

ZKOUŠKA MAI059 dne 22. ledna 2009

Jméno a příjmení (vyplňte čitelně hůlkovým písmem) :

Zodpovězte následující otázky a veškerá Vaše rozhodnutí řádně zdůvodněte, popř. dokažte !!!

Příklad 1. [2+2+2=6 bodů]

Nechť $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou náhodné jevy na téže pravděpodobnostním prostoru.

- (1) Kdy jsou tyto jevy sdruženě nezávislé?
- (2) Kdy jsou tyto jevy neslučitelné?
- (3) Kdy jsou tyto jevy nezávislé po dvou?

Příklad 2. [2+2+2=6 bodů]

Tři lovci vystřelili současně na divokého kance, který byl jednou střelou zastřelen. Určete pravděpodobnost toho, že kance zastřelil první, druhý, respektive třetí střelec, jsou-li pravděpodobnosti zásahu jednotlivými střelci po řadě rovny 0.2, 0.4 a 0.6.

Příklad 3. [2+2+3+5+6=18 bodů]

Typický pražský zaměstnanec dojíždí do práce každý pracovní den v době, kdy interval mezi jednotlivými vlaky je pět minut (podle jízdního řádu) – stejný jako v době jeho návratu (taktéž metrem) domů. Jsou-li v uvažovaných denních dobách (tj. ráno a odpoledne) všechny okamžiky zaměstnancova vstupu na nástupiště stejně možné, je jeho *doba čekání na vlak* náhodnou veličinou X . Určete:

- (1) Jaké rozdělení má náhodná veličina X .
- (2) Střední hodnotu náhodné veličiny X .
- (3) Rozptyl náhodné veličiny X .
- (4) Přibližnou pravděpodobnost toho, že během druhého čtvrtletí (60 pracovních dnů) stráví při cestách do práce a zpět čekáním na vlak méně než 160 minut.
- (5) Strávil-li onen cestující během druhého čtvrtletí čekáním na peróně 200 minut, otestujte na hladině $\alpha = 0.05$, zda lze zpochybnit pětiminutový interval mezi jednotlivými vlaky udaný v jízdním řádu.

Nápověda: Zkonstruujte nulovu a alternativní hypotézu a odpovídající interval spolehlivosti nebo kritický obor.

Příklad 4. [3+3=6 bodů]

Opilec má svazek sedmi (v daném stavu nerozeznatelných) klíčů (visí mu na šňůře připevněny k pasu, takže je neztratí) a zkouší si odemknout dveře od bytu. Po každém neúspěšném pokusu mu klíče vypadnou z ruky, takže neví, které již zkoušel. Určete:

- Jaká je pravděpodobnost, že úspěšnému pokusu předcházelo nejvýše 6 neúspěšných.
- Jaká je pravděpodobnost, že neodemkne dříve než po 10 neúspěšných pokusech (počítáno od začátku), má-li za sebou již 6 neúspěšných pokusů.

Příklad 5. [3+3+3=9 bodů]

Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

- (1) Jaké rozdělení má $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$?
- (2) Jak vypadá nestraný odhad μ ? Je tento odhad konzistentní?
- (3) Jak odhadneme rozptyl σ^2 ?