Datum: Jméno:

Písemná část zkoušky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.
Odpověď Ano/Ne nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednodušším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Jde-li o výběr ze seznamu a), b), c), ..., uveďte tam všechny správné možnosti (a tedy nekroužkujte). Je-li požadováno **zdůvodnění**, uveďte je do příslušného rámečku; v případě výběru ze seznamu a), b), c), ... zdůvodněte též nevybrání položek.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a všeobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalšího může být principiálně správný, avšak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.
Úloha je rozřešena správně, jsou-li všechny její části zodpovězeny správně včetně požadovaných zdůvodnění; jinak je rozřešena nesprávně. Písemná zkouška je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřešeny správně 3 resp. 2 úlohy; jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřešené úlohy může pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkoušky.

Konvence a značení.
Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, že jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „x, y jsou proměnné“ značí, že x, y jsou různé proměnné.)

V úlohách z predikátové logiky jsou všechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL]

Buď $\mathbb{P}$ množina všech prvovýroků s $|\mathbb{P}| = l \in \mathbb{N}$.

A) Nechť T je $\mathbb{P}$-teorie a φ je $\mathbb{P}$-výrok. Platí $T \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(\varphi) = \emptyset$?

Odpověď: Ano

Uveďte zdůvodnění.

$T \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(\neg\varphi) \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \cap -\mathsf{M}(\neg\varphi) = \emptyset \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(\varphi) = \emptyset$. Užili jsme $-\mathsf{M}(\neg\varphi) = \mathsf{M}(\varphi)$.

B) Nechť T a S jsou $\mathbb{P}$-teorie. Platí S je extenze $T \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(S)$?

Odpověď: Ne

Uveďte zdůvodnění.

S je extenze $T \Leftrightarrow \mathrm{Thm}(S) \supseteq \mathrm{Thm}(T) \Leftrightarrow \mathsf{M}(\mathrm{Thm}(S)) \subseteq \mathsf{M}(\mathrm{Thm}(T)) \Leftrightarrow \mathsf{M}(S) \subseteq \mathsf{M}(T)$, neboť $\mathsf{M}(\mathrm{Thm}(S)) = \mathsf{M}(S)$.

ÚLOHA 2 [PL]

A) Buď L jazyk $\langle + \rangle$, kde $+$ je binární funkční symbol. Nechť T je L-teorie s axiomatikou

$$\{x + y = y + x\} \ \cup \ \text{„existuje nekonečně prvků“}$$

a φ je formule

$$(\forall z)(\exists x, y)(z = x + y).$$

Která z následujících tvrzení platí?

a) Pro $k \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{N} - \{k\}$ univerzum podstruktury struktury $\langle \mathbb{N}, + \rangle$, právě když je $k < 2$. ($+$ je zde obvyklé sčítání přirozených čísel.)

b) φ je dokazatelná sentence teorie T.

c) T je modelově kompletní.

Odpověď: a)

Uveďte zdůvodnění.

a) Máme zjistit, právě kdy je $\mathbb{N} - \{k\}$ uzavřeno na sčítání $+$. To jasně platí, právě když je $k < 2$.

b) φ je nezávislá sentence teorie T, neboť $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle \models T \cup \{\neg\varphi\}$ a $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models T \cup \{\varphi\}$.

c) $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle \subseteq \langle \mathbb{N}, + \rangle$ jsou modely T, ale není $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle \prec \langle \mathbb{N}, + \rangle$, neboť $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{N}, + \rangle$. To plyne z důkazu b) nebo z toho, že sentence $(\exists x)(x + x = x)$ platí v $\langle \mathbb{N}, + \rangle$, avšak neplatí v $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle$.

B) Je množina $\{0\} \times \mathbb{N}$ definovatelná bez parametrů v $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ nějakou otevřenou formulí?

Odpověď: Ano

Uveďte zdůvodnění.

Definující formulí je $\varphi(x, y)$ tvaru $x + x = x \ \& \ y = y$.

ÚLOHA 3 [PL]

Buď T teorie nekonečných vektorových prostorů nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel.
Pro $0 < n \in \mathbb{N}$ značí $\underline{\mathbb{R}}^n$ vektorový prostor n-tic reálných čísel; má dimenzi n a je modelem T.

A) Která z následujících tvrzení platí?

a) $\underline{\mathbb{R}}^n \equiv \underline{\mathbb{R}}^m$ (elementární ekvivalence) pro $0 < n < m \in \mathbb{N}$.

b) $\underline{\mathbb{R}}^1$ je algebraický prvomodel teorie T.

c) Teorie T má model libovolné nekonečné velikosti.

d) Buď $0 < n \in \mathbb{N}$. Pak existuje $L(T)$-sentence φ tak, že pro každé $\mathcal{A} \models T$ platí:
$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}$ má dimenzi n.

Odpověď: a), b)

Uveďte zdůvodnění.

a) Struktury jsou modely teorie T, která je kompletní; tudíž jsou elementárně ekvivalentní.

b) $\underline{\mathbb{R}}^1$ je algebraický prvomodel T. Buď totiž $\mathcal{A} \models T$, $e' \in A$ nenulové, $e \in \mathbb{R}^1$ nenulové. Pak $e \mapsto e'$ se jednoznačně rozšíří pomocí lineárních kombinací na vnoření $\mathbb{R}^1$ do $\mathcal{A}$ (na jednodimenzionální podprostor prostoru $\mathcal{A}$).

c) T nemá spočetný model, neboť každý model T je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a má tedy alespoň $|\mathbb{R}|$ prvků.

d) Kdyby sentence φ existovala, byla by díky kompletnosti T dokazatelná v T a tedy by platila v každém $\underline{\mathbb{R}}^m$ s $0 < m \in \mathbb{N}$, což není možné.

B) Určete všechny podmnožiny množiny $\mathbb{R}^5$, definované bez parametrů ve struktuře $\underline{\mathbb{R}}^5$.

Odpověď: $\emptyset$, $\mathbb{R}^5$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^5 - \{0\}$

Uveďte zdůvodnění.

Je $\underline{\mathbb{R}}^5 \models T$ a T má eliminaci kvantifikátorů. Stačí najít $\varphi(x)(\underline{\mathbb{R}}^5)$, kde $\varphi(x)$ jsou atomické formule; hledané množiny se získají z těchto pomocí $\cup$ a komplementu do $\mathbb{R}^5$. Atomická formule $\varphi(x)$ je až na ekvivalenci v T některá z formulí $rx = 0$ s $r \in \mathbb{R}$, $0 = 0$, $x = x$; ty definují množiny $\mathbb{R}^5$, $\{0\}$, $\emptyset$. Hledané množiny jsou tedy právě $\emptyset$, $\mathbb{R}^5$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^5 - \{0\}$.