: v_i \perp v_j, \|v_i\| = 1$. $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ má vl. čísla: $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vl. vektory v_1, \dots, v_n .

Tvrzení (vl. čísla a základní operace s maticí) Matice A , vl. č. λ , vl. vektor v .

operace	vl. číslo	vl. vektor
$\alpha \cdot A$	$\alpha \lambda$	v
A^2	λ^2	v
A^{-1}	λ^{-1}	v
A^T	λ	neumíme určit

Věta (Gerschgorinovy disky) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, λ vl. č. Pak λ leží v kruhu o středu $a_{i,i}$ a poloměru $\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$.

Důsl. $|\lambda| \leq \max_{k=\{1, \dots, n\}} \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}|$

5 Pozitivně definitní matice

Def. (pozitivní (semi)definitnost) A sym. matice je

- (i) pozitivně definitní pokud $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0$,
- (ii) pozitivně semidefinitní pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \geq 0$.

Věta (operace s poz. def. maticemi)

- (i) A, B poz. def $\implies A + B$ také
- (ii) $\alpha \geq 0, A$ poz. def. $\implies \alpha \cdot A$ je poz. def
- (iii) A je poz. def $\implies A^{-1}$ je také

Věta (charakterizace poz. def.) Následující tvrzení jsou pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sym. matici ekvivalentní:

- (i) A je poz. def
- (ii) A má kladná vl. čísla
- (iii) $\exists U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s lin. nezávislými sloupce, tak $A = U^T U$

Věta (rekurentní vzorec na poz. def.) A sym. řádu n a $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \beta \end{pmatrix}$. A je poz. def. $\iff \alpha > 0$ & $\beta - \frac{1}{\alpha} \cdot a \cdot a^T$ je poz def.

Věta (Choleského rozklad) Sym. matice A řádu n je poz. def. právě tehdy když se dá rozložit na $A = LL^T$ kde L je čtvercová dolní trojúhelníková matice s kladnou diagonálou. Navíc L je určena jednoznačně.

Věta (poz. def. a skalární součin) $\langle x, y \rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n \iff \langle x, y \rangle = x^T Ay$ pro urč. poz. def matici A .

Věta (odmocnina z matice) Pro každou poz. semidef. matici $A \exists$ poz. semidef $B: B^2 = A$.

Věta (Sylvestrova podmínka) A sym. řádu n je poz. def. $\iff \det(A_i) > 0 \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ kde A_i vznikne z A vyškrtáním posledních i řádků a sloupců.

6 Kvadratické formy

Def. (bilineární forma) V vektorový prostor nad tělesem T . Bilineární forma je zobrazení $b: V^2 \rightarrow T$, $b(\alpha u + \beta v, z) = \alpha b(u, z) + \beta b(v, z)$ a $b(z, \alpha u + \beta v) = \alpha b(z, u) + \beta b(z, v) \forall \alpha, \beta \in T, \forall u, v, z \in V$.

Def. (kvadratická forma) $f(u) = b(u, u)$

Věta (maticová reprezentace forem) $b: V^2 \rightarrow T$ bilin. forma, w_1, \dots, w_n báze B prostoru V . Def. $A \in T^{n \times n}: A_{i,j} = b(w_i, w_j)$. Pak $b(u, v) = x^T Ay$ kde $x = [u]_B, y = [v]_B$ a $f(u) = x^T Ax$.

Věta (změna báze a vliv na matici formy) A matice kvadr. formy f vzhledem k bázi B . Buď S matice přechodu od B' k B (tzn. $S = {}_{B'}[id]_B$). Pak matice f vzhledem k B' má tvar $S^T AS$.

Věta (Sylvestrův zákon setrvačnosti) t je kvadr. forma $V^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pak \exists báze vůči níž je matice formy diagonální. Diagonální matice má jednoznačný počet kladných/záporných prvků.

Def. (Householderova matice) Buď $x \neq 0$. Householderova matice je $H(x) = I - 2 \frac{x \cdot x^T}{x^T \cdot x}$

Tvrzení (vlastnosti Householderovy matice) Householderova matice je symetrická a ortogonální.

Věta (použití Householderovy matice) Mějme $x, y \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \|y\|$. Pak $y = H(y-x)x$.

Důsl. Buď $x \in \mathbb{R}^n$ a definujme

$$H = \begin{cases} H(x - \|x\|e_1) & \text{pokud } x - \|x\|e_1 \neq 0 \\ I & \text{jinak} \end{cases}.$$

Pak $H \cdot x = \|x\|e_1$.

7 QR rozklad

Věta (QR rozklad) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak \exists ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a horní trojúhelníková matice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a navíc má na diagonále nezáporná čísla tak, že $A = QR$ ($R_{i,j} = 0$ pro $i > j$).

Věta (jednoznačnost QR rozkladu) A je regulární \implies QR rozklad je jednoznačný a R má na diagonále kladné hodnoty.

QR a ortogonalizace A s lin. nezávislými sloupci. Chceme je ortogonalizovat.

8 SVD rozklad

Věta (SVD rozklad) [BD] $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak \exists ortogonální $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

tak, že $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r$. Pak $A = X \cdot \Sigma \cdot Y^T$.

Poznámka Singulární čísla $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ jsou určeny jednoznačně, X a Y jednoznačné nejsou.

SVD a numerický rank

$$A = X \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \cdot Y^T$$

$\text{rank}(A) = r$. Pro $\varepsilon > 0$ $\sigma_1, \dots, \sigma_s \geq \varepsilon$ a $\sigma_{s+1}, \dots, \sigma_r < \varepsilon$ je numerický rank rove s (ε vyjadřuje přesnost použité aritmetiky).

SVD a pseudo-inverze (More-Penrose)

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} = X \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \cdot Y^T$$

Pseudo-inverze

$$A^+ = X \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \sigma_r^{-1} & & \\ \vdots & & & 0 & \\ 0 & \dots & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot Y^T.$$

Vlastnosti:

- (i) A reg. $\implies A^+ = A^{-1}$,
- (ii) $(A^+)^+ = A$,
- (iii) $AA^+A = A$,
- (iv) $(A^+A)^+ = A^+A$,
- (v) $(AA^+)^+ = AA^+$.

Ale

- (i) $A^+A \neq AA^+$,
- (ii) $(AB)^+ \neq A^+B^+$.