Algebra MAI019
Druhá zápočtová písemka
20. 12 2007, 14:00

(1) Rozhodněte, zda následující tabulka definuje grupu.

$(G,\cdot)$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Pokud ano, najděte všechny minimální množiny generátorů. Pokud ne, proč? [15b]

(2) Rozhodněte, zda iracionální čísla v uzavřeném intervalu $[\sqrt{2}, \sqrt{7}]$ s běžným uspořádáním tvoří úplný svaz. [10b]

(3) Rozhodněte, zda racionální čísla s běžným uspořádáním tvoří svaz. [10b]

(4) Je grupa $\mathbb{Z}_{11}^*$ cyklická? Pokud ano, najděte generátor. [10b]

(5) Spočtěte

$$5^{5^{5^5}} \mod 7.$$

[10b]

(6) Rozhodněte, zda je grupa $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ (tj. multiplikativní grupa kladných racionálních čísel) isomorfní $\mathbb{Q}^*$ (grupě invertibilních prvků $\mathbb{Q}$). Odpověď zdůvodněte. [10b]

(7) Najděte v $\mathbb{S}_5$ normální podgrupu řádu 9. [10b]

(8) Jdou dány prvky grupy $\mathbb{S}_6$:

$$\alpha = (1\,2\,3), \qquad \beta = (3\,4\,5).$$

Určete řád prvku $\alpha \cdot \beta$. [10b]

(9) Najděte **všechny** největší společné dělitele Gaussových celých čísel $1 - 7i$ a $-5 + 10i$. [15b]