Zadání (+ náznak řešení) **písemky z TMI II 26. 5. 2009**

1. Uvažme následující rovnost:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sqrt{n}}{(1+x^2)^n}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}\,dy.$$

a) Odůvodněte rovnost integrálů.
b) Lze na levé straně zaměnit limitu a integrál?
c) Lze na pravé straně zaměnit limitu a integrál?
d) Limitu spočtěte.

a) Substituce $y = x\sqrt{n}$.
b) Pokud ano, pak hodnota je 0, ale jak uvidíme v c), hodnota je $\sqrt{\pi}/2$, takže zaměnit nelze.
c) Ano: „klesající Leviho věta“ s první funkcí $1/(1+x^2) \in L^1((0,\infty))$ (konvergence je monotónní). Vyjde

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}/2.$$

Je také možné použít Lebesgueovu větu.
d) Viz c).

2. Spočtěte limitu

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^1 \frac{te^{-xt^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Jestli někdo zná inteligentnější řešení než toto, nechť ho napíše: Zvolme $a \in (0,1)$ pevně. Pak

$$\int_0^a \frac{te^{-xt^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \le \frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dx = \frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\,\frac{1}{t^2} \to 0, \quad t\to\infty.$$

Na intervalu $(a,1)$ se ověří věta o záměně limity a integrálu (spojitá závislost na parametru t), vyjde $\int_a^1 0\,dx = 0$. Spojením obou výsledků dostáváme, že limita v zadání je rovna 0.

3. Spočtěte míru množiny $M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 :\ |x|+|y|+|z| < 2,\ z > y^2\}$.

Řešení např. Fubiniho větou. Může pomoci postřeh

$$\lambda(M) = 4\,\lambda(\{[x,y,z] \in (0,2)^3 :\ x+y+z < 2,\ z > y^2\}).$$

Vyjde

$$4\cdot\left(\int_0^1 \frac{(2-z)+(2-z-\sqrt{z})}{2}\sqrt{z}\,dz + \int_1^2 \frac{(2-z)^2}{2}\,dz\right) = 17/5.$$