Pozn., (1) $\sin x = T_4^{\sin,0}(x) + \text{chybový člen} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{(\overbrace{\sin\xi}^{|\ldots|\le 1})^5}{5!}\cdot x^5$, tedy $\sin(0{,}1) = \underbrace{0{,}1 - \frac{0{,}1^3}{6}}_{0{,}0998\bar{3}}$ s chybou $\le \frac{1}{24}\cdot 0{,}00001$.

(2) Taylorův polynom pro $a=0$ se nazývá MacLaurinův polynom

(3) Varování: Existují funkce takové, že $\underbrace{f(x)\neg\equiv 0}_{\text{není konstantní 0}}$ a $\forall n: f^{(n)}(0)=0$. Pro tyto funkce Taylorův polynom nefunguje.

(4) Často (pokud $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ je omezená) platí $f(x) = T_n^{f,a}(x) + O((x-a)^{n+1})$.

Vždy platí $f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n)$, $\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \overbrace{\to}^{x\to a} 0$.

Věta: 5.4, o substituci

1. Nechť F je pf. k f na (a,b), $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ a $\forall x\in(\alpha,\beta)\ \exists\varphi'(x)$.
   Pak $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt = F(\varphi(t)) + c$ na (α,β). $(\overbrace{(\alpha,\beta)\to(a,b)}^{\varphi} \overbrace{\to \mathbb{R}}^{f,F})$
2. Nechť $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ je surjektivní (na), $\forall x\in(\alpha,\beta)\ \exists\varphi'(x)$, $\varphi'(x)\neq 0$
   $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ a $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt = G(t)$ na (α,β).
   Pak $\int f(x)\cdot dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c$ na (a,b).

Důkaz: (1) $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

(2) φ je monotónní (rostoucí anebo klesající), protože $\forall x\in(\alpha,\beta):\varphi'(x)\neq 0$ a tedy není možné, aby $\exists x_1,x_2\in(\alpha,\beta):\varphi(x_1)>0\wedge\varphi(x_2)<0$.

$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x))\cdot(\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\cdot\varphi'(\varphi^{-1}(x))\cdot\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$, Q.E.D.

Př.: $\int \sin(2\cdot x)\cdot dx$ ... $= -\frac{1}{2}\cos 2\cdot x + c$

$f(x)=\sin x$ ... $F(x)=-\cos x$

$\varphi(t)=2\cdot t$, $(a,b)=(\alpha,\beta)=(-\infty,+\infty)$

$\sin(2\cdot t)\cdot 2\cdot dt = -\cos(2\cdot t)+c$

Př.: $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\cdot dx$

$n=1: I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + c$

$I_n = \int \underbrace{1}_{g}\cdot\underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{F} = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x\cdot\underbrace{(-n)\cdot\frac{2\cdot x}{(1+x^2)^{n+1}}}_{f(x)} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2\cdot n\cdot\int\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2\cdot n\cdot(I_n - I_{n+1})$

$I_{n+1} = \frac{1}{2\cdot n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n} + (1-\frac{1}{2\cdot n})\cdot I_n$

tedy $\underbrace{I_2}_{n=1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cdot arctg\, x + c$

Věta: 5.6, rozklad na parciální zlomky

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $deg(P) < deg(Q)$ a Q je ve tvaru z důsl. výše.

Pak existují jednoznačně určená čísla A_j^i, B_j^i, C_j^i taková, že

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{P_1}^1}{(x-x_1)^{P_1}} + \overbrace{\ldots\ldots\ldots}^{\text{totéž pro } x_2,\ldots,x_k} + \frac{B_1^1 \cdot x + C_1^1}{x^2+\alpha_1 \cdot x+\beta_1} + \ldots + \frac{B_{q_1}^1 \cdot x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 \cdot x+\beta_1)^{q_1}} + \overbrace{\ldots\ldots\ldots}^{\text{totéž pro } (x^2+\alpha_2 \cdot x+\beta_2),\ldots,(x^2+\alpha_e \cdot x+\beta_e)}$$

Důkaz pro Q s n reálnými kořeny, tj. $Q(x) = a_n \cdot (x-x_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{p_k}$,

M.I. podle $deg(Q)$:

(1) $deg(q)=1 \Rightarrow deg(P)=0 \Rightarrow \begin{matrix} Q(x)=a_1 \cdot (x-x_1) \\ P(x)=c \end{matrix} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha}{x-x_1}$

(2) zkusíme šikovně zvolit α ,

aby na $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\alpha}{(x-x_1)^{p_1}}$ šel užít indukční předpoklad.

Položíme $H(x) = a_2 \cdot (x-x_2)^{p_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{p_k} = \frac{Q(x)}{(x-x_1)^{p_1}} \Rightarrow H(x_1) \neq 0$

a použijeme ji k vyjádření:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\alpha}{(x-x_1)^{p_1}} = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{\alpha \cdot Q(x)}{(x-x_1)_1^p}}{Q(x)} = \frac{P(x) - \frac{\alpha \cdot Q(x)}{(x-x_1)_1^p}}{Q(x)} = \frac{P(x)-\alpha \cdot H(x)}{Q(x)}$$

Z toho plyne, že existuje $\alpha : P(x_1) - \alpha \cdot H(x_1) = 0$, a to $\alpha = \frac{P(x_1)}{H(x_1)}$.

x_1 je kořen, takže ho můžeme vytknout: $P(x) - \alpha \cdot H(x) = (x-x_1) \cdot P_1(x)$

Tedy $\frac{(x-x_1) \cdot P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{\underbrace{a_n \cdot (x-x_1)^{p_1-1} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{p_k}}_{\text{toto lze rozložit na parciální zlomky}}}$, indukční předpoklad.

$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\alpha}{(x-x_1)^{p_1}}$ je lineární kombinace výrazů $\{\frac{1}{(x-x_i)^s}; 1 \le s \le p_i\}$

kromě $\frac{1}{(x-x_i)^{p_i}}$. Po přidání $\frac{\alpha}{(x-x_1)^{q_1}}$ máme rozklad $\frac{P(x)}{Q(x)}$, Q.E.D.

(přednáška 18.3.08)

Určitý integrál

Úvod: Chceme plochu pod křivkou, samplování...

Def.: **Dělení intervalu** $[a,b]$ je posloupnost $D = (x_j)_{j=0}^n$, kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Def.: Mějme D , D' dělení $[a,b]$. Říkáme, že D' **zjemňuje** D,
pokud „ $D \subseteq D'$ “, tedy pokud všechny body dělení D jsou i body dělení D' .

Def.: Mějme f omezenou funkci na $[a,b]$ a $D = (x_j)_{j=0}^n$ dělení $[a,b]$. Pak:

Věta: 6.8, vlastnosti Riemannova integrálu

1. Linearita: pro $f, g \in R([a,b]), \alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$f+g, \alpha \cdot f \in R([a,b]); \quad (R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g; \quad (R)\int_a^b \alpha \cdot f = \alpha \cdot (R)\int_a^b f$$

2. $f \le g, f, g \in R([a,b]) \Rightarrow (R)\int_a^b f \le (R)\int_a^b g$

3. Additivita vzhledem k intervalům $a < b < c$:

$$f \in R([a,c]) \Leftrightarrow f \in R([a,b]) \wedge f \in R([b,c])$$

$$(R)\int_a^c f = (R)\int_a^b f + (R)\int_b^c f$$

Př.: (1) $(R)\int_0^{\pi} \sin x \cdot dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$

(2) $(R)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = [2 \cdot \sqrt{x}]_0^1 = 2 \cdot \sqrt{1} - 2 \cdot \sqrt{0} = 2$, ale! $\frac{1}{\sqrt{x}}$ není spojitá ani omezená na $[0,1] \Rightarrow$ nemá Riemnnův integrál.

Zvolíme ϵ a spočítáme $\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ ...limita.

Aplikace určitého integrálu

Apl.1: $\mathcal{K}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}) = (N)\int_a^b f(x)\cdot dx$.

Př.: Obsah kruhu. Počítáme pro půlkuruh:

$$\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot dx = \int_{-R}^{+R} R\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\cdot dx = \underbrace{R^2\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\cdot dt}_{t=\frac{x}{R}\cdot dt=\frac{dx}{R};\ t(-R)=-1;\ t(R)=1} = \underbrace{R^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sqrt{1+\sin^2 u}}_{=\cos u}\cdot\cos u\cdot du}_{t=\sin u;\ dt=\cos u\cdot du;\ t=\pm1\to u=\pm\frac{\pi}{2}} = R^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\cdot du = R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi$$

$\Rightarrow$ kruh : $\pi\cdot R^2$

Př.: Obvod (jednotkové) kružnice: $L(\sqrt{1-x^2},-1,1) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

$\Rightarrow$ obsah jednotkového kruhu $=2\cdot\pi\cdot 1$

Př.: $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ \ldots\ \underbrace{f(x)=\frac{1}{x}}_{\text{nerostoucí}}$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \ge \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\cdot dx = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

$$\le \int_0^{n}\frac{1}{x}\cdot dx = \infty$$

$$= 1+\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}_{a=2;\,b=n} = 1+\int_1^n\frac{1}{x}\cdot dx = 1+\log n$$

Věta: **Integrální kritérium konvergence řad**

Mějme $f\ge 0$ nerostoucí na $\mathrm{int}[n_0-1,\infty]$ pro $n_0\in\mathbb{N}$ a $a_n \ge f(n)$.

Pak $\sum a_n$ kg. $\Leftrightarrow$ $(N)\int_{n_0}^{\infty} f(x)\cdot dx < \infty$

Př.: $\sum\frac{1}{n}$ kg. $\Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty}\frac{1}{x}\cdot dx < \infty$, $\int_{n_0}^{\infty}\frac{1}{x}\cdot dx = [\log x]_{n_0}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\log x - \log n_0 = \infty \Rightarrow \sum\frac{1}{n}$ div.

Př.: $\sum\frac{1}{n^a}$ kg. $\Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty}\frac{1}{x^a}\cdot dx < \infty$, $\int_{n_0}^{\infty}\frac{1}{x^a}\cdot dx = \left[\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{x^{a-1}}\right]_{n_0}^{\infty} = \frac{1}{1-a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{a-1}} - \frac{1}{n_0^{a-1}} = \begin{cases}0 \text{ pro } a>1\\ \infty \text{ pro } a<1\end{cases}$

$a\ne 1$

Důkaz: $\int_{n_0-1}^{n_0} f(x)\cdot dx = C < \infty$; $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\cdot dx = I$

$I \le \sum_{i=n_0}^{\infty} f(i) \le I+C \Rightarrow$

$I=\infty \Rightarrow$ řada diverguje,

$I<\infty \Rightarrow C+I<\infty \Rightarrow$ řada konverguje. Q.E.D.

Def.: $f: M\to\mathbb{R}$, $M\subseteq\mathbb{R}^n$ je **spojitá** v $a\in M$, pokud $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(Pro a na hranici M bereme „limitu vzhledem k M", tj. $\forall\, x\in P(a,\delta)\cap M$.)

Def.: **Parciální derivace** funkce $f: G\to\mathbb{R}$, kde $G\subseteq\mathbb{R}^n$ otevřené, v bodě $a\in G$, ve směru i je $i\in\{1,\ldots,n\}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a)}{h}$$, pokud existuje.

Značení: $\frac{\partial}{\partial x_i}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \partial_i = \partial_i f$.

Pozn., $g_i(h)=f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\dots,a_n)\Rightarrow g'_i(0)=\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.

Př.: $f(x,y)=e^x$, pak $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^x;\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$

Def.: **Derivace** ve směru $\vec{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ funkce $f:G\to\mathbb{R}$ v $a\in G$ je $\lim_{t\in\mathbb{R},t\to 0}\frac{f(a+t\cdot v)-f(a)}{t}=:\frac{\partial}{\partial v}f(a)$. ($G\subseteq\mathbb{R}^m$)

Def.: Mějme $f:G\to\mathbb{R}$, $a\in G$ ($G\subseteq\mathbb{R}^m$ je otevřená), $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lineární funkci ($L(h)=c_1\cdot h_1+\dots+c_n\cdot h_n=c\cdot h$).

L je **totální diferenciál** funkce f v a, pokud $\lim_{\vec{h}\to(0,\dots,0)}\frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{|h|}=0$.

Značíme $L=Df(a)$, $L(h)=Df(a)(h)$.

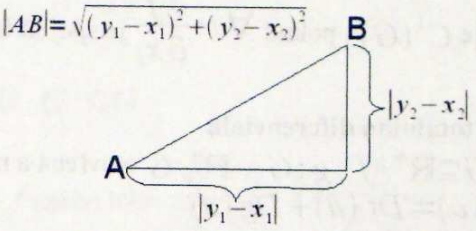
Př.: **(1)** Normální (eukleidovská) vzdálenost v $\mathbb{R}^n$

$\rho_2(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$

Ověření podmínek (důkaz):

1) $\rho_2(x,x)=\sqrt{0^2+\dots+0^2}=0$ => OK
2) absolutní hodnota => nezáleží na pořadí => OK
3) klasická Δ-nerovnost => OK

(2) Součtová metrika v $\mathbb{R}^n$ (taxikář na Manhattanu)



Věta: 8.1, vlastnosti otevřené množiny

Mějme (P,ρ) metrický prostor, pak platí:

1. $\emptyset$, P jsou otevřené.
2. Pokud $G_1,\dots,G_n\in P$ jsou otevřené, pak $G_1\cap G_2\cap\dots\cap G_n$ je také otevřená.
3. Pokud množiny G_α, $\alpha\in A$, jsou otevřené, pak $\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$ je otevřená.

Důkaz:

(1) $\emptyset\Rightarrow\forall x\in\emptyset$ platí cokoliv,

$P\Rightarrow\forall x\in P\,\exists r>0: B(x,r)\subseteq P$

(2) $G=G_1\cap\dots\cap G_n: x\in G\Rightarrow\forall i, x\in G_i\exists r_i>0: B(x,r_i)\subseteq G_i$

$r=min\{r_1,\dots,r_n\}>0$ a pro všechna i: $B(x,r)\subseteq G_i\subseteq G$.

(3) $G=\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$. Pro

$x\in G\,\exists\alpha\in A: x\in G_\alpha\exists r>0: B(x,r)\subseteq G_\alpha\subseteq G$, Q.E.D.

Věta: 8.2, vlastnosti uzavřené množiny

Mějme (P,ρ) metrický prostor, pak platí:

1. $\emptyset$, P jsou uzavřené.
2. Pokud $F_1,\dots,F_n\in P$ jsou uzavřené, pak $F_1\cup F_2\cup,\dots,\cup F_n$ je také uzavřená.
3. Pokud množiny F_α, $\alpha\in A$, jsou uzavřené, pak $\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha$ je uzavřená.

Důkaz:

1. $\emptyset=P\setminus P$ a $P=P\setminus\emptyset$ a $\emptyset, P$ otevřené $\Rightarrow$ $\emptyset, P$ uzavřené.

Věta: 8.3, vlastnosti konvergence

(1) Pokud $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje $\exists x \in p \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ x_n = x$, pak $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(2) Pokud $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, pak $x = y$.

(3) Pokud $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, (x_{n_k}) je vybraná posloupnost z (x_n) a (n_k) je rostoucí posloupnost z $\mathbb{N}$, pak $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Důkaz: (1) Pro $n \geq n_0 : \rho(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$

(2) Pokud $\lim (x_n) = x$; $\lim (x_n) = y$; $x \neq y \Rightarrow$ *SPOR.*

Položme $\epsilon := \frac{1}{2}\cdot\rho(x,y)$. Pak $\begin{matrix}\exists n_0 & \forall n \geq n_0 & \rho(x_n, x) < \epsilon \\ \exists n_1 & \forall n \geq n_1 & \rho(x_n, y) < \epsilon\end{matrix}$

$n = max(n_0, n_1)$ a platí:

$\rho(x_n, x) < \epsilon$, $\rho(x_n, y) < \epsilon \Rightarrow \rho(x,y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < 2\cdot\epsilon = \rho(x,y)$, *SPOR.*

(3) Víme $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 \overset{\text{o vybr. posl. pro } \mathbb{R}}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, x) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, Q.E.D.

Věta: 8.4, charakterizace uzavřené množiny

Mějme (P, ρ) metrický prostor, $F \subseteq P$.

F je uzavřená, právě když $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} ; x_n \in F : \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in F$.

Důkaz: $\Rightarrow$ předpoklady: F uzavřená, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$; $x_n \in F$, $x_n \to x$ (*)

pro spor $x \notin F \Rightarrow x \in P \setminus F$ otevřená $\overset{\text{def.}}{\Rightarrow} \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq P \setminus F$

(*) $\Rightarrow r \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : \rho(x_n, x) < r \Leftrightarrow x_n \in B(x,r)$

a tedy $x_{n_0} \in F \cap B(x,r) \neq 0$, *SPOR.*

$\Leftarrow$ chceme dokázat F uzavřená $\Leftrightarrow P \setminus F$ otevřená

$\Leftrightarrow \forall x \in P \setminus F \ \exists \epsilon > 0 : B(x,\epsilon) \subseteq P \setminus F$,

pro spor nechť toto pro nějaké $x \in P \setminus F$ neplatí.

$\epsilon = 1 \ldots B(x,1) \not\subseteq P \setminus F \Rightarrow \exists x_1 \in B(x,1) \cap F$

$\epsilon = \frac{1}{n} \ldots B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq P \setminus F \Rightarrow \exists x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F$

$x_n \in F \ \forall n : x_n \to x \ldots \rho(x, x_n) < \frac{1}{n}; \quad 0 < \lim \rho(x_n, x) \leq \lim \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow$ předpoklady věty $x \in F$, *SPOR.* Q.E.D.

Def: Mějme (P, ρ) metrický prostor.

Řekněme, že $K \subseteq P$ je **kompaktní**, pokud $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in K$ existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}) taková, že existuje $x \in K : x_{n_k} \to x$.

Věta: 8.5, vlastnosti kompaktní množiny

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $K \subseteq P$ kompaktní. Pak platí:

1. K je uzavřená,
2. K je omezená,
3. $F \subseteq K$ uzavřená $\Rightarrow F$ kompaktní.

Důkaz: (1) K uzavřená $\overset{\text{V8.4}}{\Leftrightarrow} \underbrace{\forall (x_n), x_n \in K : x_n \to x \Rightarrow x \in K}_{\text{chceme}}$

K kompaktní $\Rightarrow \exists \tilde{x} \in K \ \exists x_{n_k} : x_{n_k} \to \tilde{x}$ a tedy

pro $x_{n_k} \to x \Rightarrow x = \tilde{x} \in K$.

(2) sporem: K není omezená, libovolný $a \in P$, že

$\forall n : K \not\subseteq B(a,n) \Leftrightarrow \exists x_n \in K \setminus B(a,n) \Leftrightarrow x_n \in K \wedge \rho(a, x_n) \geq n$

K kompaktní $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) \ \exists x \in K : x_{n_k} \to x$,

tedy pro $\epsilon = 1 : \exists k_0 \ \forall k \geq k_0 : \rho(x_{n_k}, x) < 1$,

$\exists k \geq k_0 : \underbrace{n_k}_{\to\infty} > \underbrace{\rho(a,x) + 1}_{\in\mathbb{R}}$

$n_k \leq \rho(a, x_{n_k}) \underbrace{\leq}_{\text{trojúh. ner}} \rho(a,x) + \underbrace{\rho(x, x_{n_k})}_{<1} < \rho(a,x) + 1 > n_k$, *SPOR.*

(3) $x_n \in F$, chceme $\exists x \in F, (x_{n_k}) : x_{n_k} \to x$.

Víme $\exists x \in K, (x_{n_k}) : x_{n_k} \to \quad x \in F$

(přednáška 20.5.09)

Věta: 8.6, charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$

$K \in \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Důkaz: (Pouze pro metriky ρ) $\Rightarrow$ Věta 8.5

$\Leftarrow$ pro $\rho(x,y)=\rho_\infty(x,y)=max_j|x^j-y^j|$ (stačí)

K omezená $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: K \subseteq [-c,c]^d$.

Ukážeme, že $[-c,c]^d$ je kompaktní pro $\forall c>0$.

Kompaktní $\Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in [-c,c]^d \exists$ konvergentní podposloupnost,

tedy pro $x_n=(x_n^1,\dots,x_n^d)$: $\forall n \ \forall i: \ x_n^i \in [-c,c]$

Pro první souřadnici $(x_n^1)_{n=1}^\infty$ je v $[-c,c]$

(z věty ze Z.S. $\Rightarrow$) (y_k^1) vybraná podposl., že $\lim_{k\to\infty} y_k^1=y^1$; $y_k^1=x_{n_k}^1$.

Pro druhou souřadnici $(x_{n_k}^2)_{k=1}^\infty$ $\exists$ kg. vybraná podposl. (y_l^2) ,

že $\lim_{l\to\infty} y_l^2=y^2$; $y_l=x_{n_{k_l}}$. Podobně pro zbývající souřadnice.

(V prvním kroku vybereme prvky tak, aby první souřadnice konvergovala k y^1 , z těchto v druhém kroku takové, aby druhá souřadnice konvergovala k y^2 , …)

Pro d-tou souřadnici: $(y_i^j)_{i=1}^\infty$ vybraná z (x_n) , že $y_i^1 \to y_1, \dots, y_i^d \to y^d$.

Víme, že $\forall j=1,\dots,d$: $\lim_{i\to\infty} y_i^j=y^j$ (ve smyslu posloupnosti z $\mathbb{R}$),

chceme $\lim_{i\to\infty} y_i=(y_1,\dots,y_d)$ (ve smyslu metrických prostorů).

Tedy dle definice $\lim_{i\to\infty} \rho(y_i,y)=max_j|y_i^j-y^j|=0$. ? $\forall \epsilon \exists n_0$

$\exists n_1 \ \forall i \geq n_1: \ |y_i^1-y^1|<\epsilon$, …, $\exists n_d \ \forall i \geq n_d: \ |y_i^d-y^d|<\epsilon$

$n_0:=max\{n_1,\dots,n_d\}$: $i>n_0 \Rightarrow \rho_\infty(y_i,y)<\epsilon$, Q.E.D.

Def.: Mějme $(P,\rho),(Q,\sigma)$ metrické prostory, $M \subseteq P$, $f: M \to Q$, $x_0 \in M$. Řekneme, že

1. f je **spojitá v x_0 vzhledem k M**, právě když $\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x \in B_\rho(x_0,\delta) \cap M: \ f(x_0) \in B_\sigma(f(x_0),\epsilon)$.
2. f je **spojitá na M**, právě když $\forall x \in M:$ f je spojitá v x vzhledem k M.

Věta: 8.8, nabývání extrémů na kompaktu

Mějme (P,ρ) metrický prostor, $K \subseteq P$ kompaktní, $f: K \to \mathbb{R}$ spojitou, pak

1. f nabývá na K maxima a minima,
2. f je na K omezená.

Důkaz: $1 \Rightarrow 2$ OK

(1) jen pro maximum.

$s:=\sup\{f(x); \ x \in K\}$; (sup: $\forall n \exists x_n: \lim f(x_n)=s$)

(a) $s \in \mathbb{R}$: $\forall n$: $s-\frac{1}{n}$ není hz. $\Rightarrow \exists x_n \in K: \ f(x_n)>s-\frac{1}{n}$

(b) $s=\infty$: $\forall n$: n není hz. $\Rightarrow \exists x_n \in K: \ f(x_n)>n$

K je kompaktní, $\exists (y_k)$ vybraná z (x_n) tak,

že $\exists y \in K: \ \lim_{k\to\infty} y_k=y$; $\lim_{k\to\infty} f(y_k)=s$.

Chceme dokázat $f(y)=s$ maximum (stačí).

f spojitá v y: $\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x \in B_\rho(y,\delta)$: $\underbrace{f(x) \in \overbrace{B_{\rho_1}}^{v\mathbb{R}}(f(y),\epsilon)}_{|f(x)-f(y)|<\epsilon}$

Pro spor ať $f(y) \neq s$.

$\epsilon:=\frac{1}{2}\cdot|s-f(y)| \dots \exists \delta \exists k_0 \forall k>k_0: \ y_k \in B_\rho(y,\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{|f(y_k)-f(y)|}_{\Rightarrow \lim_k f(y_k) \leq f(y)+\epsilon<s} <\epsilon$, *SPOR.* Q.E.D.