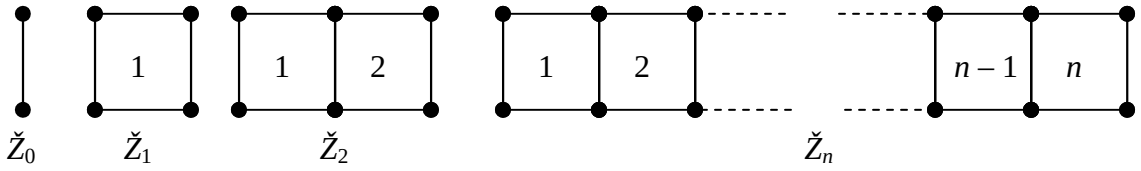
Třetí domácí úloha do Kombinatoriky a grafů I

Jan Pelc, skupina 42

Zadání:

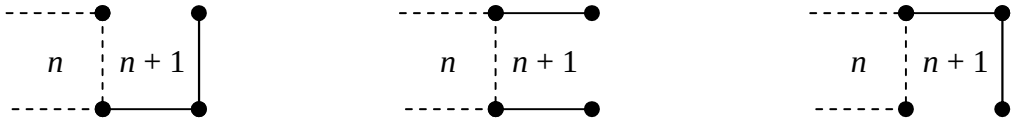
Spočítejte počet koster „žebříkového“ grafu $Ž_n$, $n \geq 0$, který vznikne poskládáním n kružnic C_4 „za sebe“ způsobem naznačeným na obrázcích:



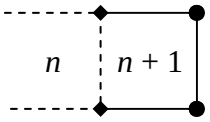
Řešení:

Označme počet koster grafu $Ž_n$ jako K_n. Systematickým ručním počítáním lze zjistit, že $K_0 = 1$, $K_1 = 4$, $K_2 = 15$, $K_3 = 56$, $K_4 = 209$ a $K_5 = 780$. Jak ale vypočítat K_n pro obecné n?

Pro libovolné $n \geq 0$ mějme nějakou kostru grafu $Ž_n$. Lze ji nějak rozšířit na kostru grafu $Ž_{n+1}$? Ano, dokonce třemi způsoby:

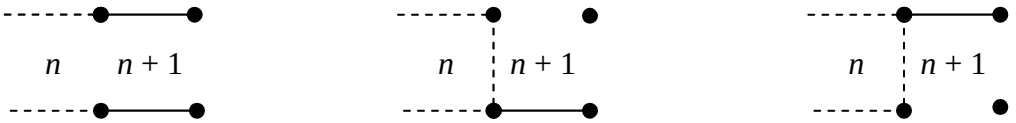


Určitě ale existuje i kostra grafu $Ž_{n+1}$, která obsahuje všechny tři nové hrany grafu $Ž_{n+1}$ vzhledem ke grafu $Ž_n$. Taková kostra ale jistě nevznikne prodloužením kostry grafu $Ž_n$, protože by se vytvořil cyklus. Jak tedy musí vypadat podgraf grafu $Ž_n$ na všech vrcholech, aby spojením jeho dvou koncových vrcholů cestou P_3 vznikla kostra grafu $Ž_{n+1}$ znázorněná na obrázku (kosočtverec označuje vrcholy nazývané jako „koncové“)?



Zřejmě musí jít o podgraf kostry grafu $Ž_n$ vzniklý odebráním jediné hrany tak, že se oba koncové vrcholy ocitnou v různých komponentách souvislosti. Nazveme tento útvar „skorokostra“ a jejich počet v grafu $Ž_n$ označíme S_n.

Jak vznikne skorokostra grafu $Ž_{n+1}$? Skorokostru grafu $Ž_n$ na ni lze „prodloužit“ jediným způsobem (musíme přidat dvě hrany a koncové vrcholy nesmí být ve stejné komponentě, viz první obrázek). Kostru grafu $Ž_n$ lze prodloužit na skorokostru grafu $Ž_{n+1}$ dvěma způsoby (musíme přidat jedinou hranu, viz druhý a třetí obrázek).



Navíc jedinou skorokostru grafu $Ž_0$ tvoří dva izolované vrcholy a tedy $S_0 = 1$.

Pro posloupnosti $\{K_n\}$ a $\{S_n\}$ tedy dostáváme „vzájemně rekurentní“ vztahy:

$K_0 = 1, \qquad K_{n+1} = 3K_n + S_n$
$S_0 = 1, \qquad S_{n+1} = 2K_n + S_n$

Dosazením vzorce pro S_n do vzorce pro K_n dostaneme:

$K_{n+1} = K_n + 2K_n + 2K_{n-1} + 2K_{n-2} + \ldots + 2K_1 + 2K_0 + 1$
$K_{n+1} = 1 + 2(K_0 + K_1 + \ldots + K_n) + K_n$

Tento vzorec se dá také vyjádřit jako skalární součin $(n + 1)$-složkových vektorů:

$K_{n+1} = (3, 2, 2, \ldots, 2, 3) \cdot (K_0, K_1, \ldots, K_n)$

Což je poněkud netypický druh rekurentního vzorce, protože nemá pevný řád (závisí na všech předchozích členech).

Hotovo.