Kapitola 1

Základní vlastnosti množiny $\mathbb{R}$

Úmluva 1. $\mathbb{R}$ doplníme o další dva prvky $\{+\infty, -\infty\}$ a vzniklou množinu označíme $\mathbb{R}^*$. Rozšíříme na ni uspořádání a základní početní úkony (vzájemné sčítání, násobení, odčítání, dělení) takto:

1. $-\infty < x < \infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

2.
$$\begin{aligned} x + \infty &= \infty, & x + (-\infty) &= -\infty & &\text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \\ x \cdot (\infty) &= \infty, & x \cdot (-\infty) &= -\infty & &\text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x > 0 \\ x \cdot (\infty) &= -\infty, & x \cdot (-\infty) &= \infty & &\text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x < 0 \\ \infty \cdot (-\infty) &= -\infty, & \tfrac{x}{\infty} &= \tfrac{x}{-\infty} = 0 & &\text{pro } \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\infty + (-\infty)$, $\infty \cdot 0$, $-\infty \cdot 0$, $\frac{\pm\infty}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se nezavádí.

Definice 2. Množinu $M \subset \mathbb{R}$ nazveme zdola (shora) omezenou, jestli je takové $K \in \mathbb{R}$, že $K \leq x \ \forall x \in M$ ($K \geq x \ \forall x \in M$). Pak řekneme, že K omezuje M zdola (shora). K se taky říká dolní (horní) odhad, mez, hranice, omezení, závora množiny M.

Je-li M omezená shora i zdola, říkáme jí omezená.

Definice 3. Největším prvkem množiny M nazveme takové n, kde $x \leq n \ \forall x \in M$. Značíme $\max M$. Obdobně se zavádí $\min M$ – nejmenší prvek M.

Poznámka 4. $\max(0, 1\rangle = 1$, $\max(0, 1)$ nemá největší prvek. Má-li $M \subset \mathbb{R}$ nejmenší, případně největší prvek, je shora, příp. zdola omezená a sice číslem $\max M$, případně $\min M$.

Základní vlastnost množiny $\mathbb{R}$ vyjadřuje následující věta:

Věta 5 (O suprému)**.** *Buď $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, M shora omezená. Pak je jediné číslo s takové, že platí*

1. *$x \leq s$ pro $\forall x \in M$ (s omezuje M shora)*
2. *$\forall s' < s \ \exists x \in M$, že $s' < x$ (s je nejmenší horní mez)*

Důsledek 6 (věta o infímu). Je-li $\emptyset \neq M \in \mathbb{R}$ zdola omezená, pak existuje jediné číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že:

1. $x \geq d$ pro $\forall x \in M$ (d omezuje M zdola)
2. $\forall d' > d \ \exists x \in M$, že $d' < x$ (d je největší dolní mez)

Definice 7. Číslu s z věty 5 a číslu d z důsledku věty 5 se říká suprémum (infímum) množiny M a značí se $\sup M$ ($\inf M$).

Položíme ještě $\sup M = \infty$ ($\inf M = -\infty$), není-li M shora (zdola) omezená.

Dále $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = \infty$ a $\emptyset = M$ je jediný případ, kdy $\inf M > \sup M$.

Poznámka 8. Každá $M \subset \mathbb{R}^*$ má tedy definovanou hodnotu $\sup M$, $\inf M$. Je-li množina neprázdná, shora (zdola) omezená, je $\sup M \in \mathbb{R}$ ($\inf M \in \mathbb{R}$).

Každá shora (zdola) omezená neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$ tam tedy má své suprémum (infímum). To ale neplatí v $\mathbb{Q}$. Například množina $M = \mathbb{Q} \cap (0, \pi)$ má $\sup M \notin \mathbb{Q}$.

Má-li M největší (nejmenší) prvek, je tento zároveň suprémem (infímem) množiny M. Je $\sup M \in M \Leftrightarrow M$ má největší prvek. Je-li to tak, je $\sup M = \max M$. Obdobně to platí o infímu a nejmenším prvku.

Důkaz důsledku věty 5 ukazuje, že $\inf M = -\sup -M$, obdobně $\sup M = -\inf -M$.

Kapitola 2

Limity posloupností

Definice 9. Zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{N} \to \mathbb{C}$) nazveme posloupností reálných (komplexních čísel). Místo $a(n)$ značíme a_n.

Definice 10. Číslo $a \in \mathbb{C}$ nazveme limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ že } \ |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq k$$

píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ($\lim a_n = a$, $a_n \to a$) a říkáme, že $\{a_n\}$ má (konečnou) limitu, konverguje k a.

Posloupnostem, které mají konečnou limitu, se říká konvergentní.

Jestli pro reálnou posloupnost platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists k(K) \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n > K \ \forall n \geq k$$

píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ($\lim a_n = \infty$, $a_n \to \infty$) a říkáme, že $\{a_n\}$ jde k nekonečnu; diverguje.

Obdobně, jestli pro reálnou posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists k(K) \in \mathbb{N}, \text{ že } a_n < K \ \forall n \geq k$$

píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ($\lim a_n = -\infty$, $a_n \to -\infty$) a říkáme, že $\{a_n\}$ diverguje k $-\infty$.

Poznámka 11. Platí-li některá z podmínek v definici 10 pro nějaké $\varepsilon > 0$, pak platí pro všechna $\varepsilon' > \varepsilon$.

Vlastnosti posloupností

Věta 12. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Věta 13. *Posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta 14 (Vztah limit posloupností a základních početních úkonů)**.** *Nechť $a_n \to a$, $b_n \to b$, pak*

1. $a_n \pm b_n \to a \pm b$
2. $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ *(nelze $0 \cdot \infty$)*
3. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ *($b \neq 0$ nebo zlomek $\frac{a}{b}$ není ve tvaru $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)*

má-li pravá strana smysl, tj. například má-li $\frac{a}{b}$ smysl, má posloupnost $\frac{a_n}{b_n}$ limitu a ta se rovná $\frac{a}{b}$; obdobně ostatní případy.

Věta 15 (2. věta o limitě součinu)**.** *Buď $\{a_n\}$ omezená, $\{b_n\} \to 0$. Pak má $\{a_n \cdot b_n\}$ limitu a ta se rovná nule.*

Věta 16 (2. věta o limitě převrácené hodnoty)**.** *Nechť $a_n \to 0$ a $\exists \tilde{k} \in \mathbb{N}$, že $a_n > 0$ ($a_n < 0$) $\forall n \geq \tilde{k}$. Pak $\frac{1}{a_n} \to \infty$ ($-\infty$).*

Věta 17 (O přenášení nerovnosti z limit na posloupnosti)**.** *Nechť $a_n \to a$, $b_n \to b$ a $a < b$. Pak $\exists k \in \mathbb{N}$, že $a_n < b_n$ $\forall n \geq k$.*

Věta 18. *Nechť $a_n \to a$, $b_n \to b$ a nechť $\exists k \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq k$. Pak $a \leq b$.*

Věta 19 (O majorizované konvergenci (o dvou policajtech))**.** *Nechť $a_n \to a$, $b_n \to a$ a existuje $k^* \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n \geq k^*$. Pak $\{c_n\}$ má limitu a ta se rovná a.*

Definice 20. Řekněme, že reálná posloupnost $\{a_n\}$ roste (neklesá, klesá, neroste), jestli $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$, $a_n > a_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Řekněme, že $\{a_n\}$ má některou z (těchto) vlastností od $k \in \mathbb{N}$, má-li ji $\forall n \geq k$.

Posloupnostem, které neklesají či nerostou se říká monotónní, těm co dokonce jenom rostou či klesají, se říká ryze monotónní.

Věta 21 (O existenci limity monotónní posloupnosti)**.** *Jestli $\{a_n\}$ neklesá (neroste), má limitu. Ta se rovná* $\sup\{a_n\}$ *(*$\inf\{a_n\}$*).*

Definice 22. Vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$ je posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Říká se jí též podposloupnost.

Věta 23 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť $a_n \to a$ a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je z ní vybraná. Pak má limitu a ta se rovná a.*

Důsledek 24. Obsahuje-li $\{a_n\}$ dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, nemá limitu.

Věta 25. *Buďte $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ vybrané z $\{a_n\}$, přičemž $\forall n \in \mathbb{N}$ je jedním z m_k nebo n_l (tj. $\{m_l\} \cup \{n_l\} = \mathbb{N}$).*

Jestli $a_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$, $a_{n_l} \xrightarrow{l\to\infty} a$, tak má $\{a_n\}$ limitu a ta se rovná a.

Definice 26. Hromadnou hodnotou (hromadným bodem) posloupnosti $\{a_n\}$ nazveme limitu její vybrané posloupnosti.

Věta 27. *Množina všech hromadných hodnot každé reálné posloupnosti $\{a_n\}$ je neprázdná, má největší prvek s a nejmenší d. Přitom je $s = \lim s_n$ a $d = \lim d_n$ kde $s_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, $d_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$.*

Definice 28. Největší (nejmenší) hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$ se nazývá její horní limitou nebo také *limes superior* (dolní limitou nebo také *limes inferior*) a značí se $\overline{\lim}\, a_n$ nebo $\limsup a_n$ ($\underline{\lim}\, a_n$ nebo $\liminf a_n$).

Věta 29. *$\{a_n\}$ má limitu právě když $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$. Ta je pak rovna jejich společné hodnotě.*

Věta 30. *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní.*

Věta 31 (Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence)**.** *Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní (tj. konečnou) limitu právě když splňuje tzv. Bolzano-Cauchyovu podmínku.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \text{že}\ |a_m - a_n| < \varepsilon\ \forall n, m \geq k(\varepsilon) \tag{2.1}$$

Věta 32 (Stolzova)**.** *Nechť $\{y_n\}$ roste a $y_n \to \infty$. Pak existuje-li $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, existuje i $\lim \frac{x_n}{y_n}$ a jsou stejné.*

Důsledek 33.

1. Jestli $a_n \to a$, pak $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ má limitu a ta se rovná a.

2. $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} \to 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N})$
4. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) \to \frac{1}{2}$

Příklad 34. Posloupnost $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ roste a je shora omezená, má tedy podle věty 21 konečnou limitu, která se označuje e. Platí $2 < e \leq 3$. Navíc je $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

Kapitola 3

Ohleduplný úvod do základů teorie množin

Definice 35. Zobrazení f množiny A do množiny B nazveme prostým jestli platí: mají-li dva prvky z A stejný obraz, jsou totožné, tj. $x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (nebo $x, y \in A, f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$).

Také se říká, že f zobrazuje A do B prostě.

Řekneme, že f zobrazuje A na B jestli $f(a) = \{f(x), x \in A\} = B$, tj. $\forall y \in B\ \exists x \in A$, že $f(x) = y$.

Důsledek 36. Jestli f zobrazuje prostě A na B, pak $\forall y \in B\ \exists! x \in A$, že $f(x) = y$. Lze tedy ke každému prvku z B jednoznačně přiřadit jeho vzor $x \in A$ (tj. takové $x \in A$, že $f(x) = y$). Vznikne tak zobrazení B na A (opět prosté), jež se označuje f^{-1} a říká se mu inverzní zobrazení k f. Je tedy $f^{-1} : B \to A$. Vztahy $y = f(x)$ a $x = f^{-1}(y)$ jsou pro $x \in A, y \in B$ rovnocenné.

Definice 37. Řekněme, že množiny A a B mají stejnou mohutnost, jestliže existuje prosté zobrazení A na B a B na A.

Definice 38. Množinu A nazveme spočetnou, existuje-li prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na A. Tj. zobrazení $a : \mathbb{N} \to A$. Jinak řečeno, jestli lze A uspořádat do posloupnosti, nebo jestli A lze „očíslovat“, tj. jestli $A = \{a(1), a(2), \dots\}$.

Nazveme ji nejvýše spočetnou, je-li spočetná nebo konečná. (Někdy se spočetnou rozumí nejvýše spočetná)

Věta 39. *Buď A_n spočetná $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ spočetná (spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina)*

Důsledek 40. Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ spočetné, je i $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ spočetná.

Věta 41. *Každá (nekonečná) část spočetné množiny je spočetná.*

Důsledek 42 (věty 39). Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

Tvrzení 43. *Množina všech posloupností z nul a jedniček není spočetná.*

Důsledek 44. $\mathbb{R}$ není spočetná.

Poznámka 45. Řekněme, že mohutnost množiny A je menší než mohutnost množiny B ($\operatorname{moh} A < \operatorname{moh} B$), jestliže je nějaké prosté zobrazení A do B, ale žádné B do A. Tzv. hypotéza kontinua předpokládá, že není množina C, pro níž platí $\operatorname{moh} \mathbb{N} < \operatorname{moh} C < \operatorname{moh} \mathbb{R}$.

Kapitola 4

Limity funkcí

Definice 46. Reálnou (komplexní) funkcí na množině M se rozumí zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Funkci f nazveme shora (zdola) omezenou na M, jestli existuje nějaké číslo $k(K) \in \mathbb{R}$, že $f(x) \leq K\ \forall x \in M$, resp. $f(x) \geq k\ \forall x \in M$. Nazveme ji omezenou, je-li omezená jak shora, tak zdola.

To je totéž jako to, že $\exists K > 0$ takové, že $|f(x)| \leq K\ \forall x \in M$.

Definice 47. Buďte $a, A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu A (resp. $\pm\infty$), jestli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall 0 < |x - a| < \delta$$

resp.

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) > K\ \forall 0 < |x - a| < \delta$$

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) < K\ \forall 0 < |x - a| < \delta$$

Píšeme $\lim_{x\to a} f(x) = A$(resp. $\pm\infty$).

Řekneme, že f má v a limitu A ($\pm\infty$) zprava, jestli

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{ že } |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in (a, a + \delta)$$

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) > K\ \forall x \in (a, a + \delta)$$

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0, \text{ že } f(x) < K\ \forall x \in (a, a + \delta)$$

Píše se $\lim_{x\to a+} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). Obdobně se zavádí limita f v a zleva (místo $a < x < a+\delta$ se bere $a - \delta < x < a$) a píše se $\lim_{x\to a-} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). Místo příslušných limit zprava (zleva) se někdy psává $f(a+)$, resp. $f(a-)$.

Řekneme, že f má v ∞ limitu $A \in \mathbb{R}$ (resp. $\pm\infty$) jestli $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{R}$, že $|f(x) - A| < \varepsilon$ ($\forall K\ \exists k \in \mathbb{R}$, že $f(x) > k$, resp. $f(x) < k$). Píše se $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$). U $-\infty$ se místo $x \geq k$ bere $x \leq k$ a píše se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ (resp. $\pm\infty$).

Poznámka 48.

1. Aby měla f limitu (zleva, zprava), musí být dána na nějakém $P(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < |x - a| < \delta\}$ ($(a - \delta, a)$, $(a, a - \delta)$), $\delta > 0$. Této množině se říká prstencové (levé, pravé) δ-okolí bodu a. Není-li δ nutné uvádět, píše se jen $P(a)$ ($P^+(a)$, $P^-(a)$).

   Množině (K, ∞) ($(-\infty, K)$) lze říkat okolí nekonečna ($-\infty$).

2. Definice $\lim_{x\to a} f(x) = A$ má smysl i pro komplexní funkci komplexní proměnné x pro $a, A \in \mathbb{C}$.

3. Má-li f v bodě a vlastní (tj. konečnou) limitu, je na nějakém $P(a, \delta)$ omezená (totéž pro lim v $\pm\infty$), například čísly $A - 1$ a $A + 1$.

Věta 49. *f má v $a \in \mathbb{R}$ limitu právě když tam má limitu zprava i zleva a jsou stejné. V tom případě je hodnota limity rovna hodnotě obou jednostranných limit.*

Důsledek 50. Má-li f v $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) vlastní (tj. konečnou) limitu (zleva, zprava), je na nějakém prstencovém okolí $P(a,\delta)$ ($P^+(a,\delta)$, $P^-(a,\delta)$) omezená. Má-li ji u ∞ ($-\infty$), je omezená na nějakém okolí ∞ ($-\infty$).

Věta 51 (Heineho o vztahu limity funkce a posloupnosti)**.** *Funkce f má v $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) limitu právě když platí*

$$\forall\{a_n\} \subset \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ takové, že } a_n \to a, \text{ ale } a_n \neq a\ \forall n, \text{ existuje } \lim f(a_n)$$

Je-li tato podmínka splněna, je $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ stejná $\forall$ takové posloupnosti a $\lim_{x\to a} f(x)$ se jí rovná.

Poznámka 52. Věta 51 pro jednostranné limity má tvar: Funkce reálné proměnné má v $a \in \mathbb{R}$ limitu zleva (zprava) právě když

$$\forall\{a_n\} \subset \mathbb{R} \text{ takové, že } a_n \to a, \text{ ale } a_n < a\ \forall n \quad (a_n > a\ \forall n), \text{ existuje } \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

Je-li tato podmínka splněna, je $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ stejná pro všechny takové posloupnosti $\{a_n\}$ z této podmínky a $\lim_{x\to a-} f(x)$ ($\lim_{x\to a+} f(x)$) je rovna jejich společné hodnotě.

Důsledek 53. Značka lim nechť znamená v každém tvrzení kteroukoliv z $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a+}$, $\lim\limits_{x\to a-}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

1. f má nejvýše jednu limitu.
2. (aritmetika limit): existuje-li $\lim f$ a $\lim g$, pak
   (a) $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$
   (b) $\lim fg = \lim f \cdot \lim g$
   (c) $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$

   má-li pravá strana smysl (tj. pak existuje lim nalevo a platí rovnost).

Věta 54 (2. věta o limitě součinu)**.** *Jestli je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $g(x)$ je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak existuje i limita $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ a je rovna 0.*

Věta 55 (2. věta o limitě převrácené hodnoty)**.** *Jestli je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ (< 0) na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak existuje i limita $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ a je rovna ∞ ($-\infty$).*

Věta 56 (o přenosu nerovností z funkce na limity)**.** *Buď $f(x) \le g(x)$ na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Pak platí $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$.*

Věta 57 (o přenosu nerovnosti z limity na funkce)**.** *Nechť $\exists A = \lim_{x\to a} f(x)$, $B = \lim_{x\to a} g(x)$ a buď $A < B$. Pak $\exists \delta > 0$, že $f(x) < g(x)\ \forall x \in P(a,\delta)$.*

Věta 58 (o sevřené konvergenci)**.** *Na nějakém okolí $P(a,\delta)$ buď $f \le g \le h$ a nechť $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} h(x) = A$, pak $\exists \lim_{x\to a} g(x)$ a ta se rovná jejich společné hodnotě.*

Definice 59. O reálné funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ řekneme, že roste (neklesá, klesá, neroste), jestli $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \ge f(x_2)$) $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Je-li f některá z těchto čtyř, nazveme ji monotónní. Jestli roste nebo klesá, nazveme ji ryze monotónní.

Věta 60. *Buď f monotónní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Není-li a jeho levý (pravý) krajní bod, existuje konečná limita funkce $f(a-)$ ($f(a+)$). Je-li $a \in \mathbb{R}^*$ jeho levý (pravý) krajní bod, existuje $f(a-)$ ($f(a+)$) - ta ale nemusí být konečná.*

Přitom jestli f na I neklesá (neroste), je $f(a-) = \sup_{x\in I, x<a} f(x)$ ($\inf_{x\in I, x<a} f(x)$) a $f(a+) = \inf_{x\in I, x>a} f(x)$ ($\sup_{x\in I, x>a} f(x)$).

Definice 61. O funkci f řekneme, že roste zleva (zprava) v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestli $\exists \delta > 0$, že $f(x) < f(a)\ \forall x \in (a-\delta, a)$ $(f(x) > f(a)\ \forall x \in (a, a+\delta)$.

Obdobně se zavádí klesání f v a zleva a zprava.

Věta 62. *f roste (klesá) na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ právě když*

- *roste (klesá) zleva v každém $a \in I$ který není případným levým krajním bodem I*
- *roste (klesá) zprava v každém $a \in I$ který není případným pravým krajním bodem I*

Spojitost

Definice 63. Funkci f nazveme spojitou v $a \in \mathbb{C}$ jestli

1. f je v a definovaná
2. existuje $\lim_{x\to a} f(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Funkci reálné proměnné nazveme spojitou v $a \in \mathbb{R}$ zprava (zleva) jestli

1. je v a definovaná
2. existuje $f(a+)$ $(f(a-))$
3. $f(a+) = f(a)$ $(f(a-) = f(a))$

Je-li f daná na okolí (pravém, levém) bodu a a neplatí bod 2 nebo 3, řekneme, že není v a spojitá nebo že je v a nespojitá, má v a nespojitost, a je jejím bodem nespojitosti, ... (zprava, zleva).

Definice 64. Nechť má f v $a \in \mathbb{R}$ nespojitost. Jestli existuje konečná $f(a-)$ a $f(a+)$, nazveme ji nespojitostí 1. druhu (ten skok), jinak jde o tzv. nespojitost 2. druhu.

Důsledek 65. Funkce monotónní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ má v každém bodě z I nejvýš nespojitost 1. druhu.

Důsledek 66. Množina všech bodů nespojitosti monotónní funkce na intervalu je nejvýše spočetná.

Věta 67 (Darbouxova vlastnost spojitých funkcí na intervalu)**.** *Je-li f spojitá na intervalu I, $a, b \in I$, pak nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$ (přesněji, je-li $a, b \in I$ a d mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak je c mezi a a b, že $f(c) = d$).*

Důsledek 68. Je-li f spojitá reálná funkce, na intervalu I, je $f(I)$ interval.

Věta 69. *Reálná funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ tam nabývá supréma a infíma – má tam tedy své maximum a minimum.*

Věta 70 (O limitě složené funkce)**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}^*$ a nechť*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \tag{4.1}$$
$$\lim_{x\to b} f(x) = A \tag{4.2}$$

Pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = A$ jestli buďto
$g(x) \neq b$ na nějakém okolí $P(a)$ nebo
f je v b spojitá.

Poznámka 71. „Dodatečné" poznámky

1. K rekurentním posloupnostem: Buď $-\infty \leq a < b \leq \infty$, buď I interval s krajními body a, b. Nechť f na I neklesá a spojitě jej zobrazuje do sebe (tj. $f(I) < I$). Pro $c \in I$ zaveďme posloupnost $\{a_n\}$ takto: $a_1 = c, a_{n+1} = f(a_n)$. Pak má $\{a_n\}$ vždy limitu, ozmačme ji l.

   Je-li $f(c) \geq c$ ($f(c) \leq c$) a má li f na $\langle c, b)$ ($(a, c\rangle$) pevný bod, tj. takové p, že $f(p) = p$, má $P^+ = \{x \in I | f(x) = x | x \geq c\}$ ($P^- = \{x \in I | f(x) = x | x \leq c\}$) nejmenší (největší) prvek $\alpha(\beta)$ a je $l = \alpha$ ($l = \beta$). Nemá-li f na $\langle c, b)$ ($(a, c\rangle$) pevný bod, je $l = b$ ($l = a$)..

2. Svaté skutečnosti: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Důsledek 72 (Důsledek Heineho věty pro spojitost). Fce f je v a spojitá, právě když:

1. je v a daná
2. pro všechna $\{x_n\}, x_n \to a$ existuje $\lim f(x_n)$ a rovná se $f(a)$.

Věta 73. *Prostá a spojitá f na intervalu I je ryze monotónní.*

Poznámka 74 (Inverzní zobrazení, inverzní funkce). Podle 36 je-li f prosté zobrazení množiny A do B, tj. jestli pro $x_1, x_2 \in A$, pro něž je $f(x_1) = f(x_2)$, je $x_1 = x_2$, platí:

$$\forall y \in f(A)\ \exists!^1 x \in A, \text{ že } f(x) = y \tag{4.3}$$

Přiřadíme-li každému $y \in f(A)$ toto jediné $x \in A$, pro něž je $f(x) = y$, vzniká jedno zobrazení $f^{-1} : f(A) \to A$, kde pro $y \in f(A)$ je $f^{-1}(y) = x$, pro které $f(x) = y$. Říká se mu inverzní zobrazení k f, zobrazuje prostě $f(A)$ na A a vztahy $f(x) = y$ a $f^{-1}(y) = x$ jsou pro $x \in A, y \in f(A)$ rovnocenné.

Je-li f funkcí, t.j. zobrazením $A \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, mluvíme o inverzní funkci.

1. Funkce $f(x) = \sin x$ ($\cos x$;$\tan x$;$\cot x$) prostě zobrazuje $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$ ($\langle 0, \pi\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$; $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ na $\mathbb{R}$;$\langle 0, \pi\rangle$ na $\mathbb{R}$) a tak má na $\langle -1, 1\rangle$ ($\langle -1, 1\rangle$, $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) inverzní funkci $\arcsin y$ ($\arccos y$;$\arctan y$;$\operatorname{arccot} y$).

2. Funkce $f(x) = x^n$ pro sudá (lichá) $n \in \mathbb{N}$ prostě zobrazuje $\langle 0, \infty)$ ($\mathbb{R}$) na $\langle 0, \infty)$ ($\mathbb{R}$), a tam má inverzní funkci zvanou n-tou odmocninou a značenou $\sqrt[n]{y}$.

3. Funkce $f(x) = e^x$ prostě zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$, a tak má inverzní funkci zvanou $\ln y$.

4. Funkce $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ($\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$;$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$) prostě zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ ($\langle 0, \infty)$ na $\langle 1, \infty)$; $\mathbb{R}$ na $(-1, 1)$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$), a tak tam má inverzní funkci zvanou $\operatorname{arsinh} y$ ($\operatorname{arcosh} y$; $\operatorname{artanh} y$, $\operatorname{arcoth} y$) [2]

Věta 75. *Nechť je funkce f na intervalu I prostá a zobrazuje každý interval $J \subset I$ na interval. Pak je f^{-1} spojitá.*

Důsledek 76. Inverzní funkce ke spojité a prosté funkci f na intervalu I je na $f(I)$ spojitá.

Důsledek 77. Prostá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, která zobrazuje každý interval $J \subset I$, je spojitá.

Definice 78. Buď $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ takový, že $P(a, \delta) \cap A \neq \emptyset\ \forall \delta > 0$. Řekneme, že f má v a limitu $L \in \mathbb{R}$ vůči A, jestli $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, že $|f(x) - L| < \varepsilon\ \forall 0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$ (píšeme $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = L$)

Věta 79. *Buď $A, B \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) a nechť $P(a, \delta) \cap A \neq \emptyset$, $P(a, \delta) \cap B \neq \emptyset\ \forall \delta > 0$. Pak $\lim_{x\to a, x\in A\cup B}$ existuje právě tehdy, když existují $\lim_{x\to a, x\in A}$ a $\lim_{x\to a, x\in B}$ a jsou stejné.*

Je-li tato podmínka splněna, je hodnota $\lim_{x\to a, x\in A\cup B} f(x)$ rovna společné hodnotě obou zmíněných limit.

Existuje-li navíc $\sigma > 0$, že $P(a, \sigma) \subset A \cup B$, existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ a rovná se s.

---

[1] existuje právě jedno

[2] zvolil jsem rozšířenější a obvyklejší značení, ale na přednáškách se používá zápis sh, ch, th, cth, argsh, argch, je to totéž co napsané výše

Kapitola 5

Derivace

Definice 80. Derivací funkce f v a (zleva, zprava) se rozumí

$$\lim_{x \to a(a+,a-)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{5.1}$$

pokud existuje. Značíme $f'(a)$ nebo $\frac{\mathrm{d}\, f(a)}{\mathrm{d}\, x}$ (resp. $f'_+(a)$, $f'_-(a)$). Je-li konečná (∞, $-\infty$), říká se jí vlastní (nevlastní) derivace.

Poznámka 81.

1. Položíme-li v (5.1) $x - a = t$, máme podle věty 70

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad = \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \tag{5.2}$$

   má-li jedna strana smysl (tj. existuje-li limita vlevo (vpravo), tak i vpravo (vlevo)) a jsou stejné.

2. f má v $a \in \mathbb{R}$ derivaci právě tehdy, když existuje derivace zleva a zprava a tyto dvě derivace jsou si rovny.

   Je-li podmínka splněna, je $f'(a)$ rovna jejich společné hodnotě.

Věta 82. *Má-li f v a vlastní derivaci (zleva, zprava), je v a spojitá (zleva, zprava).*

Věta 83. *Nechť existuje $f'(a)$, $g'(a)$. Pak*

1. $(f(a) + g(a))' = f'(a) + g'(a)$
2. $(f(a)g(a))' = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. $\left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Má-li příslušná pravá strana smysl (v bodě 2 je-li navíc jedna z funkcí v a spojitá a v bodě 3 je-li funkce g v a spojitá). Totéž platí s jednostrannými derivacemi.

Věta 84 (O derivaci složené funkce)**.** *Funkce g měj derivaci v bodě a, funkce f v $g(a)$ a buď g v a spojitá. Pak má $f(g(x))$ v a derivaci a je $(f \circ g)(a) = f'(g(a))g'(a)$, má-li součin napravo smysl.*

Věta 85 (O derivaci inverzní funkce)**.** *Buď f^{-1} inverzní funkce ke spojité funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ a nechť existuje $f'(a) \neq 0$. Pak má f^{-1} v $b = f(a)$ derivaci a je*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) \quad = \quad \frac{1}{f'(a)} \qquad \left(= \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\right)$$

má-li pravá strana smysl (tj. je-li $f'(a) \neq 0$), jinak je $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty(-\infty)$, jestli f na I roste (klesá).

Věta 86. *Je-li $f'(a) > 0$ (< 0), f v bodě a roste (klesá). Obdobné tvrzení platí s derivací a růstem (klesáním) jednostranným.*

Důsledek 87. Je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval a $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in I$ (v případných krajních bodech se myslí příslušná jednostranná derivace), tak f na I roste (klesá).

Kapitola 6

Obecné věty o derivaci

Věta 88 (Rolleova)**.** *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f buď spojitá reálná funkce na $\langle a, b\rangle$, která má derivaci na (a, b), taková, že $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$.*

Věta 89 (O střední hodnotě, tzv. Lagrangeova)**.** *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f spojitá reálná funkce na $\langle a, b\rangle$, která má na (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Věta 90 (Zobecněná věta o střední hodnotě, tzv. Cauchyova)**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f a g spojité reálné funkce na $\langle a, b\rangle$, které mají všude na (a, b) derivaci, $g(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$. Pak je $c \in (a, b)$, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad = \quad \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Poznámka 91. Funkce f měj derivaci v každém bodě otevřené úsečky (a, b) a buď f spojitá v každém bodě uzavřené úsečky $\langle a, b\rangle$.

Pak $|f(b) - f(a)| \leq \sup |f'(c)| \cdot |b - a|$, kde $c \in (a, b)$.

Je-li tedy f' na (a, b) omezená číslem K, je $|f(b) - f(a)| \leq K\,|b - a|$

Důsledek 92. Nechť je $f'(x) > 0$ (≥ 0, < 0, ≤ 0) na intervalu I (obsahuje-li některý z krajních bodů, rozumí se v něm příslušná jednostranná derivace). Pak $f(I)$ roste (neklesá, klesá, neroste).

Důsledek 93. Buď f spojitá a nechť existuje $\lim_{x\to a} f'(x) = A$. Pak existuje $f'(a)$ a rovná se A. ($f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$) Totéž s jednostrannými limitami i derivacemi.

Důsledek 94 (l'Hospitalovo pravidlo). Buď $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Pak existuje $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna A jestli

1. buďto $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$, nebo
2. $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$

Podobně pro jednostranné limity.

Věta 95. *Pro $n \geq 1$ nechť existuje $f^{(n)}(c)$, $g^{(n)}(c)$ a $0 = f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = g(c) = g'(c) = \cdots = g^{(n-1)}(c)$. Pak existuje*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$$

má-li tento podíl smysl.

Věta 96 (Darbouxova vlastnost derivace spojité funkce)**.** *Buď $-\infty < a < b < \infty$, f Buď spojitá na $\langle a, b\rangle$ a měj tam všude derivaci (v krajních bodech měj příslušné jednostranné derivace). Je-li d mezi $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$, pak existuje $c \in \langle a, b\rangle$, že $f'(c) = d$.*

Kapitola 7

Mnohočleny

Tvrzení 97. *Buď P mnohočlen stupně n a $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pak*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Definice 98. Existuje-li $f^{(n)}(a)$ pro nějaké $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, pak mnohočlen

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

nazveme Taylorovým mnohočlenem stupně n (funkce f se středem v a).

Rozdílu $R_{n+1,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x)$ se říká zbytek (funkce po $T_{n,f,a}(x)$).

Věta 99 (Taylorova)**.** *Buďte $a, x \in \mathbb{R}$, $a \neq x$, n celé, $n \geq 0$. Reálná funkce f měj $n+1$. na otevřeném intervalu I^0 a spojitou derivaci na uzavřeném intervalu I s krajními body a a x. Buď φ spojitá reálná funkce na I, která má na I^0 všude nenulovou derivaci.*

Pak

$$c \in I^0, \text{ že } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c)} \tag{7.1}$$

Volba $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ dává

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \tag{7.2}$$

(tzv. Lagrangeův tvar zbytku).

Volba $\varphi(t) = t$ dává

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a) \tag{7.3}$$

(tzv. Cauchyův tvar zbytku).

Příklad 99. Máme najít sínus 1 s přesností 10^{-6}.

Najdeme hodnotu $T_{n,\sin,0}(1)$ funkce $\sin x$, s takovým n, aby $|R_{n+1,\sin,0}(1)| < 10^{-6}$. Je $T(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^{(k)} 0}{k!} x^k$. Použijeme-li Lagrangeova tvaru zbytku, je $R_{n+1}(x) = \frac{\sin^{(n+1)} c}{(n+1)!} (x-0)^{n+1}$ a tak $|R_{n+1}(1)| = \frac{|\sin^{(n+1)} c|}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}$ a hledejme tedy n, aby $\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$.

To je už pro $n+1 = 10$, tj. $n = 9$. Spočítáme tedy ($\sin^{(2k)} 0 = 0$, $\sin^{(2k+1)} 0 = (-1)^k$)

$$T_{9,\sin,0}(0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}$$

Definice 100. Funkce f a g buďte dány na $P(a)$. Budeme psát $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ jestli $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Obdobně jednostranné případy.

Poznámka 101.
1. $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$, pak $\alpha f_1 + \beta f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$ (α, β konst.)
2. $f_1(x) = o(g_1(x))$, $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \to a$, pak $f_1 \cdot f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, $x \to a$
3. $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ a $h(x)$ buď omezená na $P(a)$, pak $f(x)\,h(x) = o(g(x))$, $x \to a$
4. $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = o(h(x))$, $x \to a$, pak $f(x) = o(h(x))$, $x \to a$

Věta 101 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť existuje $f^{(n)}(a)$, pak $R_{n+1,f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.*

Lemma 102. *Nechť existuje $f^{(n)}(a)$. Pak je*

$$f(x) = o((x-1)^n) \Leftrightarrow f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$$

Důsledek 103. Nechť existuje $f^{(n)}(a)$ a P buď takový mnohočlen stupně n, že $f(x) - P(x) = o((x-a)^n), x \to a$. Pak $P(x) = T_{n,f,a}(x)$.

(Existuje-li tedy $f^{(n)}(a)$, pak pro mnohočlen P stupně n je $f(x) - P(x) = o((x-a)^n), x \to a$ právě když $P(x) = T_{n,f,a}(x)$).

Kapitola 8

Ohýbání

Tvrzení 104. *Buď f funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Následující podmínky jsou rovnocenné:*

1. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$ $\quad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
2. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ $\quad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
3. $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ $\quad \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$
4. $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2}$ $\quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$
5. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$ $\quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Definice 105. Má-li f na I některou z vlastností 1 až 5 z tvrzení 104 (a tedy všechny), nazveme ji konvexní na I. Platí-li s ostrou (opačnou, ostrou opačnou) nerovností, nazveme ji ryze konvexní (konkávní, ryze konkávní) na I.

Věta 106. *Buď f na I konvexní. Pak*

1. *má jednostranné derivace v každém $x \in I$, v němž má smysl, tj. $\exists f'_-(x)$ ($f'_+(x)$) v každém $x \in I$, který není levý (pravý) krajní. Přitom je $f'_-(x)$ ($f'_+(x)$) konečná v každém x, který není levým (pravým) krajním v I; je tedy f v každém takovém x spojitá zleva (zprava) a tak je spojitá v každém $x \in I$, jenž není krajním.*
2. *Pro $a, b \in I$, $a < b$ je $f'_+(a) \leq f'_-(b)$.*
3. *Funkce $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$ na I neklesá, takže existuje-li f' na intervalu $J \subset I$ tak f' neklesá na J.*
4. *$f'_-(a) \leq f'_+(b)$ $\forall x \in I$ který není krajní. Množina $D = \{x \in I | f'(x)$ neexistuje$\}$ je spočetná.*
5. *Tato tvrzení platí pro konkávní funkce na I, v B, C, D se jen obrátí nerovnosti a slova neklesá nahradíme slovy neroste.*

Věta 107. *Buď f na intervalu I konvexní, $a, b \in I$, $a < b$ a nechť b není pravý krajní. Je-li $f(a) \leq f(b)$, pak f neklesá na intervalu $J = \langle b, \infty) \cap I$.*

Důsledek 108. Konvexní f na (a, b) $(a < b \leq \infty)$ buď klesá, nebo existuje $c \in (a, b)$, že na (c, b) neklesá. V obou případech existuje $\lim_{x \to b-} f(x)$ a ta není $-\infty$ je-li $b < \infty$.

Věta 109. *Konvexní f na I může mít ostré lokální maximum nejvýše v případných krajních bodech. Ryze konvexní funkce na I může mít lokální maximum nejvýše tamtéž.*

Věta 110. *Konvexní funkce f má na I nejvýše jedno ostré lokální minimum. Má-li je, je minimem globálním.*

Věta 111. *Je-li f konvexní na $I \subset \mathbb{R}$ a $f'(x) = 0$ (pro krajní body se opět míní příslušná jednostranná derivace), nabývá $f(c)$ své nejmenší hodnoty na I.*

Pro konkávní f platí totéž, jen tentokrát je $f(c) = \max_{x \in I} f(x)$.

Věta 112. *Buď f funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pro vlastnosti*

A $f''(x) > 0$ (≥ 0, < 0, ≤ 0) na I,

B f' na I roste (neklesá, klesá, neroste),

C f je na I ryze konvexní (konvexní, ryze konkávní, konkávní)

platí $A \Rightarrow B \Rightarrow C$.

Definice 113.

A. Bod $a \in \mathbb{R}$ nazveme inflexním bodem funkce f, jestli

(a) f je spojitá,

(b) existuje $f'(a)$ a je-li konečná, pak

$$\exists \delta > 0, \text{ že } f(x) \leq f'(a)\,(x-a) + f(a) \quad (\geq) \quad \forall a - \delta < x < a, \text{ a}$$
$$\exists \delta > 0, \text{ že } f(x) \geq f'(a)\,(x-a) + f(a) \quad (\leq) \quad \forall a < x < a + \delta$$

tj. f je na $(a-\delta, a)$ pod (nad) a na $(a, a+\delta)$ nad (pod) tečnou grafu f v $[a, f(a)]$.

B. Bod $a \in \mathbb{R}$ nazveme silně inflexním bodem funkce f, jestli

(a) f je v a spojitá,

(b) existuje $f'(a)$,

(c) existuje $\delta > 0$, že je f konkávní (konvexní) na $(a-\delta, a)$ a konvexní (konkávní) na $(a, a+\delta)$

Věta 114. *Každý silně inflexní bod funkce f je taky inflexní.*

Věta 115. *Je-li $f''(a) \neq 0$, není a pro f inflexní.*

Důsledek 116. Je-li $a \in \mathbb{R}$ pro f inflexní a existuje $f''(a)$, je $f''(a) = 0$. Inflexní body funkce f mohou být jen tam, kde je 2. derivace nulová, nebo kde není.

Kapitola 9

Průběh funkce

Věta 117. *Nechť existuje $f'(x)$ na $P(a)$, $f'(a) = 0$.*

1. *Jestli f' mění znaménko, tj. $\exists \delta > 0$, že $f' \leq 0$ (≥ 0) na $(a-\delta, a)$ a $f' \geq 0$ (≤ 0) na $(a, a+\delta)$, má f v a extrém a sice lokální minimum (maximum). Při ostrých nerovnostech je příslušný extrém ostrý.*
2. *Jestli má f stejné znaménko na obou stranách bodu a, tj. $f' > 0$ (< 0) na $(a-\delta, a)$ i $(a, a+\delta)$, f v a roste (klesá) a tak f v a extrém nemá.*

Věta 118. *Je-li $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$, má f v a ostrý extrém a sice min. (max.) je-li $f''(a) > 0$ (< 0).*

Věta 119. *Pro $n \geq 1$, $1 \leq k < n$ buď $f^{(k)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ (tj. $f^{(n)}(a) \neq 0$ a pro $n > 1$ buď $f^{(k)}(a) = 0$ $\forall 1 \leq k < n$). Pak*

1. *pro sudé n a $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0) má f v a ostré lokální minimum (maximum),*
2. *pro liché n v a nemá extrém; při $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0) f v a roste (klesá)*

Věta 120. *Pro $1 < k < n$ buď $f^{(k)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Je-li n liché (sudé), má (nemá) f v a inflexní bod.*

Věta 121. *Je-li $f'(a) = 0$, $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) na okolí bodu a, je v a lokální minimum (maximum).*

Definice 120. Buď f dána na intervalu (a, ∞) $((-\infty, b))$. Přímku $y = kx + q$ nazveme její pravou (levou) asymptotou, nebo taky asymptotou u ∞ (u $-\infty$) jestli $\lim_{x\to\infty} |f(x) - kx + q| = 0$ ($\lim_{x\to-\infty} |f(x) - kx + q| = 0$.

Někdy se za asymptotu považuje ještě přímka $x = a$, je-li f dána na nějakém $(a-\delta, a)$ nebo $(a, a+\delta)$ a $f(a-) = \pm\infty$, nebo $f(a+) = \pm\infty$.

Věta 120. *f má pravou asymptotu právě když platí: exstuje konečná limita $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a označíme ji k, existuje konečná $\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.*

Je-li podmínka splněna a označíme-li druhou z limit q, je $y = kx + q$ pravou asymptotou. (Má tedy f nejvýš jednu pravou asymptotu.)

Existuje-li $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, pak existuje i $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a rovná se jí, takže je-li konečná, je $k = \lim_{x\to\infty} f'(x)$.

Stejné tvrzení (s limitami u $-\infty$) platí pro levou asymptotu.

Věta 121. *Buď g derivací spojité funkce na intervalu I. Je-li monotónní, tak je spojitá.*

Příklad 121 (Průběh funkce). Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme po následujících bodech:

1. Určíme definiční obor,

2. skládá-li se D_f z více intervalů, spočteme příslušné jednostranné limity u každého z jejich krajních bodů, který nepatří do D_f, včetně případných limit v nevlastních bodech $\pm\infty$,
3. f': najdeme stacionární body, intervaly monotónie (podle věty 92) a body, kde f nemá derivaci; zjistíme, kde jsou extrémy a jaké
4. f'': najdeme body, které mohou být inflexní a intervaly konkávnosti a konvexnosti (věta 112)
5. najdeme případné asymptoty
6. nakreslíme graf

Máme-li zkoumat celkové extrémy spojité funkce na $\langle a, b\rangle$, stačí srovnat její hodnoty ve všech případných stacionárních bodech, v bodech, kde případně nemá derivaci a v bodech a a b. Kde je hodnota největší (nejmenší), je globální maximum (minimum) funkce f na $\langle a, b\rangle$.[1]

[1] kdybyste znal někdo správné očíslování vět 117-121, napište na icq 310109616. díky

Kapitola 10

Řady

Definice 122. Součtem členů posloupnosti a_n se rozumí limita $\lim_{n\to\infty} s_n$, kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ je takzvaný n-tý částečný součet členů posloupnosti. Pokud tato limita existuje. Označíme-li ji v takovém případě s, píšeme $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$; místo součet ($n$. částečný součet) členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zvykem říkat součet (n. částečný součet) řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li konečný, říkáme, že řada konverguje, jinak diverguje; zde ještě rozeznáváme divergence k ∞ ($-\infty$) jestli $s = \infty$ ($-\infty$) a jestli $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, říká se, že řada nemá součet, nebo že osciluje.

Věta 123 (Nutná podmínka konvergence)**.** *Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $a_n \to 0$.*

Věta 124 (Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence řad)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N},\ \text{že}\ |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon\ \forall m, n \geq k$$

kterážto podmínka je rovnocenná podmínce

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N},\ \text{že}\ |a_{k+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon\ \forall n \geq k$$

Příklad 125. Harmonická řada ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) konverguje k nekonečnu.

Věta 126 (Srovnávací příznak (kritérium) pro řady s nezápornými členy)**.** *Nechť pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existuje $l \in \mathbb{N}$, že $0 \leq a_n \leq b_n\ \forall n \geq l$. Pak konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (či naopak, diverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$).*

Důsledek 127 (tzv. odmocninový či Cauchyův příznak).

A Nechť pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy $\exists k \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q\ \forall n \geq k$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Jestli $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (k ∞).

B (limitní podoba) Jestli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ (> 1), řada konverguje (diverguje).

Věta 128 (tzv. podílový srovnávací příznak konvergence řad s kladnými členy)**.** *Nechť pro* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *existuje* $l \in \mathbb{N}$*, že* $a_n, b_n > 0$ *a* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall n \geq l$*. Pak jestli* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, tak i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(a naopak, jestli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje, tak i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*).*

Důsledek 129 (tzv. d'Alembertův podílový příznak)*.*

A Nechť pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy je $k \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ $\forall n \geq k$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje; jestli je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\forall n \geq k$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

B (limitní tvar) Jestli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (> 1), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

Věta 130 (Kummerův příznak)**.** *Pro posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *nechť je* $l \in \mathbb{N}$*, že* $a_n > 0$*,* $c_n > 0$ $\forall n \geq l$*. Položíme*

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \qquad \text{pro } n \geq l \tag{10.1}$$

A Jestli existuje $k \in \mathbb{N}$*,* $\delta > 0$*, že* $K_n \geq \delta$ $\forall n \geq k$*, tak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

B Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ *diverguje a existuje* $k \in \mathbb{N}$*, že* $K_n \leq 0$ $\forall n \geq k$*, tak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Limitní tvar: Jestli $K = \lim_{n\to\infty} K_n > 0$ (< 0)*, tak řada konverguje (diverguje).*

Důsledek 131*.*

1. Položíme ve větě 130 $c_n = 1$, dostáváme podílový příznak z věty 129.
2. Položíme-li $c_n = n$, dostáváme tzv. Raabeho příznak:

   A Existuje-li $k \in \mathbb{N}$, $q > 1$, že $n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right) \geq q$ $\forall n \geq k$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

   Je-li $n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right) \leq 1$ $\forall n \geq l$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

   B (limitní tvar) Jestli $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right) > 1$ (< 1), řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).
3. Položíme-li $c_n = n \ln n$, dostáváme tzv. Bertrandův příznak:

   $$\text{jestli } \lim_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] > 1 \ (< 1), \text{ řada konverguje (diverguje).}$$

Věta 132 (Gaussův příznak)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *měj kladné členy a nechť existuje* $k \in \mathbb{N}$*, že* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$ $\forall n \geq k, \lambda, \mu > 0$ *a* $\{\theta_n\}$ *je omezená* $(\theta_n \leq L$ $\forall n \geq l)$*.*

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje je-li* $\lambda > 1$*, nebo* $\lambda = 1$ *a* $\mu > 1$*. Diverguje při* $\lambda < 1$ *nebo* $\lambda = 1$ *a* $\mu \leq 1$*.*

Věta 133 (sdružování členů řady)**.** *Buď* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *rostoucí posloupností přirozených čísel. Pro posloupnosti částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *položme* $b_k = s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ $(= a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k})$*.*

A Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, *tak i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$.

B Jestli je $a_n \geq 0$ (≤ 0) *od nějakého* $l \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ *právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$.

Věta 134 (tzv. kondenzanční příznak konvergence)**.** *Nechť existuje* $l \in \mathbb{N}$, *že* $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \geq l$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Příklad 135. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverguje.

Řady s nestejnými znaménky

Věta 136 (Leibnitzův příznak)**.** *Buď* $0 \leq b_{n+1} \leq b_n \ \forall n$ *od nějakého* $l \in \mathbb{N}$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ *konverguje právě tehdy když* $b_n \to 0$.

Definice 137. Variací posloupnosti $\{a_n\}$ se rozumí číslo $\operatorname{var}\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$. Je-li konečná, říkáme, že posloupnost má konečnou variaci.

Tvrzení 138.

A Monotónní a omezená posloupnost má konečnou variaci.

B Má-li $\{a_n\}$ *konečnou variaci, je omezená.*

Lemma 139 (Abelova parciální sumace)**.** *Pro* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $(n > 1)$ *buď* $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$. *Pak je*

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &= a_1 \cdot b_1 + (s_2 - s_1)\, b_2 + (s_3 - s_2)\, b_3 + \cdots + (s_n - s_{n-1})\, b_n = \\ &= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \end{aligned}$$

Věta 140 (Abel-Dirichletův příznak konvergence)**.** *Posloupnost* $\{b_n\}$ *měj konečnou variaci (třeba buď monotónní a omezená),* $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje jestli*

A Buďto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (Abellův příznak), nebo*

B $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezenou posloupnost částečných součtů a* $b_n \to 0$ *(Dirichletův příznak).*

Věta 141. *Jestli* $\sum |a_n|$ *konverguje (tj.* $\sum a_n$ *konverguje tzv. absolutně) a* $\{b_n\}$ *je omezená, tak* $\sum a_n b_n$ *konverguje.*

Věta 142. *Buď* $\sum a_n$ *řada s nezápornými a* $\sum b_n$ *s kladnými členy. Pak*

1. *Jestli* $l = 0$ *a* $\sum b_n$ *konverguje, pak* $\sum a_n$ *konverguje, právě když* $\sum b_n$ *konverguje*
2. *Jestli* $l = 0$ *a* $\sum b_n$ *konverguje, tak i* $\sum a_n$ *konverguje (a tedy jestli* $\sum a_n$ *diverguje, tak i* $\sum b_n$*)*
3. *Jestli* $l = \infty$ *a* $\sum b_n$ *diverguje, tak i* $\sum a_n$ *(a tedy jestli* $\sum a_n$ *konverguje, tak i* $\sum b_n$*)*

Absolutní konvergence

Definice 143. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme absolutně konvergentní jestli konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta 144. *Absolutně konvergentní řada konverguje.*

Příklad 145. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje, ale ne absolutně.

Definice 146. Řadu $\sum a_n$ nazveme neabsolutně konvergentní, pokud konverguje, ale ne absolutně.

Poznámka 147. $\{a_{k(n)}\}$ ($\{a_{z(n)}\}$) buď vybraná posloupnost nezáporných (záporných) členů posloupnosti $\{a_n\}$. Pak nastává jediný z těchto případů:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)}$ konverguje – pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)} = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)}$ konverguje – pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)} = -\infty$ – pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)} = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{z(n)} = -\infty$

Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, nastává čtvrtá možnost.

Definice 148. Buď p prosté zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pak řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ vznikne z řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přerovnáním.

Věta 149. *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konverguje, $s \in \mathbb{R}^*$. Pak je přerovnání p množiny $\mathbb{N}$, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s$.*

Věta 150. *Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ z ní vzniklá přerovnáním také absolutně konverguje a ke stejnému součtu.*

Důsledek 151. Řada konverguje ke stejnému součtu při každém přerovnání právě když absolutně konverguje.

Definice 152. Buď a zobrazení spočetné množiny S do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), buď $s : \mathbb{N} \to S$ prosté zobrazení $\mathbb{N}$ na S (takže $s(1), s(2), \ldots$ je uspořádání S do posloupnosti).

Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ absolutně konverguje, tak (absolutně) konverguje pro každé takové s k témuž součtu σ, jenž nazveme součtem zobecněné řady $\sum_{s\in S} a(s)$ (a píšeme $\sigma = \sum_{s\in S} a(s)$).

Věta 153. *Buď $\sum_{s\in S} a(s)$ absolutně konvergentní zobrazení řady se součtem σ, $\mathcal{F}$ buď spočetná a disjunktní soustava podmnožin S (tj. $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$) taková, že $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \langle F | F \in \mathcal{F} \rangle = S$. Pak*

1. *$\forall F \in \mathcal{F}$ zobecněná řada $\sum_{s\in F} a(s)$ absolutně konverguje*
2. *označíme-li $\sigma_F = \sum_{s\in F} a(s)$, pak zobecněná řada $\sum_{F\in\mathcal{F}} \sigma_F$ absolutně konverguje*
3. *$\sum_{F\in\mathcal{F}} \sigma_F = \sigma$*

Násobení řad

Věta 154. *Buďte* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = t$ *absolutně konvergentní. Pak „dvojná“ řada* $\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j$ *absolutně konverguje k st.*

Definice 155. Cauchyovým součinem řad se rozumí řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_k$, kde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Jestli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ konvergují a alespoň jedna absolutně, tak Cauchyův součin řad konverguje k *st*.

Přání 156. *Přeji všechno nejlepší u zkoušek.*