

① Definice vl. čísla

matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^n$ $x \neq 0$

Pokud platí $A \cdot x = \lambda \cdot x$, potom λ ... vlastní číslo matice A

x ... vl. vektor příslušný k danému číslu

$x \neq 0$... podmínka nutná, jinak by každé číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ bylo vlastní

vl. vektor x není určen jednoznačně, i $\alpha \cdot x$ je vl. vektor.
 $\alpha \neq 0$

číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vl. číslem matice $A \Leftrightarrow$

$\det(A - \lambda I) = 0$, tj. právě když $A - \lambda I$ je singulární
... jednotková matice

výpočet vl. čísel:

nejde počítat Gaussovou elimin. metodou

(elementární řádkové úpravy nezachovávají vl. čísla)

malé matice - jednoduché

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = 0$$

velké matice - obvykle jen iterativní metody, nejde moc algebraicky

využití:

hledání stránek (např. stránky na webu)

hledání minimálního řešení grafu (aby spolu 2 procesory komunikovaly co nejméně apod.)

pozn.

- determinans číselové matice je roven součinu jejích vl. čísel
- vl. čísla dolní / horní Δ matice jsou právě všechny její diagonální prvky
- podobné matice mají stejná vlastní čísla, podobnost je relace ekvivalence
- $A \cdot B$ a $B \cdot A$ mají stejná vlastní čísla
- Hermitovská matice má všechna vl. čísla reálná

② násobnost vl. čísel, počet vl. čísel

a definice determinantu plyne:

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

tg. je to polynom n -tého stupně v λ (= charakteristický polynom matice A),
vlastní čísla jsou jeho kořeny

→ podle základní věty algebry má tento polynom v \mathbb{C} právě n kořenů,
počítáme-li každý v jeho násobnosti

tg. každá matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má alespoň 1 a maximálně n různých vl. čísel

vektory v_1, \dots, v_k odpovídající různým vl. číslům jsou lin. nezávislé → viz ③

vl. čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ navzájem různá \Rightarrow vl. vektory tvoří bázi n -dimensionálního prostoru

díky základ. věty algebry:

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_n \neq 0$$

$$n > 0$$



$$(x - x_0) \cdot P_{n-1}(x) \quad \dots \text{polynom stupně } n-1$$

$$\deg = n$$

$$\deg = n-1$$

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + c$$

$$\text{pro } x = x_0: c = 0 \dots$$

$$P(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot Q'(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = a \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

algebraická násobnost vl. čísla = násobnost vl. čísla λ

geometrická nás. vl. čísla $\lambda = \underline{n}$ - hodnota $(A - \lambda \cdot I)$

\vdots n kořenů

$$\text{př. } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 1 \quad \dots \text{alg. nás.} = 2$$

$$\text{geom. nás.} = 1$$

3. Lineární nezávislost vlastních vektorů odpovídajících různým vl. číslům

- každá matice má 1 až n různých vl. čísel.
- vektory odpovídající různým vl. číslům jsou lin. nezávislé

BÚNO $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vl. čísla

důkaz: (indukcí podle k)

$k=1$, v_1 nenulový (podle definice) \rightarrow platí

předpokládám, že $k-1$ vektorů jsou lin. nezávislé

- přidám k -tý, pokud by byl lin. závislý, mohl ho zapsat jako lineární kombinaci

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$$

$$A \cdot v_k = A \cdot (\alpha_1 v_1 + \dots) \quad \dots \text{vynásobím zleva } A$$

$$A \cdot v_k = \alpha_1 A v_1 + \dots + \alpha_{k-1} A v_{k-1}$$

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} \quad \dots \text{podle } A \cdot x = \lambda \cdot x$$

\uparrow dosadím původní v_k , rovnice od sebe odečtu

$$0 = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1}$$

= nulový vektor se rovná lin. kombinaci v_1, \dots, v_{k-1}

... alespoň některé α musely být nenulové,
jinak bych nedostal v_k

BÚNO: $\alpha_i \neq 0$

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i$$

SPOR, vektory by byly lin. závislé

$\therefore v_k$ se nedá napsat pomocí ostatních vektorů

důsledek:

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ navzájem různá \Rightarrow vl. vektory tvoří bázi n -dimenzionálního prostoru

④ Realnost vlastních čísel Hermitovské matice

Hermitovská matice - zobecnění symetrických matic na komplexní případ

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \dots = \text{symetrická matice}$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \dots a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad (\text{po "překlopení" se jsou prvky komplexně sdružené}) \quad \forall i, j \in 1, \dots, n$$

Hermitovská matice má všechna vlastní čísla reálná.

důkaz:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad | \cdot \bar{x}^T \text{ zleva}$$

$$(\bar{x}^T A) \cdot x = \lambda \cdot \bar{x}^T x$$

$$A = (\bar{A})^T \dots \text{protože je Herm.}$$

$$= (\bar{x}^T \bar{A}^T) \cdot x = (\bar{A} \cdot \bar{x})^T \cdot x = \dots \text{podle vzorce pro součin transpozic}$$

$$= (\overline{Ax})^T \cdot x = (\overline{\lambda x})^T \cdot x = \dots \text{podle } Ax = \lambda \cdot x$$

$$= \bar{\lambda} (\bar{x}^T \cdot x)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
nemulové číslo (protože vl. vektor nemůže být nulový)

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

$$\underline{\text{tj. } \lambda \in \mathbb{R}}$$

⑤ Kolmost vlastních vektorů Hermitovské matice odpovídajících různým vl. číslům

A ... Herm. matice

$$A^T = A \quad A \cdot x = \lambda \cdot x \quad x \neq 0$$

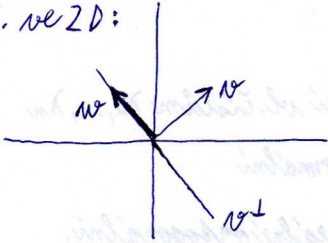
vezmeme si podprostor $v^\perp = \{w \mid \langle v, w \rangle = 0\}$

... všechny takové vektory w , které jsou na v kolmé

= ortogonální doplněk k lin. obalu vektoru v

lj. vektorový podprostor, dimenze o 1 menší

př. ve 2D:



$$\text{pokud } w \in v^\perp \Rightarrow A \cdot w \in v^\perp$$

... i když se vynásobí maticí, ten podprostor se zobrazí zase do sebe

lj. můžeme si vytvořit zase Herm. matici, dimenze o 1 menší, kde opět budou platit kolmosti (ortogonální doplněk)

\Rightarrow Herm. matice má systém vektorů, který je ortonormálním systémem (vektory jsou navzájem kolmé)

důkaz:

$$w \in v^\perp \Rightarrow A \cdot w \in v^\perp$$

$$0 = \langle v, w \rangle = \langle \lambda \cdot v, w \rangle = \langle A \cdot v, w \rangle = \langle v, A w \rangle$$

↑

$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w$$

dle asociativy násobení matic

$$\langle A v, w \rangle = (A v)^T \cdot w = (v^T \cdot A^T) \cdot w = v^T \cdot (A^T \cdot w) =$$

$$= v^T \cdot (\bar{A} w) = v^T \cdot \overline{A w} = \langle v, A w \rangle$$

hermitovskost

⑥ Podobnost Hermitovské matice diagonální matici a geometrická interpretace

Každá Herm. matice je podobná s diagonální maticí:

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad A = T^{-1} \cdot D \cdot T$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \dots \text{diagonální matice, na diagonále vl. čísla}$$

$$T = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \dots \text{sloupce jsou vl. vektory příslušející vl. číslům } \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

= přechod od standardní báze k ortonormální

... je-li $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak T lze volit reálné ortogonální,
jinak je obecně unitární $\in \mathbb{C}^{n \times n}$

odvození:

Když A byla Herm., $T^{-1}AT$ bude také.

$$(T^{-1}AT)^T = T^T \cdot A^T \cdot (T^{-1})^T = \overline{\overline{T^T} \cdot \overline{A} \cdot \overline{T}} = \overline{\overline{T^T} \cdot A \cdot T} = \overline{T^{-1}AT} \quad \dots T^{-1} = \overline{T}^T, (T^{-1})^T = \overline{T}$$

$$\text{tj. } T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A'} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \dots A' \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}, \text{ můžeme ji překloubit, tj. } A' \text{ je také Herm.}$$

Sakle můžeme pokračovat sakdrouho, až vypočítáme všechny dimenze $\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ \vdots & & \boxed{} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{T_n^{-1} \dots T_2^{-1} \cdot T_1^{-1} \cdot A \cdot T_1 \cdot T_2 \dots T_n}_{= D \dots \text{diagonální matice}}$$

$$= T^{-1}$$

$$= T$$

$$D = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$A = T^{-1} \cdot D \cdot T$$

geometrická interpretace:

$$A = T^{-1} \cdot D \cdot T$$

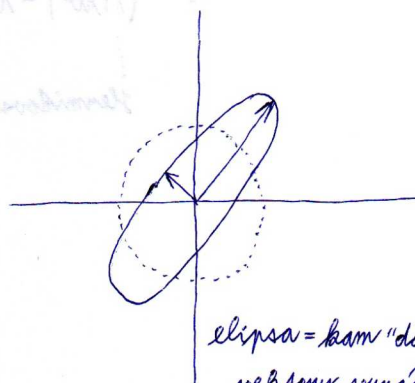
matice natočení a zpátky
(navzájem si jsou inverzní)

D ... matice škálování (roztažení)

na diagonále vl. čísla = o kolik v každém směru

vlastní vektory jsou na sebe kolmé (z vlastností Herm. matice)

jednotkové vektory ve směru os = ortonormální báze prostoru



elipsa = kam "došáknou"
vektory vynásobené
soubo maticí A

7) Jordanův normální tvar matice (bez důkazů)

$$A, J, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

- ne každou matici lze podobnostní transformací upravit na diagonální tvar

→ nejjednodušší tvar, kam lze pod. transf. převést každou matici = Jordanova normální forma

Matice A je podobná matici J :

$$A = T \cdot J \cdot T^{-1}$$

T ... regulární matice, odpovídá přechodu k jiné bázi

(matice jsou podobné, jestliže popisují totéž lin. zobrazení vzhledem k různým 2 bázím)

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_m} \end{pmatrix}$$

J ... matice v Jordanově normálním tvaru

J_{k_1}, \dots, J_{k_m} = Jordanovy bloky

... horní trojúhelníkový tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \lambda_i & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

... na diagonále stejné vlastní číslo

... nad diagonálou jsou jedničky

... v různých 2 blocích můžou být stejná vl. čísla

Matice J je určena jednoznačně až na pořadí bloků,

na její diagonále jsou právě všechna vl. čísla matice A

Má-li $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ všechna vl. čísla reálná, potom J je reálná a i T lze volit reálnou

Velikosti a počty Jordanových bloků jsou jednoznačně určeny maticí A

Jordanova norm. forma je vysoce nestabilní, v numerických výpočtech se téměř nepoužívá.

(ale je to důležitý teoretický nástroj)

Báze regulární matice T se nedá uspořádat z vl. vektorů (jako se šlo u Herm. matic)

→ hledáme řetězec lin. nezávislých vektorů, zobrazují se do vl. vektoru,

je jich stejně jako dimenze

pokud x je vl. vektor:

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)y = x$$

\vdots

neexistuje jiné y ,

aby se zobrazilo do 0

→ vs. řetězec
 $A - \lambda I$

$$(0, \dots, 0) \leftarrow (1, 0, \dots, 0) \leftarrow \dots \leftarrow (0, \dots, 1)$$

= vlastní vektor

řetězec lin. nezávislých vektorů

⑧ Pozitivně (semi) definitní matice

- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně semidefiniční, pokud

$$x^T \cdot A \cdot x \geq 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{a pozitivně definitní, pokud}$$

$$x^T \cdot A \cdot x > 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0$$

obdobně pro $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

důkaz $x^T \cdot A \cdot \bar{x} \geq 0 \quad \left(x^T \right) \left(A \right) \left(\bar{x} \right) \geq 0$

$$(x^T B) \cdot (\bar{B}^T x) = (B^T x)^T \cdot \overline{(B^T x)} = \langle B^T x, B^T x \rangle \geq 0 \quad \square$$

- Hermiteova matice A je pozitivně semidefiniční \Leftrightarrow všechna vl. čísla ≥ 0

důkaz:

matici A můžeme diagonalizovat (spočítám vl. čísla),
pokud jsou všechna nezáporná, je poz. semidefiniční

$$A = T \cdot D \cdot T^{-1} \quad A, D \dots \text{podobné, tj. stejná vl. čísla}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D = E \cdot \bar{E}^T$$

$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

E je odmocnina z D , pokud D je Herm. + poz. definitní

$$D = E \cdot \bar{E}^T$$

$$D^T = (E \cdot \bar{E}^T)^T = \bar{E}^T \cdot E^T = \bar{E} \cdot E^T = \overline{(E \cdot \bar{E}^T)} = \bar{D}$$

dosadíme:

$$A = T \cdot E \cdot \bar{E}^T \cdot T^{-1} = (TE) (\bar{E}^T \cdot \bar{T}^T) = (TE) \cdot \overline{(TE)^T} \\ = \sqrt{A}$$

- Choleského rozklad pozitivně definitní matice (viz 9)

- Rekurentní vlastnost pozitivní definitnosti

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \text{ je pozitiv. definitní } \Leftrightarrow \alpha > 0 \quad \text{a} \quad \underbrace{\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} \cdot a \cdot a^T}_{\substack{\text{matice} \\ (n-1) \times (n-1)}} \text{ je poz. definitní}$$

Saké symetrická,
umím rozložit

+ důkaz

9) Choleského rozklad pozitivně definitní matice

Ke každé pozitivně definitní matici A existuje právě jedna
dolní trojúhelníková matice s kladnými prvky na diagonále
taková, že platí:

$$A = L \cdot L^T$$

Naopak, existuje-li k matici A matice L těchto vlastností,
potom A je pozitivně definitní.

A pozitivně definitní = A je symetrická $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x^T \cdot A \cdot x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$
 $x \neq 0$

důkaz:

- A symetrická (musí se rovnat své transpozici) $A^T = (L L^T)^T = (L^T)^T \cdot L^T = L \cdot L^T = A$
- A poz. definitní $x^T A x = (x^T \cdot L)^T \cdot (L^T \cdot x) = (L^T \cdot x)^T \cdot (L^T \cdot x) = \|L^T x\|^2$, $x \neq 0 \Rightarrow x^T A x = \|L^T x\|^2 > 0$

Rekursivní alg. pro výpočet Choleského rozkladu:

$$A = L \cdot L^T$$

$$\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a \cdot a^T = \tilde{L} \cdot \tilde{L}^T \quad \dots \text{podle rekursivní vlastnosti poz. definitnosti (viz 8)}$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, L ... dolní trojúhelníková

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a & \tilde{L} & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a^T \\ 0 & \tilde{L}^T & & \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L} \cdot \tilde{L}^T + \frac{1}{\alpha} a \cdot a^T = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a \cdot a^T + \frac{1}{\alpha} a \cdot a^T = \tilde{A}$$

\Rightarrow alg.: 1. sloupec vydělím $\sqrt{\alpha}$

pak si spočítám $(\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a \cdot a^T)$, rekursivně na ni zase zavolám rozklad

důkaz: matice L existuje právě 1

sporem... $A = L_1 \cdot L_1^T$, $L_1 \neq L$

$$L_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ l & \tilde{L}_1 & & \end{pmatrix} \quad L_1 \cdot L_1^T = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \cdot l^T \\ \lambda \cdot l & \tilde{L}_1 \tilde{L}_1^T + l \cdot l^T \end{pmatrix}$$

\Rightarrow je možné provést pouze 1 způsobem

$$\lambda = |\sqrt{\lambda^2}| \dots \lambda = \sqrt{\alpha} \quad \dots \text{jednoznačně dané}$$

$$l = \frac{1}{\lambda} \cdot a \quad \dots \text{sabí jednoznačně}$$

$$\Rightarrow \tilde{L}_1 \tilde{L}_1^T = \tilde{L} \cdot \tilde{L}^T = \tilde{A} - l l^T$$

sabí jednoznačně, dále dokazujeme indukcí, 1 prvek jednoznačný abs.

10 Úloha lineárního programování obecně a ve standardním tvaru

obecně: Chceme najít vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ maximalizující/minimalizující hodnotu dané lineární funkce mezi všemi vektory $x \in \mathbb{R}^n$, splňujícími danou soustavu lin. rovnic a nerovnic.

obecný tvar:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right\} m \text{ omezujících podmínek}$$

$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ = účelová funkce (snášíme se ji max./minimalizovat), lineární funkcionál

ke zápisu jako $Ax \leq b$ (pokud tam je nějaká rovnice, můžeme ji přepsat jako 2 nerovnice \geq, \leq)

$\max c^T x$ (minimalizace by byla ekvivalentní $\max -c^T x$)

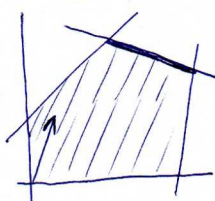
$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

vektor $x \in \mathbb{R}^n$ splňující všechna omezení = přípustné řešení

každému $x^* \in \mathbb{R}^n$, které dává $\max c^T x$ mezi všemi přípustnými x = optimální řešení

úloha má buď 1, žádná, nebo nekonečně mnoho opt. řešení

grafický pohled:



= nekonečně mnoho řešení
1 bod = 1 řešení
neomezená úloha = žádná

řešení nerovnice je vždy polovina

ve 2D = konvexní mnohoúhelník, ve 3D polyedr

např. pro simplexovou metodu se nám hodí tvar standardní tvaru:

$$\max c^T x$$

$$\text{za podmínek } Ax = b \\ x \geq 0$$

\Rightarrow omezení jsou rovnice + $x_j \geq 0$ (podmínky nezápornosti)

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

by musel splňovat všechny proměnné

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \leq b_1$$

... ke každé rovnici přidáme ještě 1 proměnnou, nerovnici nahradíme rovnici

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \leq b_m$$

... protože x_1, \dots mají v původní úloze dovoleno nabývat záporných hodnot,

$$\dots + x_3 = b_1$$

zavedeme pro každé x_i 2 nové proměnné, $y_1 \geq 0, z_1 \geq 0$ a nahradíme $x_1 = (y_1 - z_1)$

$$\dots + x_3 = b_m$$

... přejmenujeme y_i a z_i na x_1, x_2, \dots pro zachování konvence

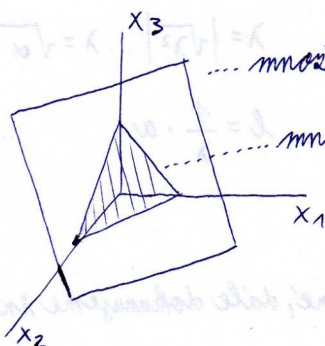
= $m + 2n$ proměnných, m rovnic + podmínky nezápornosti

graficky:

$Ax = b$ je afinní podprostor F

prostoru \mathbb{R}^n (= posunutý vektorový podprostor o x_0)

řešení: množina průniků F a \mathbb{R}^n se všemi souřadnicemi nezápornými



... množina všech řešení $Ax = b$

... množina přípustných řešení

11 Simplexový algoritmus (geometrická intuice i formální postup)

intuice: množina přípustných řešení - prázdná, omezená, neomezená → vždy konvenční
(ve 3D polyedru, ve 2D mnohoúhelníku...)

→ vybereme si nějaké přípustné řešení ve vrcholu

- můžeme přeskakovat na sousední vrcholy, snažíme se polybovat v omezené oblasti (ne do ∞)

→ přesouváme se do souseda s větší hodnotou

- pokud už větší není ⇒ lokální optimum, a konvexity ⇒ globální optimum

úloha ve standardním tvaru:

$$Ax = b \quad \text{předpokládám: dimenze } x \text{ je } n$$

$$x \geq 0$$

$$\min C^T x$$

co je vrchol?

vyberu $n-m$ nerovností $x_i \geq 0$, budou splněny jako rovnost

($m < n$... aby vůbec bylo přípustné řešení)

$$\begin{matrix} m & n \\ \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} & \cdot \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} = b \end{matrix}$$

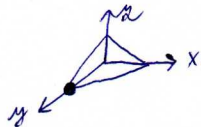
$$\downarrow$$

$$\begin{matrix} \text{sloupčky} \\ \text{vedle sebe:} \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = b$$

$m \times m$

... jestli je matice regulární, tak se má právě 1 řešení
(pokud jsem si sloupčky vybral lin. nezávislé)

hledám vektor, na se ose, která proměnná není nulová (proháná se so jen v 1 bodě, viz standardní tvar ⑩)



⇒ tak dosahávám jednotlivé vrcholy polyedru

obecně problém, jak ale vybrat lin. nezávislé sloupce ... max $\binom{n}{m/2}$ možností = $\frac{2^n}{\sqrt{2\pi n}}$

přechod k sousednímu vrcholu ⇒ 1 rovnost nechám plovat, $n-1$ rovnice ponechám,

objeví se sam jiná, nenulová proměnná

formálně: přechod po hraně do jiného vrcholu:

proměnné $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$ povoleny být ≥ 0 , pro každou zbývající x_j povolím také ≥ 0 ,

$$\text{vyskouším: } Bx' + A_j x_j = b \quad \begin{matrix} d_j \dots \text{přírůstek } x_j \\ d_B \dots \text{přírůstek } x' \end{matrix}$$

$$B \cdot d_B + A_j d_j = 0$$

$$B \cdot d_B = -A_j \cdot d_j$$

$$d_B = -B^{-1} \cdot A_j \cdot d_j$$

o kolik se musí změnit
osobní, nenulové proměnné,
aby pořád platila ta rovnice

... srozumitelně: beru podle sdružení
hrany, ne se, která končí kloub



jak nalyvá na hraně funkcionál? → a nuly se přesunou do 1 (x_j), koukneme na přírůstek po hraně $d_B = -B^{-1} A_j$

funkcionál:

$$C_1 x_1 + \dots + C_n x_n \quad C_B = \langle C_{B(1)}, \dots, C_{B(m)} \rangle$$

⇓ vynechám so, co je nulové

přírůstek funkcionálu:

$$C_j + C_B \cdot d_B = C_j - C_B \cdot B^{-1} A_j < 0$$

já ta složka
funkcionálu

vektor c se složkami jen B^{-1} ...

já ta sloupec
invertovaná matice
vybraných nenulových sloupčků

- k tomu směru, kde je pro větší j hodnota záporná
($C_j - C_B B^{-1} A_j < 0$)

→ spočítám si $d_B = -B^{-1} A_j$

• všechny složky kladné - řešení neexistuje (šel by do ∞)

• některé záporné ⇒ vezmu si nejmenší x_j ,

pro které se hodnota vynuluje