Tady sem dal do kupy otazky z predchozich let. Je to vice mene kompletni. Rozdelene na teoreticke a prakticke. U teorie jsou odkazy na vety-co od vas tak asi bude cekat. u praktickych su navrhnuta reseni. Snad pomuze.
Ucebni zdroje:
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~korbelar ... lgebra.pdf <- vyborne cviko
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zemlicka/
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zemlicka ... algi07.pdf <-presne zneni definic, obcas i s dukazem a pak hlavne priklady
viewtopic.php?f=159&t=3953 <- prepis letosnich prednasek
+mff.fear.cz forum.matfyz.info

TEORIE
(
9. Algebra, Podalgebry a Homomorfismy. Definicie, pak se zameril na (1.3)
10. Vlastnosti homomorfismu (slouceni, inverz, a obraz a vzor podalgeber) tedy poznamky 1.2 a 1.3 s dukazem
11. vztahy mezi kongruencemi a homomorfizmy na algebrach(1.6) (jadro homorfizmu je kongurence (1.6))
17. Kongruence, faktoralgebry, prirozena projekce, jadro zobrazeni. Pridokazat - faktoralgebra je algebra (neboli dokazat korektnost definice operace alfa na A/ro), a pak prirozena projekce je homomorfismus(1.7). kongruence, faktoralgebry (definice.7); jßdro homomorfismu a p˚irozenß projekce (jakř je mezi nimi vztah 1.5 dokazat).
2. Monoid, jak vypadaji vsechny invertibilni prvky (1.11 1.12), konstrukce grupy. JednoznaŕnOst inverzniho prvku(1.9). (neutralni prvky e,f z G(*), e=e*f=f)

12. uzaverove systemy, uzver, operator, 2 vety s dukazy ktere mluvi o jejich zakladnim vztahu. Vztah uplnych svazu a uzaverovych systemu (2.2, 4.4)

23. napsani a dokazani vety o homomorfismu (3.5) a 1. a 2. vety o isomorfismu (3.6 a 3.7). napsani a dokazani vety o homomorfismu (3.5) a 1. a 2. vety o isomorfismu (3.6 a 3.7). U vety o homomorfismu se staci odvolat na vetu 1.6.
24. Vztah jadra a obrazu zobrazeni (veta o homomorfismu, 1. veta o isomorfismu)(3.4, 3.5)
25. 2. výta o izomorfismu + d¨kaz (3.6)
26. Faktor kongruencia na algebre + neviem co, ale zmyslom bolo napisat 2. vetu o izomorfizme. Napisal som definiciu relacie sigma/ro na A/ro, znenie pozn 3.1, pozn 3.2 a dokazal som 2. vetu o izomorfizme

14. Svaz ako usporiadanie mnoziny a algebra(poznamky 4.1, 4.2 - dukaz) Usporiadanie sa da nahradit spojenim a prusekom a naopak. Teda Poznamku 4.1 a potom aj lahsiu cast Poznamky 4.2. Nemusel som dokazat tu cast Poznamky 4.2, ze m v n sa rovna presne infimu a spojenie supremu.
15. Opacny svaz(S(A,V) svaz, pak taky S(V,A) je svaz, s dukazem 4.5). Modularita svazu(definice a poznamka tesne predtim s "polomodularitou" (4.6) s dukazem) a priklady modularnich svazu (tri vrcholy nad sebou spojene hranami)
13. Svazy, monotonni zobr(4.7), isomorfismus svazu. Dukaz vetu o isomorfismu svazu. Definici uspo˚ßdßnÝ, infima, suprema, monotonie, homomorfismu a izomorfie. PotŰ výty 4.6 a 4.7 Ľ vety dokazat
16. Výta o bijekci na svazech, ×e je izomorfismus prßvý kdy× je momot˘nnÝ z obou stran (4.7).
18. Svazy kongruencÝ grupy a normßlnÝch podgrup. Mýl jsem to definovat a dokßzat izomorfizmu (4.9, 4.8)
27. Vztah medzi jej normalnymi podgrupami a svazom vsetkych kongruencii? Ide o to sialene tvrdenie 4.8 z ktoreho vyplyva potom 4.9 (ze tie normalne podgrupy a kongruencie su izomorfne)
22. Gailosova korespondence-definice a veta. U vety mi na zacatku rekl, ze je to jedna z tech co si clovek nemusi drzet v hlave tak kdyz nebudu vedet - klidne mi ji rekne. Hlavni je dukaz. V nem jsem dal jen ty trivialni

1. Lagrangeova veta (5.3)-dukaz, poznamka 5.2 ľdukaz. Grupa definice. resp. souvislost velikosti podgrupy a grupy, coz je uplna pohodka, a pak mi dal samozrejme dokazat veci z poznamky 5.2.
19. Cyklicke grupy a jejich popis. K teorii jsem napsal definici, dokazal veticku, ze cyklicka grupa je isomorfni se Z resp. Zn pro kardinalitu grupy nekonecnou resp. konecnou(5.8). Co jsem tam zapomnel napsat bylo v te konecne variante ze zobrazeni psi dane predpisem k |-> k mod n je homomorfismus, abych mohl pouzit vetu o isomorfismu. On me upozornil, pak jsme to nejak dali dohromady a dobry. A jeste jsem dokazal asi poznamku g^|G|=1 pro grupu G a geG.(5.8)
20. Cyklicke grupy, jejich charakterizace. Vlastnosti podgrup a faktoru. chcel co je to cyklicka grupa, ze kazda (ne)konecna je izomorfna Z(n) (a ako) (5.8), potom vety, ze podgrupa aj faktorgrupa je tiez cyklicka...
21. Vztah cyklickych grup, jejich podgrup a faktorgrup = Dokazte 5.9 a 5.7"
28. Eulerova funkce + jeji vztah ke grupam a monoidum. K teorii jsem musel napsat zneni vety f(nm)=f(n)*f(m), pro nesoudelna a pak to s tim p^r. K obojimu chtel dukaz. K tomu vztahu ke grupam a monoidum chtel vety o tom, ze f(n) je pocet prvku, ktery generujou grupu Z_n(+,-,0) a taky pocet invertibilnich v Z_n(*,1). (5.13, 5.15, 5.16.)
29. Eulerova funkce, mala fermatova veta. Definice, dukaz (5.14)
30. Podilove teleso oboru integrity: Q(Z)=Q, Q(R[x]) jsou racionßlnÝ funkce, Q(Z[i])=Q[i], Q(Z[V5])=Q[V5]
31. Cinska veta o zbytcich (5.15) + soucin algeber.

3. Chtýl definice okruhu a ideßlu, výtu o vztahu kongruencÝ a ideßl¨ (6.2), ty dvý tvrzenÝ o vztahu mezi okruhy a týlesy (6.4), (6.5).
4. Okruhy, ideßly, vztah kongruencÝ a ideßl¨ na okruhu Vztah kongruenci okruhu a idealu (dokazat vety 6.2 a 4.8)
5. Vztah kongruenci a idealu na okruzich (6.2)
6. Okruhy, idealy, hlavni idealy + dukaz ze jsou idealy, vztah mezi telesy a pravymi(levymi) idealy s dukazem (6.3).
7. Okruhy a ideßly, HlavnÝ ideßly, Popis týlesa pomocÝ ideßl¨. R je týleso <=> mß pouze nevlastnÝ pravÚ ideßly <=> mß pouze nevlastnÝ levÚ ideßly.(6.3) - (a.b)=a.(-b) dukaz: a.(-b)=a.(-1).b=(-1).a.b=-(a.b)
8. KomutativnÝ okruh a maaximßlnÝ ideßl (napsat definice + formulovat a dokßzat výtu 6.5 -> mohl jsem se v d¨kazu odvolßvat na nýjakÚ p°edchozÝ výty)

PRAKTICKE

1.Homomorfizmy, grupy...

Inverzni prvky v takove grupe jsou vsechna cisla, co jsou nesoudelna s radem grupy (NSD(cislo, rad grupy) = 1)
1. Jak vypada mnozina vsech invertibilnich prvku mnoziny vsech linearnich zobrazeni V->V. O: Je to grupa permutaci
2. Dokßzat uzav°enost na operace a normalitu grupy In(G) v Aut(G), bylo to vÝce rozepsßno...
9. Mame-li f: G -> G, f(h)= ghg-1 (to g-1 je inverzni prvek k g), g z G. Je to homomorfismus? Jaky je ker f, pokud nasobeni je komutativni?

36. G(*,-1,1) je grupa, Z(G)={g z G| h*g=g*h pro vsechna h z H}, dokazat, ze je Z(G) normalni podgrupa a jak by vypadalo Z(G) kdyby * byla komutativni(vsechno se dokazalo snadnym poprehazovanim pismenek, neni tam zadny chytak)

****
2.Uzaverove vlastnosti

24. Je dan monoid slov M({x,y})(*,e) a vztah (x*y,e). To definuje minimalni kongruenci eta. Jak vypada M/eta? Vezmes nejmensi ekvivalenci obs. vztah (xy,e). To je zrejme ekvivalencni trida [e] = { xy, e } a same singletony (tridy kde kazde 1 slovo je samo). A ted musis udelat uzaver vzhledem k operaci *. Takze vyjde spousta ekvivalencnich trid, nejak takhle:
[e] = { e, (xy)^i }
[x] = { x, (xy)^i x, x(xy)^i }
[y] = { y, (xy)^i y, y(xy)^i }
[xx] = { xx(xy)^i, x(xy)^i x, (xy)^i xx }
- na kazdou pozici v rade xxxx... muzes dat (xy)^i a bude to ve stejny tride
- pro radek yyy... uplne stejne
[yx] = { yx(xy)^i, y(xy)^i x, (xy)^i yx }
stejne mas pro yyyyyy.... xxxxx..., ale uz ne xxxxx... yyyy...., to je ekvivalentni e.
****
3.Isomorfizmus

30. Dokazat nebo vyvratit izomorfismus monoidu Z(+,0) a Z(*,1) Druhy jsem nejak vyvratil pres invertibilni prvky

33. grupa (o,-1,Id) izomorfism¨ tvaru G -> G , kde G je standartnÝ grupa (x,-1,1), a ty izomorfismy ve tvaru f(h)=gxhx(g(na minus prvou)), kde g je z G, ×e ta celß grupa izomorfism¨ je normßlnÝ podgrupou vÜech izomorfism¨ z G do G (Aut(G)(o,-1,Id)). Mýl jsem jen dokßzat, ×e je to podgrupa (uzav°enot na operace) a ×e je normßlnÝ
34. Existuje isomorfismus mezi N0(+,0) a N(*,1)? Pokud ano najdete ho... Neexistuje - v N0(+,0) totiz neexistuje (nekonecne velka) analogie prvocisel, tedy je zde jen konecne mnoho cisel nezapsatelnych jako soucet dvou (nenulovych) prvku (konkretne jen jednicka)... Nakonec se to uhraje pres vlastnosti homomorfismu jakozto slucitelneho zobrazeni (f(a+b)=f(a)*f(b)) a bijekce jakozto zobrazeni prosteho a na
35. monoidy N0(+,0) a N(.,1), existuje medzi nimi izomorfizmus? Izomorfne nie su, ale nic rozumne ako to dokazat ma nenapadlo, tak Zemlicka mi poradil nech to skusim cez prvocisla, tie nemaju v monoide N0 analogiu No v N(*,1) prvocisla proste mas ... ale v N_0(+,0) nic jim podobneho ... nic co by se nedalo rozlozit na soucet vice prvku jinak nez jako (0+p)
****
4.Svazy

4. Napsat vsechny atomy a koatomy svazu podgrup grupy Z 30. Tzn. rozlozit 30 na prvocisla, nahazet vsechny podgrupy do Hasseova diagramu,

10. Mam N a usporadani "deli", je to svaz? mam Z a to same usporadani, je to svaz? Je tento svaz modularni? [btw: opravdu v zadani bylo jednotne cislo... buhvi jestli nahodou nebo jako nenapadna napoveda]
takze, N(/) ano, inf{a,b} = NSD(a,b), sup{a,b} = nsn(a,b)
Z(/) ne, protoze / neni na Z usporadani
a/b <=> existuje c: ac=b
usporadani - reflexivni, tranzitivni, a/b & b/a => a=b
-1/1, -1*-1=1
1/-1, 1*-1=-1
ale 1 != -1, takze Z(/) nemuze byt svaz pac to neni usporadana mnozina
---
modularni, tzn
a<=c [tohle jsem tam nedal, vymyslel protipriklad a on mi taktne naznacil ze to tam neni a nedelal s tim problemy]
tzn dokazat a v (b^c) = (a v b) ^c
ja to umlatil pres prvocinitele (^ je totiz NSD, v nsn viz vyse)
tzn:
a=p1^k1 * p2^k2 * ... * pn^kn

b=p1^l1 * p2^l2 * ... * pn^ln
c=p1^m1 * p2^m2 * ... * pn^mn
uvedomime si (lol, miluju tu hlasku), ze nsn(a,b) =
p1^max{k1,l1}*..*pn^max{kn,ln}
NSD obdobne s minimem
takze ve vysledku:
a v (b^c) = (a v b) ^c
nsn(a,NSD(b,c)) ?= NSD(nsn(a,b),c)
--- (potud bylo ^ prusek, odtud je to mocneni) ----
kdyz preskocim par kroku pak pro kazde prvocislo plati:
pi^max{ki,min{li,mi}} ?=pi^min{max{ki,li},mi}
a vim ze ki <= mi. (a deli c)
mno a zbyva nekam zaradit b:
ki <= mi <= li: pi^mi =pi^mi ano
ki <= li <= mi: pi^li =pi^li ano
li <= ki <= mi: pi^ki =pi^ki ano
takze vskutku rovnost plati... [uvedomme si, ze jsme netrivialni ulohu modularity svazu N(/) prevedli na trivialni modularitu na N(<=) ktera je trivialni... kdyz mi tohle zemlicka rekl, modlil jsem se aby nezeptal, co jsem si dale uvedomil, pac samostatne sjem si uvedomoval jenom ze jsem v KA]

13. svaz vsech podgrup Z(+,-,0) a najit vsechny koatomy a atomy. Atomy nema a koatomy jsou pZ - p prvnocisla Ten svaz by mel vypadat tak, ze nahore je to cele Z, a pod nim jsou vsechny podgrupy pZ, kde p je prvocislo => vsechny pZ jsou koatomy. Atomy tento svaz NEMA, protoze je nekonecny... v dalsich urovnich svazu se dostavame svazy jako p*qZ ..., kde p a q jsou opet prvoŕÝsla Poznßmku 5.7 Chtel jeste dokazat, ze to co rikam je pravda, tzn. obe se dokazalo sporem a bylo.

19. Zjistit, jestli N (prirozena cisla) nebo Z tvori s relaci | ("deli") svaz. Pokud ano, tak zjistit, jestli je modularni. V praxi se muselo dokazat, ze relace je usporadani a potom ze pro kazdy dva a,b prvky je infimum = NSD(a,b) a sup = nsn(a,b). Pro N to svaz byl, pro Z stacilo najit ze -1|1, 1|-1 a pritom 1 se nerovna -1 (relace neni antisymetricka). Modularita: k overeni bylo treba se nejak vyporadat s tim, ze tam vychazelo pro n<=c musi nsn(a,NSD(b,c)) = NSD(nsn(a,b),c). Trik byl v tom si cisla zapsat jako prvociselnej rozklad
a = p_1^a_1 * ... * p_n^a_n
b = p_1^b_1 * ... * p_n^b_n
c = p_1^c_1 * ... * p_n^c_n
(nektery exponenty prvocisel mohly bejt 0, jako ze v rozkladu to prvocislo neni).

22. atomy a koatomy svazu vsetkych kongruencii na Z100 (Z500) (klasika x mod 100). To je izomorfni podle nejaky vety svazu norm. podgrup a pak je to taky snadne (4.10)

32. Haseuv diagram vsech kongruenci na telesech Q, R

26. Popsat svaz vsech kongruenci S3(o,-1,Id). To mi dalo celkem zabrat, muselo se to posledni vetou svazu prevest na ulohu hledani podgrup a pak to slo
27. Praktickß: PopiÜte svaz vÜech kongruencÝ v grupý S3(o,-1,Id)... Podle jednÚ výty (4.9.???) staŕÝ popsat svaz vÜech normßlnÝch podgrup grupy S3(o,-1,Id)... tak×e jsem si nakreslit prvky danÚ grupy (je jich 6), naÜel jsem si vÜechny mo×nÚ podgrupy (je jich myslÝm taky 6), pak zjistil, kterÚ z nich jsou normßlnÝ (3) a nakreslil svaz, kterř tvo°Ý... Zapomnýl jsem p°itom na jednu normßlnÝ podgrupu, a to 6-tiprvkovou (tj celß grupa je normßlnÝ podgrupou)
28. Jak vypada svaz vsech kongruenci na S3 (grupa permutaci triprvkove mnoziny). Reseni - Podle vety o isomorfismu svazu je isomorfni svazu vsech normalnich podgrup. Jedine normalni podgrupy jsou: A3 (sude permutace) a trivialni (tedy S3 a Id). V Hasseove diagramu S3 -> A3 -> Id. Chtel dukaz, ze jsem zadnou normalni

(podle L. vety musi mit podgrupa rad 6,3,2 nebo 1 - tak se proberou vsechny takove podgrupy)
29. Nakrestli svaz vÜe kongruencÝ na S3. TÚ× se to tu u× nýkde °eÜilo. P°evede se to pomocÝ výty 4.9 na svaz vÜech normßlných podgrup, do nich pat°Ýt kromý celÚ grupy S3 a prßzdnÚ podgrupy pouze podrupa {ID,(123),(132)}
38. je (Q,<=(klasicke na racionalnych cislach)) svaz? Ak je, tak ci je modularny a ci je uplny.

****
5.Grupy

5. Kolko prvkov ma mnozina vsech invertibilnych prvku monoidu grupy Z50(.,1)(Z50 = mod 50). zasade to nebolo fakt nic tazke, staci si zobrat eulerovu fnkciu do nej postupne nasypat vsetky hodnoty a je to, avsak ma upozornil ze prave kvoil takymto pripadom chcel dat Z500 tam by sa to proste riesilo obdobne, ja som to tiez takto robil, ze si nadjete co deli 500(2,5) no a tie prvky vyahdzete a vyhadzete aj sude a je to zostane mnozina invertibilnych prvku, dufam ze som to nepoplietol, inac vysledok mal byt 20 prvkova mnozina {1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49}. Tu som este potomm al dokazat ci dane riesenie je fakt uplne a ci plati pre nejaky obecny pripad

6. poŕet invertibilných prvk¨ Z500. (mýla se pou×Ýt Eulerova funkce a jejÝ vlastnosti: fi(mn) = fi(m)fi(n) pro n, m nesoudýlnÚ a fi(p^r) = (p-1)p^(r-1) pro p prvoŕÝslo; tedy "poŕet invertibilných prvk¨ Z500" = fi(500) = fi(5^3)fi(2^2) = 4 * 5^2 * 1 * 2^1 = 200)

7. Jakß je velikost mno×iny vÜech invertibilných prvk¨ Z990(.,1)? U× to tu bylo nýkolikrßt, pou×ije se Eulerova fce a F(p^k) = p^(k-1) * (p-1) (5.12 - 5.14). F(990) = F(2*3^2*5*11) = (2^0*1) * (3^1*2) * (5^0*4) * (11^0*10) = 1 * 6 * 4 * 10 = 240

23. zvaz vsetkych podgrup cyklickej grupy s 20 prvkami...
Z20
/ \
(0,2,4...18) (0,5,10,15)
| |
(0,4,8,12,16) (0,10)
\ /
0
43. Nakreslete Hasse¨v diagram t°icetiprvkovÚ cyklickÚ grupy
8. kolik generatoru ma Z270 :smyslem bylo napsat definici fce (+ ty dve dalsi doplnujici - tim bylo myslim splneno i to vztah ke grupam a monoidum) + vzorec pro n (jak si to rozlozim na mocniny prvocisel - 5.17) + dukaz toho vzorecku -> takze dokazat 5.16 ... tam jsem se trosicku zamotal v miste, kde se vyuziva 5.15 (Cinska o zbytcich) - respektive ja blbec jsem se mu priznal, ze si v tom, ze Zn.m* je isomorfni s Zn* x Zm* nejsem uplne jisty - i kdyz jsem to tam mel napsane ---> on na to: "Ale vzdyt to tu mate napsane, to je cinska veta o zbytcich... No, tak si teda dokazte, ze tam nejaky isomorfismu je, zkuste tam nejaky najit" ... takze sranda, vlastne jsem (mozna zbytecne) musel delat neco na zpusob
25. Dokazat, ze mnozina vsetkych regularnych matic radu n tvori grupu a pre par vybranych podmnozin urcit ci su to podgrupy. Stacilo vediet z linagebry, ze regularne matice maju vzdy inverz, nasobenie je asociativne a ze det(AB)=det(A)det(B).

48. Kolik prvku radu 20 (tj. takovych, ze generuji podgrupu radu 20) obsahuje cyklicka grupa radu 1000 ? je nutne vyuzit Lagrangeovu vetu k overeni toho, ze CG 1000 vubec obsahuje nejakou podgrupu radu 20, potom se ukaze, ze takova podgrupa je tam jen jedna a protoze podgrupa cyklicke je opet cyklicka, tak pocet jejich generatoru je EF(20) (eulerova funkce). EF(20)=8 a to je vysledek.. Je dobry vedet jak je definovana Eulerova funkce.

****
6.Okruhy

3. Z(+,-,.,0,1) obsahuje jenom ideßly tvaru kZ StaŕÝ si stejný jako v p°edchozÝm p°Ýkladu rozmyslet, ×e ideßly okruhu Zn(+, L,-, 0, 1) prßvý splřvajÝ s podgrupami grupy Zn(+,-, 0). Podle Výty 5.8 prßvý tvaru kZn pro vlastnÝ dýlitele ŕÝsla n nebo k = 0

11. Jak vypadß podÝlovÚ týleso okruhu vÜech realnřch polynom¨ jednÚ neurŕitÚ R[x] (resp. dvou neurŕitřch R[x,y]). Tohle je taky jednoduchř, jak se nad tÝm zamyslÝte. Jß tam furt hledal nýjakř chytßky a na tom zkejsl sakra dlouho. F/~ je týleso izomorfnÝ týlesu Q = {p/q; p je polynom, q je nenulovř polynom}. To po mný taky chtýl dokßzat a nakonec na boj o jedniŕku jsem mu dokßzal, ×e ~ je ekvivalence. Mezi racionßlnÝmi ŕÝsly a F/~ nýjakß bijekce bude. Co× o to Ale nenajdeÜ tam ×ßdnej izomorfismus. Jß jen chtýl naznaŕit, ×e s racionßlnÝmi ŕÝsly se tam v¨bec neoperuje a vysvýtlit nedorozumýnÝ, ke kterÚmu doÜlo pravdýpodobný, kdy× jsem si týleso lomenřch polynom¨ oznaŕil jako Q. Jinak ta bijekce m¨×e vypadat jakkoliv se ti zlÝbÝ, jß pou×il "nejintuitivnýjÜÝ" f: p/q -> [(p,q)]~
12. Jak vypadß podÝlovÚ týleso okruhu vÜech realnřch polynom¨ jednÚ neurŕitÚ R[x] (resp. dvou neurŕitřch R[x,y]). To je gASK-ova otazka z lonska z z fearu a je tam i plus minus vysvetlena ... R[x] je obor integrity takze muzu definovat algebru F, ekvivalenci ~ a F/~ jako podilove teleso a dostanu to co potrebuju -- plyne to z vet 6.9 a 6.10 v tom syllabu

14. Popsat svaz vsech kongruenci okruhu komplexnich cisel C(+,.,-,0,1). Pouzilo se, ze kongruence a idealy na okruhu si vzajemne odpovidaji (6.2). Ale protoze jsem nevedela, jak najit vsechny idealy, Zemlicka mi poradil, ze mam nejak vyuzit, ze C je teleso. Teleso obsahuje pouze 2 idealy(6.4), v nasem pripade C a Id, takze svaz kongruenci je tvoren kongruencemi CxC a Id.
21. Popiste svaz kongruenci na okruzich realnych cisel R(+,*,-,0,1) a racionalnich cisel Q(+,*,-,0,1). Staci si uvedomit, ze kazda kongruence na okruhu je izomorfni nejakemu idealu, a protoze realna i racionalni cisla jsou telesa, maji jenom dva idealy, ktere odpovidaji Id a RxR (QxQ). Pak chtel k tomu jeste napsat vety, z kterych to plyne, bez dukazu
18. Popsat vsechny kongruence na okruhu Z(+,.,-,0,1). Napsal jsem jen, ze podle vety 6.2 je izomorfni svazu vsech idealu a podle X.X ma Z idealy prave tvaru kZ pro k nezaporne cele cislo.Pak jsem nakreslil jak ten svaz idealu vypada.
31. Kongruence na okruhu Z(+,*,-,0,1). Trosku jsem se s tim zamotal, tak po me chtel dukaz 5.7 a to jsem nezvlad
41. Nakreslit svaz vÜech kongruencÝ na okruhu Z27(+,*,-,0,1)

15. Dana mnozina R= {a/b, a,b zo Z, NSD(b,7) = 1 }. Popisat svaz vsetkych idealov R. (riesenie: R ma okrem trivialnych idealov aj vlastne idealy a tie maju tvar 7^k.R) Popisat svaz vsetkych kongruencii na R.
16. Kongruence na z Z, takze treba (6.2) (aspon myslim) a vzpomenout si na idealy nad Z
17. Podle Výty 6.2 z p°ßdnßÜky nßm staŕÝ najÝt izomorfnÝ svaz vÜech ideßl¨. Podle zjiÜtýnÝ p°edchoyÝ ¨lohy se jednß prßvý o Hasse¨v diagram svazu vÜech podgrup grupy Z42(+,-, 0). OznaŕÝme-li opýt nřk kongruenci odpovÝdajÝcÝ ideßlu kZ42, tj. kongruenci pro ni× platÝ, ×e (a, b) ? nřk ? k/a - b, dostßvßme obvyklřm zp¨sobem nř 1->2, 1->3, 1->7, nř 2+nř7->nř14, nř2+nř3->nř6, nř3+nř7->nř21, nř6+nř14+nř21->id
20. Jsou nektere z okruhu Z(+,.,-,0,1), Q(+,.,-,0,1) a R(+,.,-,0,1) izomorfni? stacilo sa opriet o to, ze v Z nie su inverzne prvky oproti Q a R a v Q zas odmocniny oproti R, nejak to formalne zapisat a bolo.
39. Popsat maximalni idealy okruhu Z(+, -, ., 0, 1)
40. ja jsem dostal v patek teoretickou otazku "Podilove teleso oboru integrity". Chtel ho sestrojit a dokazat, ze splnuje zakladni podminky. Neco mu stacilo popsat slovne, neco si vyzadal pisemne (treba dokazat, ze pouzita relace ~ je

kongruence, ze vznikle F/~ ma korektne definovane operace, a na zaver, ze je + asociativni).
42. najdete nejmensi kladny prvek idealu 245.Z320 a cislo x takove, ze x.245=5 //proste zpetny chod eukleidova alg;)
44. Dokazte ze P(X)(symetrickaDiference, prunik,Identita, prazdnaMnozina, celaMnozinaX) tvori okruh. P(X) je potencna mnozina, X je minimalne dvojprvkova. Najdete netrivialni Ideal na R a k nemu odpovidajici kongruenci
45. Mejme prvocislo p a mnozinu R={a/b: a,b cela cisla, NSD(b,p)=1}. Dokazte, ze R je podokruh racionalnich cisel
46. Najdi nejmensi prvek k idealu 248Z320 , pak najdi x, x.248=k v Z320
47. rozhodnut. ci je Z4(+,-,0) izomorfne Z8*(. , -1, 1). nie su izomorfne, pretoze Z4 je cyklicka zatialco Z8* nie je (pre kazdy prvok a \in Z8* : <a> = {1, a} ... to si clovek moze vsimnut napr pri samotnom hladani prvkov Z8*)

37. najst inverzny prvok k 26 v monoide Z157(.,1) (pomocou Eu.alg. 151)

49. Popiste vsechny kongruence na okruhu celych cisel Z(+,*,-,0,1)
Pouzit vetu 6.2. Nez jsem se do toho pustil, tak mi stihl behem zadavani rict, ze mam pouzit vetu, ktera dava do vztahu kongruence a idelay okruhu. Dokonce mi rekl, ze je to ta posledni veta z toho, co se zatim probralo. Dale mi k tomu rekl, ze idealem Z je podgrupa Z a at si uvedomim, co jsou podgrupy Z. Po tomto to bylo zase na jeden radek.Stacilo napsat zneni vety, kterou jsem si nepamatoval. Nastesti je to analogie s 1.13, tak jsem zkusil:
? je kongruence na Z ? [0]? je ideal Z a (a,b)? ? ?[def.] b-a ? [0]?.
Kdyz mi navic rekl, ze ideal je podgrupa (podgrupy Z jsou normalni) tak je to v podstate 1.13 (trefa!)
Reseni ulohy je: kZ jsou vsechny podgrupy Z => kZ jsou vsechny idealy Z => kongruence ? na Z jsou prave: (a,b)? ? ? b-a ? kZ neboli k|(b-a)
50. existuje nejaky izomorfizmus mezi libovolnymi dvema nasledujicimi okruhy - Z(+,-,Î,1,0) ; R(+,-,Î,1,0) ; C(+,-,Î,1,0). mezi Z a cimkoli se dal pouzit argument |Z| < |R| resp.|C| (stacilo rict, netreba diagonalizovat ci jinak dokazovat mohutnost |R|). Btw da se na to jit i vylozene pres homomorfizmy, a sice ze 1 musi jit na 1, 0 na 0 => vsechny zbyle prvky Z uz nutne musi jit na sve "ekvivalenty" v R resp. C ... proto to rozhodne neni zobrazeni na (epimorfizmus). Mezi R a C si staci vsimnout, ze v C je prvek a, pro ktery plati, ze aÎa je opacny prvek k 1 (ktera musi jit na 1, protoze homomorfizmus), ale takovy prvek v R fakt nenÝ

****