Zadání:
Nechť proměnná y je substituovatelná za x do formule A. Dokažte logickou platnost:

$$(\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)A_x[y]$$

Řešení:
AxS - axiom specifikace,
DK - distribuce kvantifikátorů,
SI - skládání implikací,
PZV - pravidlo zavedení velkého kv.

(1)	$\vdash (\forall x)A \to A_x[y]$	(AxS)
(2)	$\vdash (\forall y)(\forall x)A \to (\forall y)A_x[y]$	(DK)
(3)	$\vdash (\forall y)A \to A$	(AxS)
(4)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)A$	(AxS)
(5)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to A$	(SI na (3),(4))
(6)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to (\forall x)A$	(PZ$\forall$)
(7)	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)(\forall x)A$	(PZ$\forall$)

Použiji SI:

(1) $\vdash [\overbrace{(\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)(\forall x)A}^{(7)}] \to [\overbrace{(\forall y)(\forall x)A \to (\forall y)A_x[y]}^{(2)}] \to [(\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)A_x[y]]$

(2) $\vdash (\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)A_x[y]$

(2) mám po dvojím použití modus ponens.