Písemka - NMAA021 Úvod do komplexní analýzy
(17. 2. 2009)

Teoretická část:

(1) (5 bodů) Definujte logaritmus Log v komplexním oboru a příslušnou hlavní hodnotu log. Spočtěte $\mathrm{Log}\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3\right)$ a $\log\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3\right)$.

(2) (15 bodů) Zformulujte a dokažte větu o výpočtu integrálů typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx,$$

kde R je racionální funkce.

(3) (10 bodů) Definujte všechny typy izolovaných singularit holomorfních funkcí. Určete typ izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{e^{\sin^2 z} - \cos z}{z^2}$$

v bodě 0. Svá tvrzení zdůvodněte.

Početní část:

(4) (10 bodů) Spočtěte integrál

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2}.$$

(5) (10 bodů) Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x\; dx}{x^4+5x^2+4}.$$

(6) (10 bodů) Určete v $\mathbf{C}$ všechny izolované singularity funkce

$$f(z) := \frac{1}{(e^z-1)\sin z},$$

určete typ těchto singularit a spočtěte integrál

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz,$$

kde je $\varphi(t) := e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.