Datum: Jméno:

Písemná část zkoušky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď Ano/Ne nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednodušším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Jde-li o výběr ze seznamu a), b), c), ..., uveďte tam všechny správné možnosti (a tedy nekroužkujte). Je-li požadováno **zdůvodnění**, uveďte je do příslušného rámečku; v případě výběru ze seznamu a), b), c), ... zdůvodněte též nevybrání položek.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a všeobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti" bez dalšího může být principiálně správný, avšak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřešena správně, jsou-li všechny její části zodpovězeny správně včetně požadovaných zdůvodnění; jinak je rozřešena nesprávně. Písemná zkouška je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřešeny správně 3 resp. 2 úlohy; jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřešené úlohy může pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkoušky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, že jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „x, y jsou proměnné" značí, že x, y jsou různé proměnné.)

V úlohách z predikátové logiky jsou všechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL]

Množina prvovýroků $\mathbb{P}$ buď l-prvková s $l \in \mathbb{N}$, buď $p \in \mathbb{P}$.

A) Právě kolik je neekvivalentních $\mathbb{P}$-teorií T takových, že $T \vdash p$?

Odpověď: $2^{2^{l-1}}$

Uveďte zdůvodnění.

$T \vdash p \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(p) \approx 2^{l-1}$.

B) Právě kolik je neekvivalentních $\mathbb{P}$-teorií T takových, že $T \cup \{p\}$ je sporná?

Odpověď: $2^{2^{l-1}}$

Uveďte zdůvodnění.

$T \cup \{p\}$ je sporná $\Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(p) = \emptyset \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq {}^{\mathbb{P}}2 - \mathsf{M}(p) \approx 2^{l-1}$.

ÚLOHA 2 [PL]

Buď L jazyk $\langle R\rangle$, kde R je unárním relační symbol a T buď L-teorie s axiomatikou $\{R(x)\}$.

A) Která z následujících tvrzení platí?
a) $T \vdash (\exists x, y)(R(x)\ \&\ R(y)\ \&\ x \neq y)$.
b) T je modelově kompletní.

Odpověď:

Uveďte zdůvodnění.

a) Např. $\langle 1, 1\rangle$ je model T, ve kterém neplatí uvažovaná formule a není tedy dokazatelná v T.
b) Je $\langle 2, 2\rangle \subseteq \langle \mathbb{N}, \mathbb{N}\rangle$ a uvedené struktury jsou modely T, přičemž prvá není elementární podstruktura druhé.

B) Buď T_0 extenze T o axiom $x = y$, T_1 extenze T o axiom $(\forall x, y)(x = y)$. Která z následujících tvrzení platí?
a) T_0 je ekvivalentní s T_1.
b) $T \vdash x = y \leftrightarrow (\forall x, y)(x = y)$.

Odpověď: a)

Uveďte zdůvodnění.

a) T_0 dokazuje $(\forall x, y)(x = y)$ užitím generalizace, T_1 dokazuje $x = y$ užitím axiomu substituce a modus ponens.
b) $\langle A, A\rangle \models T$. Je-li A alespoň dvouprvková, tak $\langle A, A\rangle \not\models x = y \to (\forall x, y)(x = y)[a, a]$ pro $a \in A$.

C) Buď $\mathcal{A} \models T$, φ buď $(\exists y)(R(y)\ \&\ x \neq y)$. Určete množinu $\varphi(x)(\mathcal{A})$, tj. množinu $\{a \in A;\ \mathcal{A} \models \varphi[a]\}$.

Odpověď: $\emptyset$, když $|A| = 1$, A jinak.

Uveďte zdůvodnění.

Je $R^A = A$ a jde o množinu všech prvků z A různých od alespoň jednoho prvku z R^A; tedy uvedené platí. (Jinak: jde o $\mathrm{dom}(A \times A - \mathrm{Id}_A)$.)

ÚLOHA 3 [PL]

A) Které z následujících teorií jsou kompletní?

a) Teorie nekonečných vektorových prostorů nad tělesem F.

b) Extenze teorie DeLO hustého lineárního uspořádání bez konců o axiom

$$(\exists x)U(x),$$

kde U je unární relační symbol přidaný k jazyku $\langle\leq\rangle$.

c) Extenze čisté rovnosti PE o schema „existuje nekonečně prvků“.

d) Robinsonova aritmetika rozšířená o axiom

„$\leq$ je lineární uspořádání“ & „existuje libovolně velké prvočíslo“.

Odpověď: a), c)

Uveďte zdůvodnění.

a) Uvažovaná teorie T je v jazyce kardinality $\omega + |F|$ a λ-kategorická pro každý nespočetný kardinál $\lambda > \omega + |F|$. Protože nemá konečné modely, plyne odtud, že T je kompletní. λ-kategoričnost plyne z toho, že vektorové prostory nad F a velikosti $\lambda > |F|$ mají báze stejné velikosti.

b) $(\exists x)\neg U(x)$ je nezávislá formule uvažované teorie.

c) Uvažovaná teorie je ve spočetném jazyce, ω-kategorická a nemá konečné modely, tedy je kompletní.

d) Jde o teorii bezespornou, neboť standardní model $\mathfrak{N}$ je jejím modelem. Tvrzení plyne z věty o nerozhodnutelnosti: bezesporná extenze Robinsonovy aritmetiky Q je nerozhodnutelná a je-li rekurzivně axiomatizovaná, je nekompletní.

B) Buď L jazyk $\langle F\rangle$, kde F je unární funkční symbol, a T buď L-teorie s axiomy

$$x \neq y \to F(x) \neq F(y), \quad (\forall y)(\exists x)(F(x) = y).$$

Je T ekvivalentní otevřené teorii?

Odpověď: Ne

Uveďte zdůvodnění.

Buď $A = [0, 3]$ interval racionálních čísel a F^A prosté zobrazení A na A takové, že zobrazuje $[0, 2]$ na $[0, 1]$. Pak $\langle [0, 2], F^A \restriction [0, 2]\rangle \subseteq \langle A, F^A\rangle \models T$ a $\langle [0, 2], F^A \restriction [0, 2]\rangle \not\models T$. Protože podstruktura modelu otevřené teorie S je modelem S, není T ekvivalentní otevřené teorii.