0. Zdroje

[1] http://prf.osu.cz/doktorske_studium/dokumenty/Random_Processes.pdf
[2] http://tuetschek.wz.cz/schule/pm.pdf
[3] http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=201&t=8350
- všechny věty zde jsou z tohodle materialu (nebo ho doplňují)

[4] Doporučený materiál: osvědčený Tuetschek + poznámky ze cvičení ve Studnici.

Obecné info k zk

- skutecne nechce vzorce (stacilo rict jak bych to pocital), ale chce vedet proc to co delate vubec delate a take si u vseho dobre rozmyslete proc to muzete udelat - to jsou veci, po kterych jde a ze kterych pozna ze to umite
- Rozhodně si projděte příklady, dbá na ně IMHO více než na teorii.
- Učební doba: 4 půldny (včetně dne se zkouškou) na trojku.
- Cas uceni: 4 dny, den intenzivne, propoctene priklady ze souhrnu + vedet podstatu. A 4 hodiny uceni na zkousce:)
  - Souhrn: Myslim priklady na modely zrodu zaniku, priklad na ONLINE metodu, priklady na markovovy retezce (tahani kulicek - to je u stacionarity), rovnez rekurzivni jevy (nahodne prochazky sem a tam). To jsem mel na mysli temi priklady..urcite na ne narazis...a co se tyce zkousky, snad vzdy da priklad a k nemu povykladas i teorii.

1. Úvod

2. Vytvořující funkce

Teorie

- náhodná veličina X
  - **Rozptyl** varX = $E[(X - EX)^2] = EX^2 - (EX)^2 = \sigma^2$
  - spojitou X charakterizuje:
    - **Hustota** f(x), $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$
    - **Distribuční fce** $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
    - **Střední hodnota** $EX = \int_{\mathbb{R}} x\,f(x)\,dx$
    - **Rozptyl** $varX = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx - (EX)^2$
  - nezáporné X jednoznačně charakterizuje:
    - intenzita poruch $\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$, x > 0
      - □ hustota dělená fcí spolehlivosti: R(x) = P(X > x) = 1 − F(x)
  - celočíselné X jednoznačně charakterizuje:
    - **Vytvořující funkce** $\mathcal{P}(x) = \sum p_j x^j$ posloupnosti $p_j = P(X = j)$, j=0,1,… , $\sum p_j = 1$
      - $\mathcal{P}(x)$ je vytvoř. fce ⇔ $\mathcal{P}(x) = \sum p_j x^j$ a konverguje v okolí nuly
      - **V2.1(☠):** $q_j = P(X > j) \Rightarrow \mathcal{Q}(x) = \frac{1-(x)}{1-x}$
      - **V2.2(☠):** $EX = \mathcal{P}'(1) = \mathcal{Q}(1)$
      - **V2.3:** $var\,X = \mathcal{P}''(1) + \mathcal{P}'(1) - (\mathcal{P}'(1))^2 = 2\mathcal{Q}'(1) + \mathcal{Q}(1) - (\mathcal{Q}(1))^2$
        - pro poloměr konvergence > 1
        - **Pozn.(☠):** $p_j = \mathcal{P}^{(j)}(0) / j!$
      - **Konvoluce** $\{ c_j \} = \{ b_j \} * \{ a_j \}$ kde $c_n = a_0 b_n + \dots + a_n b_0$
      - **Součet náh.vel.** $S_N = X_1 + \dots + X_N$
      - **Věta** (o úplné psti)

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\cup_i H_i)) = \sum_i P(A \cap H_i) = \sum_i P(A|H_i)P(H_i)$$

- **V2.6:** Součet $\sum_{i=1}^{n} X_i$ pro X_i i.i.d. s vytvořující funkcí $\mathcal{P}(x)$ má rozdělení dané n-tou konvoluční mocninou $\{p_j\}^{n*}$ s vytvořující funkcí $\mathcal{P}^n(x)$.
  - i.d.d. = independent and identically distributed - nezávislé stejně rozdělené (náhodné veličiny)
- **V2.7(☠):** $\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x))$ a $ES_N = EX_1 \cdot EN$
  - i.d.d. $X_1,...,X_N$ má rozdělení $\{a_j\}$ a to má vytv. fci $\mathcal{A}(x)$
  - i.d.d. N má rozdělení $\{b_j\}$ a to má vytv. fci $\mathcal{B}(x)$
  - $S_N = X_1,...,X_N$ má rozdělení $\{c_j\}$ a to má vytv. fci $\mathcal{C}(x)$
    - a platí $c_j = P(S_N = j) = \sum_n b_n \{a_j\}^{n*}$

Rozdělení

- **alternativní** Alt(p) - P(X=1)=p, P(X=0)=1-p , EX=p , var X=p(1-p) , $\mathcal{P}(x) = q + px$
- **binomické** Bi(n,p) - $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$, EX= np , var X = np(1-p) , $\mathcal{P}(x) = (q + px)^n$
  - n nezávislých alternativních pokusů; X nabývá 0,1,...,n
- **rovnoměrné** R($x_1,...,x_n$) - $P(X=x_i) = 1/n$, $EX = 1/n \sum x_i$, $\mathcal{P}(x) = x(1-x^n)/(n(1-x))$
  - X nabývá $x_1,...,x_n$
- **geometrické** Ge(p) - $P(X=n)=(1-p)^{n-1}p$, $\mathcal{P}(x) = p / (1-qx)$
  - pravděpodobnost prvního úspěchu právě v pokusu n
- **Poissonovo** Po(λ) $P(X=k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, EX = var X = λ , $\mathcal{P}(x) = \exp(-\lambda(1-x))$
  - X nabývá 0,1,2,...
  - Jsou-li $X \sim Po(\lambda_1)$, $Y \sim Po(\lambda_2)$ nezávislé, potom $X+Y \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$

Příklady

Vajíčka (aneb hroznýš, krajta, žáby, slepička, atd...) (☠)

Zadání: Nechť počet snesených vajíček *N* se řídí Poissonovým rozdělením *Po(λ)* tedy $N \sim Po(\lambda)$. Pravděpodobnost narození jedince z vajíčka nechť je *p*, tj. X_i se řídí alternativním rozdělením.

Tedy: $X_i \sim Alt(p)\{^{0\ nenarodí\ se}_{1\ narodí\ se}$

Ukažte, že pak náhodný součet náh. veličin S_N se řídí Poissonovým rozdělením *Po(λp)*. Tedy $S_N \sim Po(\lambda p)$..

Další varianty zadání ze Zk:

- dostal jsem "hroznýše". Poměrně triviální otázka, avšak musíte umět vzorečky pro binomické rozdělení a větu o úplné pravděpodobnosti. Byl jsem na tom dosti bídně, ale Antoch pomáhal a obojí jsme nakonec sestavili.
- Šlo o součet N diskrétních náhodných veličin $X_1, X_2, ..., X_N$ - jaké to má rozdělení a jak se to liší když N není konstanta, ale diskrétní náhodná veličina. Stačilo to jednoduché odvození (vizte krajtu a její vajíčka) pro obecná rozdělení - vyjde, že vytvořující funkce výsledku je rovna složení vytvořujících funkcí N a X_i. Pak se ještě ptal na nějaké drobnosti okolo vytvořujících funkcí - proč a jak je používáme, k čemu jsou dobré, atd. Sice jsem v tom důkazu měl drobnou chybu, ale společně jsme to doladili

Řešení 1 (přes větu o úplné psti):

Podle věty o úplné pravděpodobnosti:

$$P(S_N = k) = P(S_N = k \cap N = i) = \sum_i P(S_N = k \mid N = i)\, P(N = i)$$

z $N \sim Po(\lambda)$ platí (jde o navzájem se vylučující se jevy 0,1,2,3,...):

$$P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Podmíněná pravděpodobnost - mám $X_1+X_2+...+X_i$

$\binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k}$ - Bi(i,p)

$$\{S_N = k \mid N = i\} \Leftrightarrow \{S_i = k\}$$

Tedy platí:

$$P(S_N = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = k)\, P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\, p^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n!} (1-p)^{n-k} \lambda^n =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\, p^k\, \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda\, p)^k}{k!}$$

=> S_N má zase Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda\, p$

Poznámka: $ES_N = \lambda\, p$ - odpovídá tomu, že očekáváme že vajíček bude λ a každého se s pravděp. p narodí jedinec

Řešení 2 (přes vytvořující fukce a větu 2.7):

$P(N = k) = e^{-\lambda}\, \lambda^k / k!$

Vytvárajúca funkcia náh. veličiny *N* je $\mathcal{B}(x) = e^{-\lambda(1-x)}$.

Vytvárajúca funkcia X_i je $\mathcal{A}(x) = q + px$. (□ 1-q = p)

Použitím **V2.7** dostávame vytvárajúcu postupnosť S_N : $\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) = e^{-\lambda(1-(q+px))} = e^{-\lambda p(1-x)}$ čo je vytvárajúca funkcia Poisonovho rozdelenia s parametrom λp

2.1 Větvící se proces

Teorie (doplněno z [1], může pomoct)

- **Větvící se proces** - náhodný proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, takový, že náhodná veličina X_n udává počet částic v n-té generaci, n=0,1, ...
  - $P(X_n = j) = p_j$ a $\mathcal{P}(x) = \sum p_j x^j$
  - Na počátku existuje k (k > 0) částic, které reprezentují tzv. nultou generaci,
  - každá částice n-té generace (n ≥ 0) je schopna s pravděpodobností p_j , j ≥ 1, vytvořit právě j nových částic (svých bezprostředních potomků), jež jsou součástí bezprostředně následující **generace** s pořadovým číslem, n+1,
  - částice se chovají vzájemně nezávisle.
- **V2.8**(Vytvořující fce větvícího se procesu)
  - $\mathcal{P}_{n+1}(x) = \mathcal{P}(\mathcal{P}_n(x)) = \mathcal{P}_n(\mathcal{P}(x))$
- **V2.9**(charakteristiky větvícího se procesu)
  - $EX_n = (EX_1)^n$
    - příp. $EX_n = k(EX_1)^n$ kde k je počet jedinců v 0-té generaci
  - $$varX_n = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \left(\frac{1-\mu^n}{1-\mu}\right), & \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \mu = 1, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$
    - $\mu = EX_1$
    - $\sigma^2 = varX_1$ - rozptyl počtu potomků jedné částice
- **V2.10**(pst extinkce větvícího se procesu)
  - x_n je pst extinkce větvícího se procesu - tzn. že se zastaví dříve než dosáhne n-té generace
  - $EX_1 > 1 \Rightarrow \xi < 1$ pst vymření po nějakém počtu generací
    - kde ξ je limita posloupnosti $\{x_n\}$
    - příp. $\xi^k < 1$ kde k je počet jedinců v 0-té generaci
  - $EX_1 \leq 1 \Rightarrow \xi = 1$ (zanikne s jistotou)

Příklady

Větvící se proces - aneb jak se mohou šířit viry

Model. Uvažujme jedince, kteří mohou dát vznik novým jedincům téhož druhu s pravděpodobnostmi

$$P(U = j) = p_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

a vytvořující funkci $P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$.
Na začátku (nultá generace) existuje jeden jedinec. Nechť bezprostřední potomci n-té generace tvoří $(n+1)$-ní generaci a jedinci jednají nezávisle na sobě.

Problémy.

- Najděte rozdělení prvků v n-té generaci.
- Spočtěte limitní (tj. pro $n \to \infty$) pravděpodobnost jevu, že populace vymře.

Model. Nechť $X_0 = 1$, $X_1 (\equiv U)$ se řídí rozdělením (1) s vytvořující funkcí $P_1(x) \equiv P(x)$. Nechť X_n popisuje počet jedinců n-té generace.

Potom počet potomků každého z X_1 jedinců první generace je n.v. s rozdělením (1), jsou vzájemně nezávislé a nezávislé na X_1, tj.

$$X_2 = U_1 + \ldots + U_{X_1}$$

Podobně X_3 jsou potomci druhého řádu jedinců první generace, tj. X_1 n.v. s rozdělením jako X_2, resp. potomky X_2 náhodných veličin s rozdělením jako X_1, tj. (1) atd.

Šíření virů

Příklad (Šíření virů). V první generaci je $X^{(0)} = 1$ jedinec, ten má $X^{(1)} = X$ potomků s rozdělením daným vytvořující funkcí $A(x)$. Ve druhé generaci je $X^{(2)} = X_1 + X_2 + \ldots + X_X = X^2$ jedinců $\to$ vytvořující funkce $A(A(x))$. Střední hodnotu vypočteme z věty 2.2, přičemž využijeme $A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$ (a_i je pravděpodobnostní rozdělení).

$$EX^{(i)} = \underbrace{[A(\ldots(A(x))\ldots)]'_{x=1}}_{i} = A'(\underbrace{A(\ldots A(x))}_{i-1})A'(\underbrace{A(\ldots A(x))}_{i-2})\cdots A'(x)_{|x=1}$$
$$= A'(1)A'(1)\cdots A'(1) = (EX)^i$$

Rozmnožování bakterií

(Antoch to sice pojmenoval nějak jinak, jedná se ale o to).

Vánočka

Zadání: vánočka (co se deje, kdyz kyne testo na vanocku)
Další varianty zadání ze Zk:

- Rozmnožování bakterií (Antoch to sice pojmenoval nějak jinak, jedná se ale o to).

Řešení:

- **Hint:** Zdá se mi, že se jedná o rozmnožování bakterií (máme n jedinců, z nichž každý v časovém úseku h buď chcipne s pravděpodobností mh nebo se rozdělí s pravděpodobností lh). Typická úloha

(pro všechny modely zrodu a zániku): popsat model, najít stacionární rozdělení...

3. Rekurentní jevy

Teorie

Buďte X_1 , X_2 ,… celočíselné náhodné veličiny, buď ξ = [X_{t1} = l_1, … , X_{tn} = l_n] jev.

Buďte X_1 , X_2 ,… celočíselné náhodné veličiny, ξ buď jev. Jev ξ je rekurentní, platí-li toto: To, že jev nastane v čase *n* + *m*, za podmínky, že nastal v čase *n*, závisí pouze na veličinách X_{n+1} , X_{n+2} ,… , X_{n+m} .

Motivace (Rekurentní jevy)**:**
Mějme náh. veličinu, nabývající hodnot *-1,+1* s pravděpodobnostmi *p, 1-p*. V tomhle případě chceme simulovat součet *n* hodnot S_n (např. stav konta po prohrách/výhrách). To nabývá hodnot po celém $\mathbb{Z}$. Chceme zjistit, kdy se dostaneme zpět na *0*, jednotlivé hodnoty jsou závislé - S_n přímo závisí na S_{n-1}.

Definice (Rekurentní jevy)**:**
Mějme náhodný pokus, s postupnými výsledky E_0, E_1, ... (stav konta) dodanými pomocnými pokusy E_{j0}, E_{j1}, ... (např. přičítání +1,-1). Řekneme, že ***jev ξ*** nastal v *n*-tém pokusu (jev ξ je nad E_0, E_1..., tj. např. stav konta se vrátil na *0* po *n*-tém pokusu), pokud nastal na konci posloupnosti E_{j1}, E_{j2} , ...,E_{jn}.

ξ je rekurentním jev, jestliže:

- ξ nastal v *n*-tém a *(n+m)*-tém pokusu ⇔ nastal-li na konci posloupnosti E_{j1}, E_{j2}, ..., E_{jn} a E_{jn+1}, E_{jn+2}, ..., E_{jn+m}.
- V takovém případě platí: P(E_{j1}, … , E_{jn+m}) = P(E_{j1}, …, E_{jn}) . P(E_{jn+1}, … , E_{jn+m})
- □ Neříkám tu nic o závislosti bezprostředně po sobě jdoucích výsledků.

- u_n = P(**ξ** nastal v kroku n) , vytvořující funkce U(x)
- f_n = P(**ξ** nastal v kroku n POPRVÉ), funkce F(x)
  - **V3.1:** $u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \dots + f_n u_0$, $n \geq 1$
    - a pro odpovídající vytvořující funkce:
      U(x) - 1 = F(x)U(x) -1 < x < 1
      - tzn. $F(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)}$
- $f_n^{(r)}$ = P(**ξ** nastal v kroku n PO r-TÉ)
  - **doby návratu** - doba mezi i-1 a i-tým vyskytem, Ti veličiny s tímtéž rozdělením fn
  - **V3.2:** { $f_n^{(r)}$ } = { f_n }^{r*}
    - tj. pro rekurentní jevy spočteme vytv. funkci r-tých návratù jako r-tou mocninu vytv. funkce prvních návratů.
- f^r = P(**ξ** nastal ALESPOŇ r-KRÁT)
  - $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Teoretické (6)

- Rekurentní jevy a jejich klasifikace
  - Docela v pohodě. Popsal jsem základní definice (fn, un, apod.), ukázal jak se získá vytvořující funkce a taky jak se to mapuje na Markovské řetězce, na nichž jsem odvodil tu klasifikaci stavů. Pak jsme se trochu bavili o celé podstatě rek.jevů (proč to vlastně zkoumáme a k čemu celý ten semestrální kurz vlastně byl) a výsledek za 2 a hurá domů.
- rekurentni jevy, opakovani, dva ruzne zpusoby
  - otazka se stocila nakonec trochu jinam
- 2x rekurentní jevy, oba mí "spoluzkoušení" na první pokus věděli málo (jeden měl všechno okolo

exponenciálního rozdělení), tak pak dokonce dostali druhou šanci s Markovovými řetězci.

- vse ohledne rekurentnich jevu
    - Prubeh: Antoch se ptal na vsechny podrobnosti, opet jsem se napalil na to co nas varoval: NESLUCITELNOST(disjuknost) x NEZAVISLOST. Jinak se ptal hodne na slovni vyznam nejakych vzorcu, co to vlastne znamena.
- Dostal jsem 1. vyskyt a obecneji r-ty vyskyt.. (nejakeho jevu)..
    - Nejdriv jsem si pomyslel, ze jsem v pytli (ja to vazne moc neumel a doufal jsem v otazku typu Markovovy retezce - o te bych toho rekl dost).. v kabinetu mi nejdriv pripadalo, ze je tam asi 100 stupnu Celsia, ale jakmile jsem se trochu rozepsal, teplota klesla na klasickych prijemnych 20.. mel jsem pak popsanou asi tak 1 stranu A4 (povidanim o vztahu mezi U(x) a F(x) a ruznyma zmatenyma definicema) a psal jsem zrovna, ze pokud ma jev rozdeleni 0/1, tak pravdepodobnost prvniho vyskytu v n-tem kroku se ridi geometrickym rozdelenim... $(1-p)^n.p$ ... V tom me Antoch prerusil, jestli uz to mam a ja povidam, ze jeste vubec neresim r-te vyskyty... Rikal, ze to je jedno a zacal si cist, co uz mam... Cetl si a sem tam se me na neco zeptal.. byla to komedie, protoze jsem v te nervozite neznal ani veci, ve kterych jsem exceloval uz na gymplu..) profesor Antoch to komentoval slovy... "kolego, vy ale kecate voloviny", za coz se pak zpetne omlouval no dotlacil mne vzdy ke kazde odpovedi na svou otazku... (byly asi tak tri).. a pak mi dal za dva a jeste jsme si tam rekli par slov.. takove prijemne povidani.. u meho indexu koukal, ze tam mam napsano Sumperk a ze jsem se hodne zmenil oproti fotografii) za dvojku jsem rad, samozrejme bych sam sebe vyrazil... jesteze se clovek nemusi obcas hodnotit sam... Kdo na tu zkousku pujdete, mejte prehled o vsech tematech.. ale spis takovy opticky (co kde v sesite bylo).. sem tam znejte nejakou tu definici nebo vzorecek, ale ne zase vsechno... Hodne zdaru!

Příklady

3 líce (aneb čekání na ZZZ) (♉)

Zadání: Nechť qn je pravděpodobnost toho, že v posloupnosti n hodů mincí nepadne ani jednou trojice líců za sebou. Odvoďte vytvořující funkci $Q(x) = \frac{8+4x+2x^2}{8-4x-2x^2-x^3}$.

Řešení:

Označme

- p pravděpodobnost hodu líce (L),
- *ξ* jev, že padnou tři líce za sebou,
- q_n pravděpodobnost, že první trojice líců padne až *po n*-tém kroku,
- f_n pravděpodobnost, že první trojice líců padne právě v *n*-tém kroku,
- u_n pravděpodobnost, že některá trojice líců padne v n-tém kroku; na tento případ se aplikuje zapomínání, tedy v posloupnosti RRLLLL jev *ξ* nastává na pozici 5, ale na pozici 6 už ne.

Posloupnost ...LLL má pravděpodobnost p^3. Pomocí u_n se zapomínáním ji můžeme vyjádřit jako
$u_0 = 1$ (z obecné definice u_n),
$u_1 = u_2 = 0$
u_n = (3 nakonci) − (4 nakonci) − (5 nakonci) pro n>=3
$u_n = p^3 - pu_{n-1} - p^2u_{n-2}$
⇒
$p^3 = u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2}$

(*ξ* může nastat přímo na pozici *n*, nebo na pozici *n-1* a na pozici *n* je L, nebo na pozici *n-2* a na pozicích *n-1* a *n* je L).
$p^3 x^3 = x^3u_3 + x^3pu_2 + x^3p^2u_1$
$p^3 x^4 = x^4u_4 + x^4pu_3 + x^4p^2u_2$

…

sečteme:

$p^3 x^3/(1-x)=u_3 (x^3+x^4 p+x^5 p^2)+u_4(x^4-x^5 p-x^6 p^2)+...=(1+ px+p^2 x^2) \sum_{i=3}^{\infty} u_i x^i$

Nyní si všimneme, že

$$U(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i = 1 + \sum_{i=3}^{\infty} u_i x^i$$

Dosadíme:

$$U(x) = 1 + \frac{p^3 x^3}{(1-x)(1+px+p^2x^2)}$$

Podle vět 2.1($Q(x) = \frac{1-(x)}{1-x}$) a 3.1($F(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)}$) platí

$$Q(x) = \frac{1-F(x)}{1-x} = \frac{1-\frac{U(x)-1}{U(x)}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)U(x)}$$

Dosazením U(x) a p=1/2 dostaneme výsledek:

$$Q(x) = \frac{8+4x+2x^2}{8-4x-2x^2-x^3}$$

Poznámka: $\{f_n\}$ udává rozdělení náhodné veličiny T_1 popisující čekání na první výskyt rekurentního jevu. Je-li $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ < 1 , potom je T_1 nevlastní a *1-f* je pravděpodobnost, že jev nenastal.

Zdroje:

- http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=201&t=8060
- http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=201&t=8350

Zdary

Zadání: cekani na zdar pri hodu minci, nejdrive na 1.zdar a pak modelovat vyskyt r zdaru za sebou
Hint: doporucuji v knize od Fellera kapitolu Recurrent events - Application to the theory of success runs (str.322)
Řešení:

3.1 Klasikace rekurentních jevů (a náhodná procházka)

Teorie

- $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$
  - f = 1 $\Rightarrow$ ξ je **trvalý**
    - je-li f = 1, $\mu = E\,T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n$ je **střední doba návratu**
    - Trvalý jev ξ
      - $\mu = \infty \Rightarrow$ je **nulový**
      - $\mu < \infty \Rightarrow$ je **nenulový**
  - f < 1 $\Rightarrow$ ξ **přechodný**.

        - Pravděpodobnost, že jev ξ nastane v nekonečné posloupnosti pokusů nekonečněkrát je 1 pro trvalý jev a 0 pro přechodný jev.
- Rekurentní jev ξ je **periodický**, pokud $\exists \lambda > 1 \in \mathbb{N}$, t.ž. $u_n = 0$,$\forall n$ co nejsou dělitelná λ
    - Největší takové λ je perioda ξ
- **V3.4(☒):** Rek. jev ξ je **přechodný** $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$
    - a také: f = (u - 1)/u kde $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$
        - pokud f = 1 označme $\mu = ET_1 = \sum_{n=0}^{\infty} nf_n$ jako střední dobu návratu jevu ξ
    - a tedy: Rek. jev ξ je **trvalý** $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$
    - (pravděpodobnosti návratu pro čas jdoucí k nekonečnu jdou k 1, tj. sčítám řadu jedniček).
        -
- **Náhodná procházka**
    - Mějme posloupnost i.i.d. náhodných veličin X_1, X_2, ..., které mají výsledek +1 s pravděpodobností *p* a výsledek -1 s pravděpodobností *1 - p*. Jednoduchá náhodná procházka s pravděpodobností zdaru *p* je potom posloupnost $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, $kde\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
        - i.i.d. - nezávislé stejně rozdělené
        - Obecně je náhodná procházka model pohybu. Lze je zobecnit do více rozměrů (např. úloha opilý námořník na Manhattanu).
- **Rovnice obnovy**
    - Nechť an a bn jsou dvě posloupnosti, a0=0, an ∈ [0,1], bn ≥ 0, ∑{n=0...∞}b_n < ∞.
    - Mějme u_n=b_n+a_0u_n+a_1u_{n-1}+...+a_n u_0, tj.:
        - {u_n} = {b_n} + {a_n} {u_n} (**rovnice obnovy**)
    - Pro vytvořující funkce posloupností platí: U(x)= B(x) / (1 - A(x))
    - Nechť a_n je neperiodická, a = ∑{n=0...∞}a_n, u = ∑{n=0...∞}u_n. Pro a<1 platí u < ∞.
    - Pro a=1 je a_n rozdělení doby návratu trvalého neperiodického rekurentního jevu a
        - lim{n->∞}u_n=∑{n=0...∞} b_n/∑{n=1..∞}na_n
    - **Pozn:** Odpovídá vztahu U(x) a F(x) rekurentních jevů pro B(x)=1

Teoretické (4)

- Ja jsem mela nahodne prochazky. Pro nahodnou prochazku po celych cislech jsem pocitala pravdepodobnost navratu do stavu 0 v n-tem kroku a z toho pak typ tohoto stavu. Ten samy priklad byl na prednasce. Dalsi varianta prochazky je **ruinovani hrace**. U te jsem jen popsala zadani a matici prechodu. Take bylo na prednasce.
- Náhodná procházka s jedním odrážejícím a jedním pohlcujícím stavem.
    - Nakreslil jsem mu tam matici, stavy a psti přechodů. Pak jsem rozebral typy stavů (všechny krom pohlcujícího přechodné, pohlcující trvalý nenulový). Z toho je vidět, že není žádné stacionární rozdělení (vše jednou skončí v pohlcujícím, ale ty co se budou courat tam dorazí až v nekonečnu). Pak se mě ptal co znamená ta matice a jak spočtu, že se dostanu za dva kroky odněkud někam (mocnění matice). Pak mi tam musel s nějakýma detailama pomoct. Nakonec prohlásil, že je vidět, že jsem se na to podíval a dal za jedna.
- nahodne prochazky po grafu
- Já jsem jako otázku dostal náhodné procházky. Popsal jsem snad všechno včetně definic souvisejících pojmů, pár nepřesností jsem si po upozornění prof. Antocha sám opravil. Potom následovalo ještě několik šťouravých otázek (včetně vymýšlení formalizmu pro nekonečné matice se zápornými indexy); podle svého názoru jsem všechno zodpověděl. Nakonec mi bylo řečeno "něco jsem z vás teda dostal, dejte mi index" a za dvě.

- Rovnice obnovy
    - Rovnice obnovy a vztah k MŘ

Příklady

Náhodná procházka po přímce

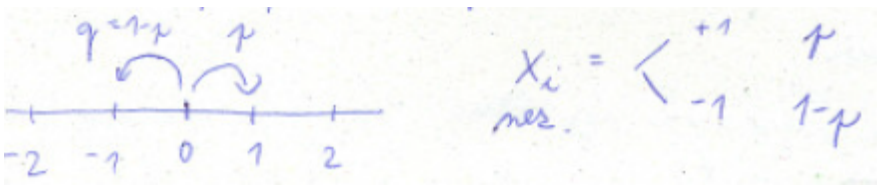
Zadání: Mějme jednoduchou náhodnou procházku s pravděpodobností zdaru *p*.
Návrat do počátku označíme jako jev ξ (vyrovnání úspěchů a neúspěchů).
Ukažte, že ξ je periodický jev trvalý pro *p*=1/2 a přechodný jinak.
Odvoďte vytvořující funkce *U(x)*, *F(x)*.
Varianta zadání: Uvažujme posloupnosti nezávislých pokusů s alternativní odpovědí s pravděpodobností zdaru p. řekneme, že v čase n nastává jev ξ, jestliže počty zdarů a nezdarů v prvních n pokusech jsou si rovny.
Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je pro p = ½ trvalý a pro p ≠ 1/2 přechodný. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a f_n a jejich aproximace.
Ukažte, že platí:

- $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}(pqx^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$
- $F(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$
- $f_{2n-1} = 0$, n = 1, 2, 3, …

  $$f_{2n} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-2}p^n q^n$$

- pro p = ½ je: $u_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$
- Nasimulujte několik realizací této náhodné procházky délky alespoň 10^5 pro různé hodnoty p a nezapomeňte přitom na volbu p = 1/2. Nakreslete si odpovídající grafy a rozmyslete.

Řešení:



$u_{2n+1} = 0$, tedy ξ je periodický

u_{2n} - musím jít n-krát doprava a n-krát doleva

n nezávislých alternativních pokusů => Binomické rozdělení

$u_{2n} = \binom{2n}{n}p^n q^n$

i) $p = 1/2$

$$\sum_i u_i = \sum_n \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \sum_n \frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{2^{2n}}$$

Využijeme aproximaci $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^{2n}}$ (**Stirlingova formule**)

$$\sum_i u_i \approx \sum_n 2^{2n}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{2^{2n}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty$$

Pokud $p = 1/2$, budu se do 0 vracet stále.
Podle věty **3.4** je tedy ξ trvalý jev.

U(x) odvodíme pomocí vytvořující funkce (plyne také ze zobecněné binomické věty):

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (pqx^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-4pqx^2)^n = \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$$

$\binom{2n}{n} = \binom{-1/2}{n}$ umělé kroky

Odtud plyne:

$$F(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)} = 1 - \sqrt{1-4pqx^2} =_{Taylor.řada} \sum_n (-1)^{n-1} \binom{1/2}{n} (4pq)^n x^{2n} = \sum_n f_{2n}$$

je ten konec dobře? nema tam byt \sum f_2n x^2n ?

$$f_{2n} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-2} p^n q^n$$

Střední hodnota doby návratu:

$$\mu = F'(1) = \frac{8pqx}{\sqrt{1-4pqx^2}}\Big|_{x=1,p=q=1/2} = \infty$$

a tedy ξ je nulový.

ii) $p \neq q$

$$f = F(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} < 1$$

f < 1 ⇒ (z definice přechodného jevu) Jev není trvalý.

Poznámky:

$$f_{2n} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-2} p^n q^n \qquad u_{2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Náhodná procházka ve dvou rozměrech (se stejně pravděpodobnými směry)

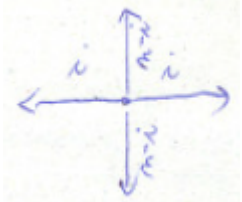
Zadání: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v rovině tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru nebo dolů. Všechny čtyři možnosti jsou stejně pravděpodobné a nezávislé na předchozích krocích. řekneme, že v čase n nastává jev ξ, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice. Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je trvalý. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a jejich aproximace.

Řešení:

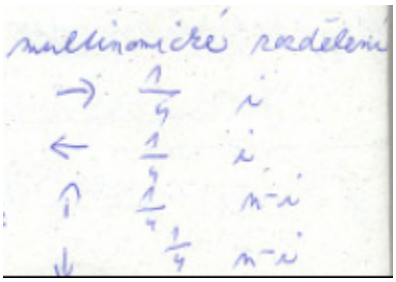
$u_{2n+1} = 0$



počty potřebných kroků v jednotlivých směrech:



- buď 0 kroků vpravo nebo 1 vpravo nebo … n kroků



- navzájem vylučující se jevy => věta o úplné psti:

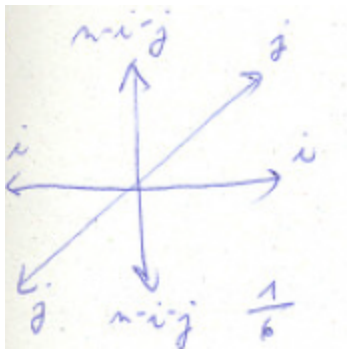
$$u_{2n} = \sum_{i=0}^{n} P(i \rightarrow, j \uparrow, \ldots) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} \frac{1}{4^{2n}} \approx \frac{1}{\pi n} \quad \Rightarrow \quad \sum u_n = \infty$$

Podle věty **3.4** je tedy jev trvalý.

Náhodná procházka ve třech rozměrech

Zadání: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v prostoru tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru, dolů, dopředu nebo dozadu. Všechny tyto možnosti jsou stejně pravděpodobné a nezávislé na předchozích krocích. řekneme, že v čase n nastává jev ξ, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice. Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je přechodný. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a jejich aproximace.
Pomůcka: Vzpomeňte si na multinomické rozdělení.
Řešení:
6 jevů s pstí ⅙



$$u_{2n} = \sum \sum P(i \rightarrow, j \uparrow, \ldots) =$$

$$= \sum_{0 \le i; 0 \le i+j \le n} \sum_{j \le n} \frac{2n!}{(i!j!(n-i-j)!)^2} \frac{1}{6^{2n}} = \ldots \le \sum \frac{k_1}{(\pi n)^{3/2}} < \infty$$

$$u_{2n} \le k n^{-\frac{3}{2}}$$

Jev je přechodný (**V3.4**).

4. Markovovy řetězce

Teorie

Přechod z rekurentních jevů, změna značení: $f_i \rightarrow f_{ii}$, $u_i \rightarrow p_{ii}$.

Markovovy řetězce - posl. pokusů se stejnou nejvýše spočetnou množinou možných výsledků E_1, E_2, ...

- jestliže pro každou konečnou posloupnost výsledků platí:
  - $P(E_{j0}, E_{j1}, ..., E_{jn}) = a_{j0} p_{j0j1} ... p_{jn-1jn}$
    - *počáteční rozdělení* a ≡ $\{a_k\}$ - pravděpodobnosti výsledků 0-tého pokusu
    - *pst přechodu* **P** ≡ $\{p_{jk}\}$ - pst výsledku E_k za podmínky výsl. E_j v předchozím pokusu
- $\sum_j p_{ij} = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$ (někam se přejít musí)

- $p^{(n)}_{jk}$ - pst přechodu ze stavu Ej do Ek po *n* krocích
  - tvoří prvky matice $\mathbf{P}^n$
    - $\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$
  - $p^{(n)}_{ij}$ pst toho, že systém je ve stavu Ej v čase n, začínáme-li v Ei
  - $p^{(n)}_{jj}$ pst toho, že systém je ve stavu Ej v čase n, začínáme-li v Ej
- $a^{(n)}_k$ - nepodmíněná pst jevu, že systém je v čase n ve stavu Ek
- $f^{(n)}_{ij}$ - pst 1. průchodu stavem Ej v čase n, začínáme-li v Ei
  - $f^{(n)}_j$ - pst 1. návratu do Ej v čase n, začínáme-li v Ej
- **V4.3(☒)**: pevně zvolme Ej v MŘ
  - systém na počátku v Ej ⇒ ∀ průchod Ej je **rekurentní jev**
  - systém na počátku v Ei ⇒ ∀ průchod Ej je **rekurentní jev se zpožděním**
    - □ teorie MŘ je vlastně teorie rek.jevů, jen jich studujeme více současně
      - ⇒ pojmy se přenášejí
- **V4.4**: pevně zvolme Ej v MŘ
  - Ej je **přechodný** ⇔ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$
    - pak $\forall i : \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$
  - Ej je **trvalý nulový** ⇔ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ a $lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$
    - pak $\forall i : lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$
- **V4.5**: Je-li v Markovově řetězci stav Ej:
  - trvalý nenulový neperiodický, potom
    - $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{jj} = 1/\mu_j$
    - $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = f_{ij}/\mu_j$
  - obdobně pro periodický
    - $\lim_{n\to\infty} p^{(n\lambda)}_{jj} = \lambda/\mu_j$
- Ek je **dosažitelný** z Ej ⇐ ∃ n ≥ 0 t.ž. $p^{(n)}_{jk} > 0$
- Neprázdná množina stavů *C* je **uzavřená**, jestliže žádný stav vně *C* není dosažitelný ze stavů v *C*.
  - Taková množina je opět MŘ (podřetězec).
- **Absorbční stav** je prvek jednobodové uzavřené množiny (p_{jj}=1)
  - absorbce = pohlcení
- **V4.6**: Množina stavů *C* je **uzavřená** ⇔ ∀ Ej ∈ C, Ek ∉ C platí: $p_{jk} = 0$
- MŘ je **nerozložitelný** ⇐ jediná jeho uzavřená množina je množina ∀stavů
  - **V4.7**: MŘ je **nerozložitelný** ⇔ ∀stav je dosažitelný z ∀

- Stavy Ej a Ek jsou **stejného typu**, pokud jsou jedno z následujících:
    - oba přechodné
    - oba trvale nulové
    - oba trvale nenulové a současně mají stejnou periodicitu.
- **V4.8**: 2 stavy vzájemně dosažitelné ⇒ jsou **stejného typu**
    - V nerozložitelném MŘ jsou všechny stavy téhož typu.
- **V4.9**: V MŘ s konečně stavy neexistují nulové stavy a není možné, aby všechny stavy byly přechodné.

Teoretické (7)

- Pže nevěděl co se mnou (nebylo to tak špatný, aby mě hned vykopnul ale nechtělo se mu dát mi trojku), dostal jsem Markovkského řetězce. Napsal jsem definici, klasifikaci stavů apod. Dotázal se ještě, jak spočítat pst přechodu v n-tém kroku (n-tá mocnina té matice) a na důkaz. Ten jsem improvizovaně sestavil pro n = 2 a odešel jsem se dvojkou.
- Osobne som schytal Mark. ret. + nahodne prechadzky a to sa da obkecat hore dole:) Dostal som za 2, co ma nakoniec kusa mrzelo, ale zasekol som sa na dokaze, ze P(z i do j v k-tom kroku) = Pij^(k) - cize umocnovanie pravdepodobnostnej matice. Tam to treba ukazat najprv cez jeden stav a potom cez skalarny sucin, co som mu naznacil. A pri tom skal. sucine padla otazka: Preco tieto nasobky mozeme scitat a vysledna pravdepodobnost bude spravna? Ja som mu povedal, ze preto, lebo su nezavisle (mal som pocit, ze to je blbost, ale v rychlosti nic ine mi nenapadlo). A nie:) Spravna odpoved (pre buduce generacie) je nezlucitelne!
- Co sa tyka otazok, tak ja som dostal obecnu temu Markove retezce a potom nieco okolo suvisiacich procesov. Ja osobne som u neho sedel hodinu a pri tom sa pri mne vystriedali dalsi 4 ja. Pricom vsetci najprv dostali toho Isinga a potom tie vetviace sa procesy.

Příklady

automat na kafe

Zadání:

- bere 5 a 10 koruny
- stavem automatu bude # 5kč mincí v zásobníku
- 1kafe = 5kč
- zásobník má omezenou kapacitu n, ai je počet 5kč na začátku
- problém, jestliže 5kč dojdou nebo je zás. plný (~ konec hry)

Varianty zadání: (2x) automat na kafe s pohlcovanim(absorbciou)



1 káva = 5Kč

- umí vracet

hloupý .. musí mít v zásobě 5 Kč mincí a pak dá kafe

stav systému ... #5Kč

kapacita

nekonečná

X_i ... #5Kč v systému

$i = 0, 1, \dots, N$

$E_i \xrightarrow{1-p} E_{i-1}$ (platí 10Kč)

$\xrightarrow{p} E_{i+1}$ (platí 5Kč)

$E_0 \xrightarrow{1-p} E_0$ (vhodí 10 Kč a vrátíme 10Kč zpět, nemáme 5Kč)

$\xrightarrow{p} E_1$ (platí 5Kč)

$E_N \xrightarrow{1-p} E_{N-1}$ (platí 10Kč)

$\xrightarrow{p} E_N$ (peníze vrátíš a nezpracuje)

$E_0 \rightleftarrows E_1 \rightleftarrows \dots \rightleftarrows E_{N-1} \rightleftarrows E_N$ (1-p, p)

Automat na kávu = náhodná procházka v grafu

P (Hloupý automat → zastaví v konečném čase) $\in (0,1)$ ← 0 ← 1

↳ Vypne se v E_0 + 10Kč a E_N + 5Kč

Obdoba hry : malá, velká (házení mincí)

Simulujeme:

$X_i \in \begin{matrix} +1 & p \\ -1 & 1-p=q \end{matrix}$

Generuj rnd $\begin{matrix} > 1-p \Rightarrow \text{Zdar} \\ < 1-p \Rightarrow \text{Nezdar} \end{matrix}$

↓

sign (RND − (1−p))

$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \qquad X_i = \begin{matrix} +1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{matrix} \qquad EX_i = 0 \qquad \text{var } X_i = EX_i^2 = (+1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$

$ES_k = \sum_{i=1}^{k} EX_i = 0$

$\text{Var } S_k = \sum_{i=1}^{k} \text{var } X_i = \underline{\underline{k}}$

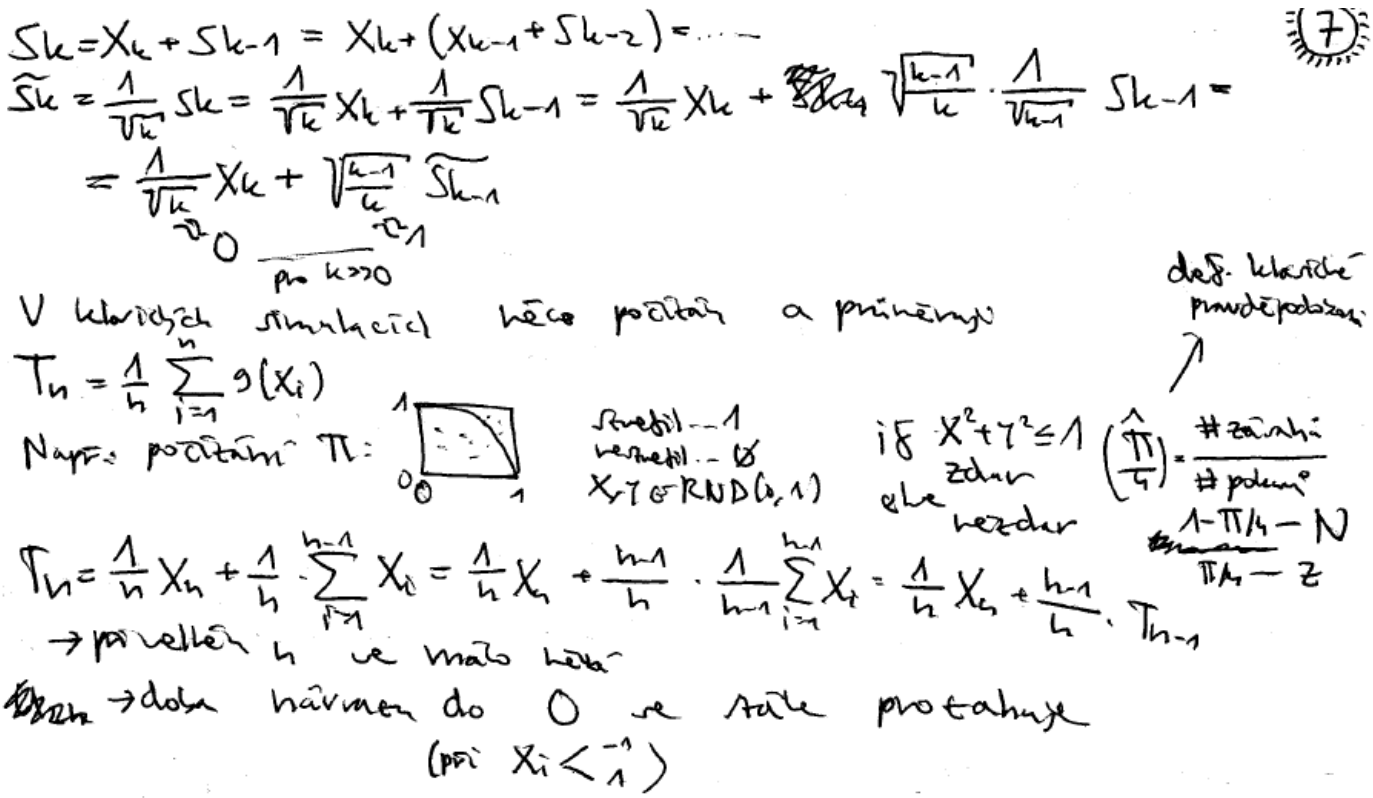
$\tilde{S}_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow E\tilde{S}_k = 0 \qquad \text{var } \tilde{S}_k = 1$

Platí: $\limsup_{k \to \infty} \tilde{S}_k = +\infty$, $\liminf \tilde{S}_k = -\infty$ ale

$$\limsup \frac{1}{\sqrt{2k \log\log k}} S_k = +1$$
$$\liminf \frac{1}{\sqrt{2k \log\log k}} S_k = -1 .$$

Co když $p < \frac{1}{2}$? Začíná se vychylovat

Proto je náhodná procházka dobrý náhodných generátorů.



Hráč

Příklad: mám 1Kč, chci získat 5Kč, vsázím co nejvíce (ale tak abych získal max. 5Kč). jaká je pravděpodobnost že skončím v 0 a v 5 a střední doby.

Řešení z fora:

- No rekl bych (ale jeste jsem to nezkousel) ze zacatek je klasicky - nakreslit si markovsky retezec (stav bude kolik mam penez - 0 az 5) akorat prechody nebudou o 1 ale podle toho kolik vsadim dle zadani. Pak z toho udelat matici P a podle vet na o pravdepodobnostech a strednich dobach pohlceni sestavit soustavy rovnic, a treba pujdou vyresit…
- vyjadril jsem to jako MR se stavy E0 az E5, kde E0 vyslo jako
- E0=(q+p*q)/(1-p^2*q^2)
- ale co dal? jak z toho ziskam pravdepodobnost, ze skoncim v E0 a jak ziskam stredni dobu dostanuti se do E0 ?

Ruinování hráče (náh.procházka)

Příklad: Dostal jsem úlohu o ruinování hráče. Načrtl jsem markovský řetězec, sestavil matici, napsal počáteční pravděpodobnosti, sestavil rekurzivní rovnice pro pravděpodobnost pohlcení, vyjdeme-li ze stavu *E_i* (tj. hráč *A* má *i* korun) a pro pravděpodobnost, že hráč *A* vyhraje, má-li na začátku *i* korun. Vyřešit jsem je nemusel. Dostal jsem 1. Potvrzuji, že Antoch měl dobrou náladu.

Řešení:

Markovský řetězec Bc. studia

Zadání:Měl jsem za úkol popsat Markovský řetězec Bc. studia, nakonec to vyšlo na 16 stavů. Ptal se, které stavy jsou absorpční, které jsou trvalé a které přechodné a pak jak bych spočítal pravděpodobnost, že náhodný student udělá Bc., odpovídal jsem mu přes násobení té matice a sečtení pro jednotlivé mocniny, pak chtěl ještě jednu metodu přes vyřešení nějaké soustavy lineárních rekurzivních rovnic a to jsem nevěděl (prý to v poznámkách má), takže nakonec za 2.

Řešení:

Spočtěte pst. pohlcení v Markovově řetězci

Zadání: K tomu mi bylo řečeno, že mám během toho popovídat i obecně o M.Ř. V odpovědi jsem ale popisovat pouze obecná fakta o MŘ, pohlcení jsem vůbec nevěděl. Antoch mi k tomu řekl "pohlcení nevíte?

aha no dobře" a nepáčil to ze mě, naopak jsme se začali bavit o jiných vlastnostech MŘ a nakonec jsem měl za 2 i přesto že na "zadání" jsem vůbec netušil odpověď.
Takže si nelámejte hlavu s tím, že na zadání nevíte odpověď, a věřte, že popsat místo toho související látku bude efektivnější než se snažit babrat v něčem, čemu nerozumíte.
Řešení:

Neznámý příklad

Zadání: Otazku mi asi minutu hledal v nejake knize a pak z nej vypadl nejaky priklad na Markovske retezce. Byl trivialni - stacilo nakreslit markovsky retezec (spravne si oznacit stavy), matici prechodu a reseni uz potom vyplyvalo jen z umocnovani te matice. Dostal jsem za 2, ptz jsem nevedel, proc se umocnovanim matice ukazuji psti danych cest v m. retezci.

- Pro 2 prvky to vyplyva z toho, ze
  - 1) u neslucitelnych jevu plati, ze pst sjednoceni disjunktnich jevu se rovna psti jejich souctu a
  - 2) primo z definice markovskeho retezce, nic vic:)
- Pro vice prvku - indukce (staci rict).

4.3 Stacionární rozdělení (a Issingův model)

Teorie

Stacionární rozdělení - Mějme nerozložitelný MŘ s maticí pravděpodobností přechodů ***P***. Rozdělení {vj} se nazývá stacionární rozdělení řetězce, pokud

$$\forall j: \quad v_j = \sum_i v_i p_{ij}$$, tj. $\boldsymbol{v=P^{\top}v}$

- (tj. zachovává pro jednotku času *rozložení částic*).
- Stacionární rozdělení zřejmě udává pravděpodobnosti stavů po ustálení systému (pokud stacionární rozdělení existuje).
- **V4.10(☠)**: V nerozložitelném MŘ existuje stacionární rozdělení, právě když všechny stavy jsou trvalé nenulové. Toto rozdělení *v* je jediné a ∀ i,j platí:
  - $v_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ v neperiodickém případě
  - $v_j = \lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} > 0$ v periodickém případě
  - **Důsledek(☠):** V nerozložitelném MŘ s konečně mnoha stavy existuje stacionární rozdělení.
- Matice s nezápornými prvky t.ž. všechny řádkové i sloupcové součty jsou jedna se nazývá **dvojně stochastická**.
- **V4.11**: Pro nerozložitelný MŘ s dvojně stochastickou maticí a nekonečným počtem stavů stacionární rozdělení neexistuje, pro konečný počet stavů *n* je stacionární rozdělení rovnoměrné
  - (vi=1/n)
- **Homogení MŘ** - s nezávisloslou pstí pij na n.
  - pokud P(Xn+1 = j | Xn = i) na n bude záležet, což budeme značit pij(n, n + 1), budeme hovořit o řetězcích **nehomogeních**
- **Isingův model(☠)**:
  - graf G=(V,E), každý vrchol i má stav σ_i ∈ {-1,+1} (obecně {1, ...,K}, např. barvy) , vektor **σ** popisuje stav systému, prostor stavů S = {-1,+1}^|V|
  - **IM** je je pravděpodobnostní rozdělení π(β) na prostoru stavů S, kde
    - π(β) = C^-1_β exp(-β H(σ))
    - H(σ) = ∑ {(i,j) ∈ E} I[σ_i ≠ σ_j] (Hamiltonián - “energie stavů”)
    - C_β = ∑{σ*∈ S} exp(-β H(σ*))
    - Pro β > 0 jsou v daném modelu nejpravděpodobnější konfigurace stavů, pro něž je Hamiltonián malý (malá energie, informace).

- **Aplikace v analýze obrazu** - pixely jsou vrcholy, hrany spojují sousední pixely, stavy odpovídají barvám. Obrázek je reprezentován vektorem σ ∈ S, pozorujeme zašuměný obraz Y = σ + ε, kde ε_i ~ N(0,δ^2). Chtěli bychom odhadnou skutečný obraz, pozorujeme-li Y a předpokládáme, že σ má rozdělení C^{-1}_β exp(-β H(σ)). Řešíme Bayesovskou statistikou a MŘ (náhodná procházka grafem, hledáme stacionární rozdělení -- zřejmě to, co se učí v UI2 jako MCMC).
  - Možnosti jsou generovat z aposteriorního rozdělení L(σ | Y) konfigurace jako možné reprezentace obrazu, nebo hledat ^σ maximalizující P(^σ | Y).

Teoretické

- stacionarni rozdeleni MŘ - napsal jsem definici MŘ, definici homogenniho MŘ, co je to stac. rozdeleni a tu vetu co je v Tuetschekovych poznamkach (a par dalsich drobnosti +/- to co bylo v poznamkach)...
  - prof. Antoch se me prubezne ptal na nejake drobnosti obvykle "jak byste tu definici popsal slovy" apod. a nakonec se zeptal pokud zjistime stac. rozlozeni, co z toho muzeme usoudit o stavech a na to jsem odpoved nevedel (spravne to je: homogenni nerozlozitelny MŘ ma stacionarni rozdeleni -> vsechny stavy jsou trvale nenulove... v poznamkach to neni, pry se to probiralo na prednasce...) ale vysledek kupodivu za 2, ani jsem to necekal:)
- Souvislost mezi stacionárním rozdělením v diskrétním a spojitém případě
- (3x) Issingův model
  - Sa mojho spolusediaceho spytal co robi za diplomku aby mu dal nejaku motivovanu ulohu, ale na jeho nestastie to bolo nieco z grafiky a tym si privodil temu Isingovho modelu. To velmi nevedel (a kto by hej 😀, tak dostal nahradnu otazku o vetviacich procesoch. Velkost n-tej generacie a pod.
  - **Chtěl:** slovně popsat k čemu se to hodí a jaký tvar má Markovův řetězec pro obrázek a jestli tam existuje stacionární rozdělení (nevim co dostal, byl jse již pryč).

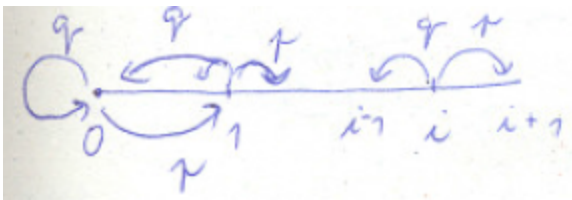
Příklady

Náhodná procházka s 2 odrážejícími stěnami

Zadání: Nalezněte stacionární rozdělení pro náhodnou procházku s dvěma odrážejícími stěnami
Hint: Pro p=1/2 vyjde rovnoměrné (dvojně stochastická matice).
Řešení:

Náhodná procházka s 1odrážejícími stěnou (v nule)

Zadání: Mějme náhodnou procházku s jednou odrážející stěnou (v nule).



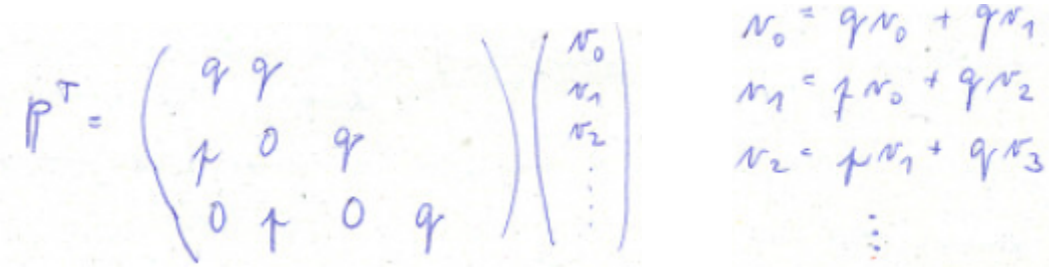
Řešení:
Její Markovův řetězec ja daný maticí:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots \\ q & 0 & p & \dots \\ 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

kde p+q=1, 0<p<1

- Vidíme že řetězec je nerozložitelný.
- 3 případy: p > ½ půjdeme do ∞
  p = q ?? návraty k 0 budou čím dál více časté

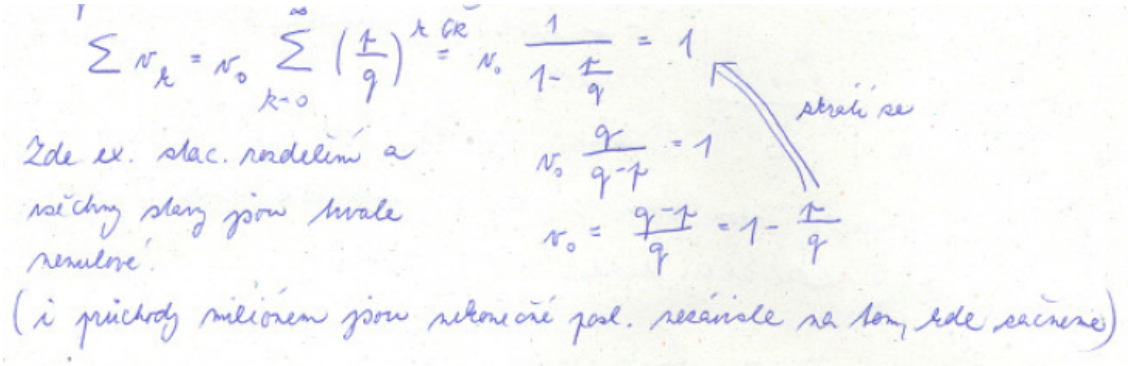
p < ½ budu se točit okolo 0



tedy: $v_j = pv_{j-1} + q\,v_{j+1}$ a dále se lehce odvodí $v_j = (\frac{p}{q})^j v_0$

potřebujeme normalizaci aby $\sum_{j=1}^{\infty} v_j = 1$

- p>q p/q >1 neex.stac.rozdělení stavy budou přechodné
- p=q p/q =1 neex.stac.rozdělení stavy budou trvale nulové
- p<q p/q =1 neex.stac.rozdělení stavy budou trvale nenulové



- Pokud $\sum_{j=1}^{\infty} v_j$ konverguje, stacionární rozdělení existuje.
- Z nerozložitelnosti by potom stavy byly nenulové a trvalé.

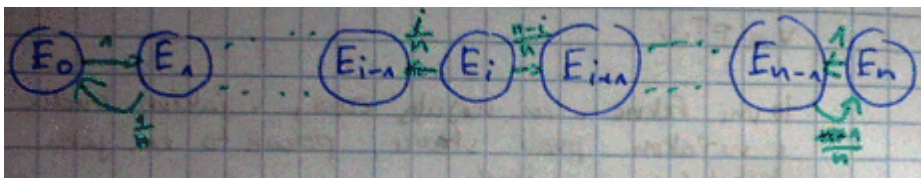
Náhodná procházka ve třech rozměrech s 4 odrážecími stěnami

Příklad: Kolega vedla mna mal vysetrit udalost "navrat do pociatku" v random walk-u v 3D s reflective barriers v tvare obojstranne nekonecneho kvadra/kominu.
Konkretne: pohybovat sa mozno vo vsetkych 6 smeroch (kazdy je rovnako pravdepodobny), no suradnice x, y su obmedzene na interval <-K, K>. Pohybujeme sa teda v priestore <-K, K> x <-K, K> x (-oo, oo), kde napr prechod x=K -> x=K+1 nahradime prechodom x=K -> x=K.
(Kolega priklad uplne nedopocital, no presvedcil svojimi vedomostami a odisiel s jednotkou.)
Řešení:

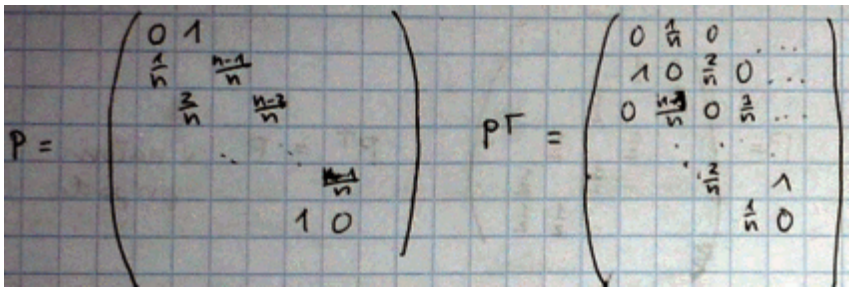
Ehrenfestův myšlený pokus (aneb Koule ve dvou sklenicích)

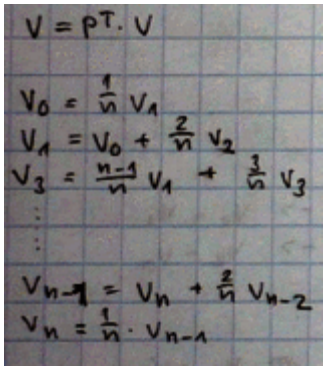


Zadání: *a* rozlišitelných molekul rozděleních do nádob *A* a *B*, v každém kroku se **zvolí jedna molekula** (s pravděpodobností *1*/*n*) a přemístí do opačné nádoby. Stavem systému je počet molekul v nádobě A (tedy |A|).
Nalezněte stacionární rozdělení.
Řešení:
Tohle se dá simulovat Markovovým řetězcem - stav systému popíšu jako počet kuliček v piksle A.

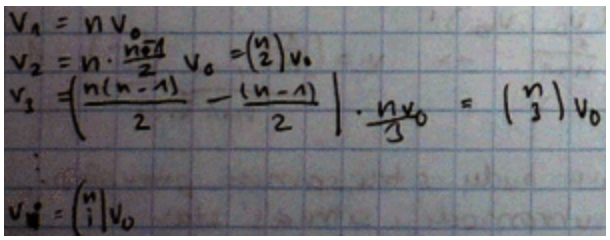


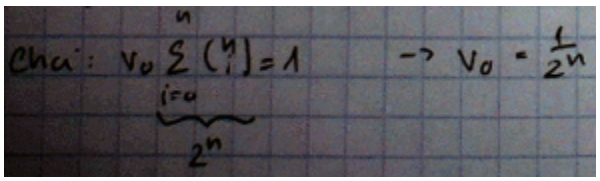
Potom ze stavu E_i, kdy v A je n kuliček, jdu s pravděpodobností i/n do stavu E_{i-1} a s $1 - i/n = (n-i)/n$ do stavu E_{i+1}.
Pak sestavíme matici P a hledáme **v** t.ž. **v**=P^T**v :**



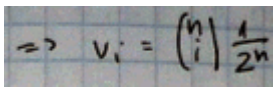


intuitivně z grafu: bude se nám to hromadit uprostřed



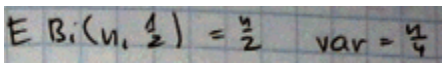


(protože pro diskrétní pstní rozdělení platí $\sum_x P[X = x] = 1$)



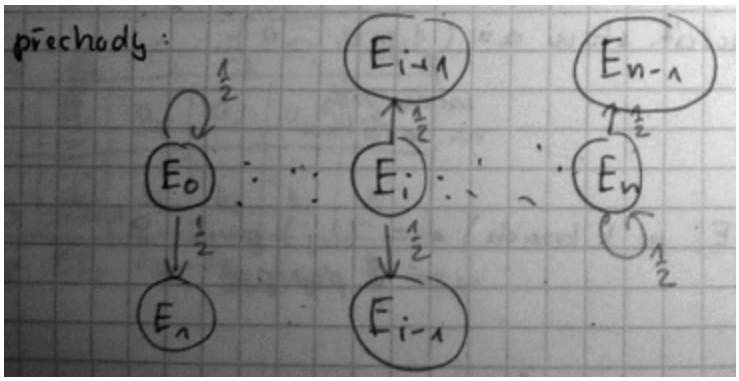
a dostáváme: $V = (nV_0, \binom{n}{2}V_0, \binom{n}{3}V_0 \dots)$

Teď už vidíme <u>binomické rozdělení</u>.

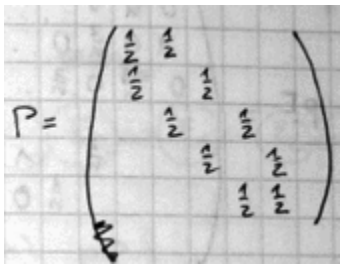


Modifikovaný Ehrenfestův myšlený pokus

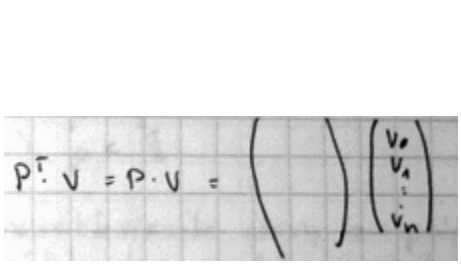
Zadání: Nechť a rozlisitelnych molekul je rozděleno do dvou nadob označených A a B. V kazdem kroku se nahodne **zvolí jedna nadoba** a jedna molekula z ní se přemístí se do nadoby opačné. Stavem systemu je počet molekul v nádobě A.
Nalezněte stacionární rozdělení.
Řešení:
stav ≡ #molekul v A

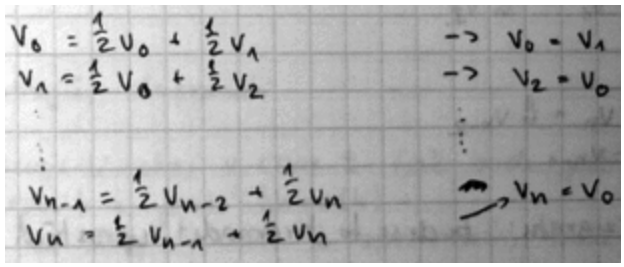


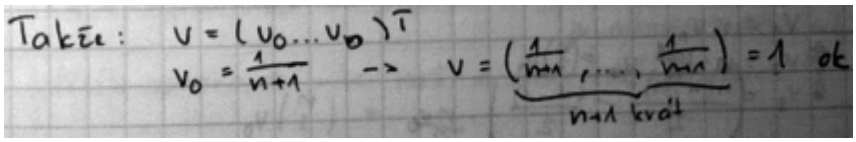
i=1,...,n-1
=> nerozložitelný, takže můžu hledat stacionární rozděleni: v=P^Tv
to mi řekne, za nějaký čas v jakém budu s nějakou pstí stavu (pokud to ex.), jsou trvalé a nenulové



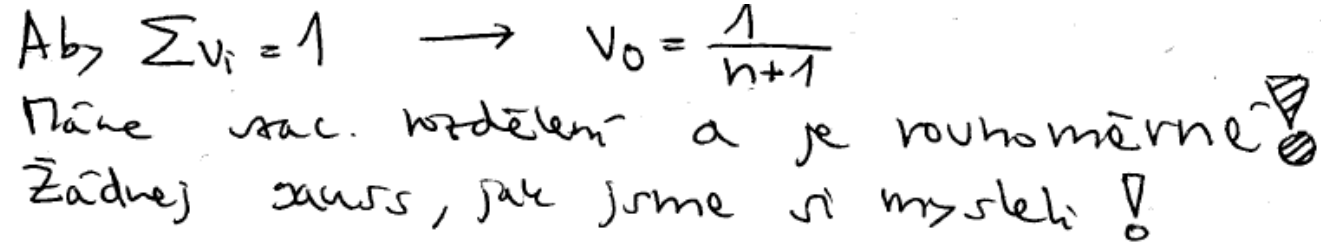
P^T=P v našem případě





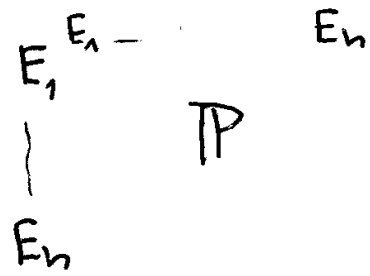


Tedy v lib. stavu budu s tou samou pstí, nikde se mi to nehromadí, setrvalý stav.
Máme tedy stacionální rozdělení a je rovnoměrné.



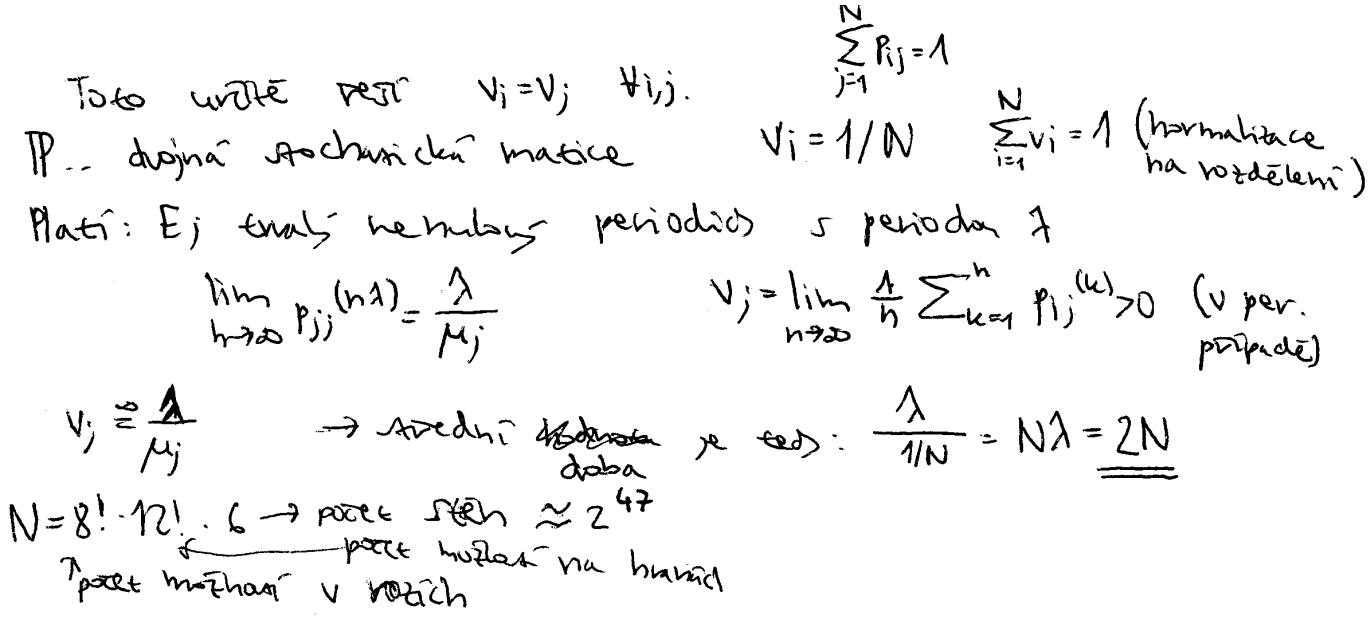
Rubikova kostka

Zadání: stredni doba navratu do puvodniho stavu



Řešení:

- každou stěnu ze 6 můžu otočit 2 směry - 12 možností
- N … # stavů
- vkaždém rádku můžeme jít s pstí 1/12 do kazdého ze stavu
- můžeme točit tam a zpátky => MŘ je:
    - periodický (kvůli symetrii) - perioda lambda = 2 (nejkratší cyklus)
    - nerozložitelný (vždy můžeme zpět)
    - konečný
- Symetrie => N je sudé, P = P^T
- P, P^2, … pij^(n) - přechod z i do j po n krocích… vytvořující fce A(x) dostanu fij^(n) … B(x)=A(x)/(A(x)-1) a B'(1) nám dá výsledek
- Tato cesta je zde příliž složitá (kvůli ošklivosti P, P^2,...)
- ex. stacionární rozdělení
    - v = P^T v
    - bude rovnoměrné (stejně jako Ehren. pokus či náh procházka po vrcholech krychlí)
        - jakto?: $v_i = \sum_{j=1}^{N} P^T_{jj} v_j = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_i = v_j$



Příklad 8 z přednášky

(Antoch slidy str.45)

Zadání: Nechť Y_k, $1 \le k < \infty$ jsou nezávislé cnv. Nechť $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Potom posloupnost $\{X_n\}$, $1 \le n < \infty$ tvoří Markovův řetězec. Ověřte.

Řešení:

Příklad 9 z přednášky

(Antoch slidy str.45)

Zadání: Nechť Yk , $1 \le k < \infty$ jsou nezávislé cnv. Uvažujme posloupnost klouzavých součtů $X^*_n = \sum_{k=1}^{r} Y_{n+k}$, r pevné. Potom posloupnost $\{X^*_n , 1 \le n < \infty\}$ obecně netvoří Markovův řetězec. Ověřte.

Řešení:

5. Lineární proces zrodu a zániku (a fronty) (Birth-death process)

Teorie

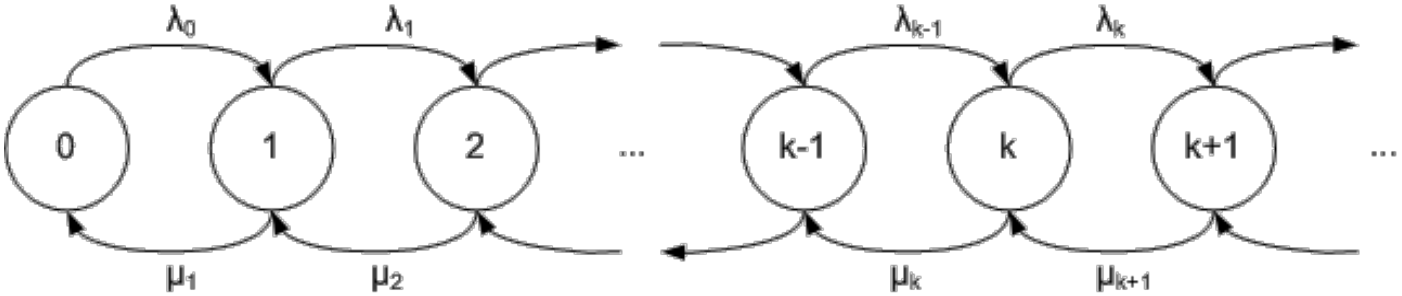
Exponenciální rozdělení

- Náhodná veličina *X* má exponenciální rozdělení *Exp(λ)*, pokud má hustotu
  - f(x,λ)=
    - λe^(-λx) x>0, λ>0
    - 0 jinak
  - EX=1/λ, var X=1/λ^2, F(x)=1-e^(-λx)
- **V5.1(✠)**: Exponenciální rozdělení je jediné spojité rozdělení, pro které platí
  - *P(X > x + y | X > x)=P(X > y)*
    - Mezi diskrétními rozdeleními má tuto vlastnost pouze geometrické. *X* můžeme interpretovat jako dobu života procesu, potom pravděpodobnost přežití časového období nezávisí na tom, jakou dobu proces doposud přežil.
      -
    - “Exp nemá paměť”
- **Funkce intenzity (poruch) -** náhodná veličina *X* má hustotu *f(x)* a distribuční funkci *F(x)*:
  - $\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$

        - □ jednoznačně charakterizuje nezáporné náhodné veličiny
    - pst okamžitého selhání:
        - $P(x < X \leq x + \Delta \mid X > x) = \frac{F(x+\Delta)-F(x)}{1-F(x)} \frac{\Delta}{\Delta} \approx_{\Delta \to 0} \Delta \Lambda(x)$
            - náhodnou veličina *X* (doba života procesu)
            - Funkce intenzity jednoznačne charakterizuje rozdělení.
    - **Pozn.(☒):** Exponenciální rozdělení je jediné spojité rozdělení s konstantní funkcí intenzity
        - tedy: $\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \lambda \Leftrightarrow X \sim Exp(\lambda)$

Lineární proces zrodu a zániku

- je speciální případ Markovova procesu se spojitým časem, se stavovými přechody pouze dvou typů:
    - "**zrod**", který zvyšují stavovou proměnnou *n* o 1 a
    - "**zánik**", který snižuje *n* o 1 (diskrétní stavy).



    - Dojde-li ke "zrodu", proces přejde ze stavu n do n+1. Dojde-li k “úmrtí”, proces přejde ze stavu n do stavu n-1.
        - proces je určen **porodností** $\{\lambda_i\}_{i=0...\infty}$ a **úmrtností** $\{\mu_i\}_{i=1...\infty}$.
            - (intenzitami přechodu)
        - Systém v čase 0 ve stavu Ei => Pi(0) = 1 a Pn(0) = 0 pro n ≠ i
- **Formální def.(☒):** systém s max spočetně stavy, psti přechodů v časovém intervalu *(t, t + h)* jsou:
    - $P(E_n \to E_{n+1}) = \lambda_n h + o(h)$ **zrod**
    - $P(E_n \to E_{n-1}) = \mu_n h + o(h)$ **zánik**
    - $P(E_n \to E_{n \pm j},\ j > 1) = o(h)$
        - *o(h)* je libovolně malý člen vzhledem k *h* ($\frac{o(h)}{h} \to 0\ pro\ h \to 0$).
        - $\lambda_i h$, $\mu_i h$ ukazuje, že doby mezi událostmi se řídí exp. rozdělením
    - (tj. Markovský proces se spojitým časem a diskrétními stavy)
- pst toho, že systém je v čase *t* ve stavu En budeme značit $P_n(t)$.
    - Hledáme nás:
        - limita: $p_n = \lim_{t \to \infty} P_n(t)$
            - tj. pravděpodobnosti obsazení systému po té, co se stabilizoval.
        - $P_n(t+h)$
- **V5.2(☒☒):**
    - Pravděpodobnosti p_n existují, nezávisí na počítečních podmínkách a vyhovují systému linerárních rovnic:
        - $0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$
        - $0 = -(\lambda_n + \mu_n) p_n + \mu_{n+1} p_{n+1} + \lambda_{n-1} p_{n-1},\ n \geq 1$
    - Pravděpodobnosti $P_n(t)$ splňují následující systém diferenciálních rovnic:
        - $P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$

        - $P'_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t),\ n \geq 1$
    - **Důkaz:** hledáme $P_n(t + h)$ pro nějaké malé h
        -

Teoretické (5)

- Ja som dostal modely zrodu a zaniku, napisal som, co som vedel, (pravdepodobnosti prechodov do vedlajsich stavov, o linearnom modeli, no v podstate to, co mame v poznamkach...) na par objasnujucich otazok, ktore som dostal, som moc nevedel odpovedat (hlavne aka je stredna hodnotu spojitej nahodnej veliciny), akosi som viackrat nechapal, na co sa pyta, resp co chce pocut.... Tak asi pan profesor pojal pocit, ze tomu nerozumiem, a dostal som za 3.

Příklady

Základní

Zadání: Mějme systém z prvků, kde se za čas *h* rozdělí jeden prvek s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a zanikne s pravděpobností $\mu h + o(h)$.

Řešení:

Je-li chování prvků nezávislé, jde o model zrodu a zániku s:

$\lambda_n = n\lambda$,

$\mu_n = n\mu$.

Model telefonní ústředny s nekonečně linkami (Neomezená ústředna) (☠)

(Antoch slidy str.52)

Zadání: Mějme ústřednu s nekonečně mnoha telefoními linkami. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li obsazeno právě n linek.

- Pravděpodobnost jevu, že jeden hovor skončí v průběhu intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky hovorů jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ bude obsazena nová linka, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

a) Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.

b) Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$.

Řešení:

a)

- $P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$
- $P'_n(t) = -(\lambda + n\mu) P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t),\ n \geq 1$

b)

E_n:

zrod: $\lambda_n=\lambda$ příchod hovoru

zánik: $\mu_n=n\mu$ skončí mi hovor n>=1

počáteční podmínky:

$\mu_0=0$ $P_i(0)=1$ $i \geq 0$

$\lambda_0=\lambda$ $P_j(0)=0$ $j \neq i$

Jde o model zrodu a zániku s $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n=n\mu$. Z rovnic z věty **5.2** plyne:

$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$

$0 = -(\lambda + n\mu) p_n + (n+1)\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1}$

$p_1 = \lambda/\mu\ p_0$

$p_2 = \lambda^2/2\mu^2\ p_0$

…

$$p_n = 1/n!\ (\lambda/\mu)^n\ p_0$$

Z existence stacionárního rozdělení plyne $\sum p_n = 1$ (?).

$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$p_0\ e^{\lambda/\mu}\ =\ 1$$

Odtud $p_0 = e^{-\lambda/\mu}$ a

$$p_n = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \sim \quad Po\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Poznámka: Pokud bychom předchozí příklad simulovali, dostali bychom prý střední hodnotu a rozptyl λ/μ, ale nebylo by zřejmé, že mají pravděpodobnosti Poissonovo rozdělení.

Model telefonní dvojbudky s neomezenou frontou

(Antoch slidy str.53)

Zadání: Uvažujme stanici obsluhy, která může současně obsluhovat nejvýše dva zákazníky, např. telefonní dvojbudku. Zákazníci, kteří nemohou být obslouženi, se řadí do jediné neomezené fronty. řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li počet zákazníků (v obsluze i ve frontě) právě n.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že zákazník, který je v čase t obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h)$ obsloužen, je rovna $\mu\, h + o(h)$.
- Délky obsluhy jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h)$ přijde nový zákazník, je $\lambda\, h\ +\ o(h)$.

Úkoly:

a) Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.

b) Ukažte, že pokud $\lambda < 2\mu$, pak pro limitní pravděpodobnosti p_n platí

$$p_n\ =\ p_0\ (\frac{\lambda}{\mu})^n\ \frac{1}{2^{n-1}}\ \text{, kde}\ p_0\ =\ \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}$$

Řešení (z fóra):

(intenzita příchodů zákazníku: λ, délky hovorů (intenzita odchodů): μ)

Najednou mohou být obsluhováni co nejvýše dva zákazníci (obecně: k zákazníků v případě k-budky). Zákazník nečeká, pokud to není nutné (když přijde a alespoň jedna z budek je volná, rovnou začíná hovor). Díky tomu pro popis každého stavu stačí pouze jedno číslo (počet zákazníků obsluhovaných + počet zákazníků, kteří stojí ve frontě).

(λ_n - intenzita příchodů ve stavu n, μ_n - intenzita odchodů ve stavu n)

Intenzita příchodů zákazníka - nezáleží na počtu zákazníků, proto máme:

$\lambda_n = \lambda$ pro n = 0, 1, 2...

Intenzita odchodů - bude záležet na počtu právě obsluhovaných zákazníků - pravděpodobnost, že libovolný hovor bude ukončen je tím větší, čím víc zákazníků právě hovoří.

μ_n = μ * (počet obsluhovaných zákazníků ve stavu n), v tom případě:

$\mu_1 = \mu$

$\mu_2 = 2\mu$

$\mu_n = 2\mu$ i pro n > 2 (v tom případě jsou obsluhováni dva zákazníci, ostatních n-2 čeká ve frontě, jejich počet nemá vliv na délky hovorů a tím pádem ani na intenzitu odchodů)

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$
$$0 = -(\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 + \lambda p_0$$

pro n ≥ 2:

$$0 = -(\lambda + 2\,\mu) p_n + 2\,\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1}$$
$$p_1 = \lambda/\mu\ p_0$$
$$p_2 = \lambda^2/2\mu^2\ p_0$$
$$p_3 = \lambda^3/4\mu^3\ p_0$$
$$\dots$$
$$p_n = 1/2^{n-1}\,(\lambda/\mu)^n\, p_0$$

Aby pravděpodobnosti p tvořily rozdělení, musí být jejich součet 1.
$\sum p_n = 1$
Vypadá to jako geometrické rozdělení (?).

p_0 spočteme pomocí součtu geometrické řady $p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 + \ldots = 1$.

$$p_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}, \qquad p_n = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}}$$

Aby se netvořila nekonečně dlouhá fronta, je nutné zachovat podmínku μ > λ

Lanovka

Zadání: Mal som zostrojit model pre lanovku - kotvu na lyziarskom svahu. Lyziari prichadzali klasicky s intenzitou λ a kotva prichadzala s intenzitou μ, vzala dvoch ludi z fronty naraz. Ak tam bol v momente jej prichodu len jeden, tak zobrala iba jeho.
Hint: Zostrojil som graf stavov a prechodov a z neho diferencialne rovnice pre pravdepodobnosti. Zacal som pocitat aj limitne pravdepodobnosti, ale nedopocital som to (v tomto priklade to uz nebolo uplne jednoduche). Antoch sa ma potom pytal na nejake detaily ohladom toho modelu, a to ze som nemal dopocitane tie limitne pravdepodobnosti mu nevadilo, porozpravali sme sa o tom ako by sa to dalo dokoncit (vysla tam rekurentna postupnost). Celkovo za 1. Som mal stastie - dostal som priklad, a ziadnu teoriu odomna Antoch nechcel.
Řešení:

(podle mě je to úplně stejné jako dvojbudka ??)

K telefonnich ustreden s omezenou kapacitou

Zadání: Mame K telefonnich ustreden s omezenou kapacitou, popiste, co se tam deje a jak se to zesloziti oproti pripadu K = 1.
Hint:

- Napsal jsem mu tam klasicky model zrodu a zaniku (pravdepodobnosti prechodu mezi stavy) a odvodil jsem diferencialni rovnice (je z toho videt, ze pripad K = 1 a K > 1 se v podstate nijak nelisi, pouze se nam konstanta λ o neco zvetsi).
- On chtel ale znat spis trochu pozadi, jak se odvodi ty pravdepodobnosti prechodu mezi stavy, a v tom jsem trochu tapal, takze nakonec za 2.
- **Co je tedy dulezite vedet:**
  - kdyz h je cas, tak co vlastne znamena to λ * h? Jde tu o to, ze pravdepodobnost, ze za cas h dojde ke zmene stavu P(x < t + h | x > t) je rovna h * (f(x) / (1 - F(x))) [intenzita poruch], coz pro exponencialni rozdeleni, znamena, ze je to rovno λ * h. λ je tedy pro exponencialni

rozdeleni rovna intenzite poruch a z toho nam vychazi, lambda * h je PST, ze za cas h dojde ke zmene [Michalovy slidy str. 24]

- Dale se me ptal kolik priblizne tech udalosti za cas h bude. To si staci uvedomit, ze kdyz doby cekani na udalost jsou exponencialne rozdeleny, takze jde vlastne o Homogenni Poissonuv proces a pocet udalosti za cas h ma tedy Poissonovo rozdeleni s parametrem lambda * h.
- Dale je dobre vedet, proc staci uvazovat pripady, kdy se pocet jedincu (tedy stav En) zmeni max o jednoho (do En-1 nebo En+1). Vice viz thread Errata Michalovych zapisku.

Řešení:

Intenzita příchodů zákazníka - nezáleží na počtu zákazníků, proto máme:

$\lambda_n = \lambda$ pro n = 0, 1, 2...

Intenzita odchodů - bude záležet na počtu právě obsluhovaných zákazníků - pravděpodobnost, že libovolný hovor bude ukončen je tím větší, čím víc zákazníků právě hovoří.

$\mu_n = \mu$ * (počet obsluhovaných zákazníků ve stavu n), v tom případě:
$\mu_1 = \mu$
$\mu_2 = 2\mu$
$\mu_3 = 3\mu$
$\mu_n = K\mu$ i pro n > K (v tom případě jsou obsluhováni K zákazníci, ostatních n-K čeká ve frontě, jejich počet nemá vliv na délky hovorů a tím pádem ani na intenzitu odchodů)

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$
$$0 = -(\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 + \lambda p_0$$
$$0 = -(\lambda + 2\mu) p_2 + 3\mu p_3 + \lambda p_1$$
$$0 = -(\lambda + 3\mu) p_3 + 4\mu p_4 + \lambda p_2$$

...

pro n ≥ K:

$$0 = -(\lambda + K\,\mu) p_n + K\,\mu\, p_{n+1} + \lambda p_{n-1}$$
$$p_1 = \lambda/\mu\ p_0$$
$$p_2 = \lambda^2/2\mu^2\ p_0$$
$$p_3 = (\,(\lambda + 2\mu)\lambda^2 p_0/2\mu^2\ - \lambda^2 p_0/\mu\,)/\,3\mu\ =\ \lambda^3/6\mu^3\ p_0$$
$$p_4 = (\,(\lambda + 3\mu)\lambda^3 p_0/6\mu^3\ - \lambda^3 p_0/2\mu^2\,)/\,4\mu\ =\ \lambda^4/24\mu^4\ p_0$$

…

pro n < K:

$$p_n = 1/n!\ (\lambda/\mu)^n\ p_0$$

pro n ≥ K:

$$p_n = 1/K!\ (\lambda/\mu)^n\ p_0$$

Z existence rozdělení plyne $\sum p_n = 1$:

protože $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ tak platí i:

$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$p_0\, e^{\lambda/\mu} = 1$$

Odtud $p_0=e^{-\lambda/\mu}$ a

$$p_n = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \sim \quad Po\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

~ UPo(λ/μ)
(useknuté Poissinovo rozdělení - Poissonovo s normalizační konstantou *přerozdělením chvostu*, useknutí se ale v praxi často zanedbává)

Model parkoviště před MFF bez fronty (konečná ústředna)

(Antoch slidy str.54)
Zadání: Uvažujme parkoviště automobilů před MFF UK s kapacitou *N* míst. Stavem systému je počet aut na parkovišti, fronta se netvoří. (1 vjezd, 1 výjezd)
Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že automobil, který v čase t parkuje, odjede v intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu\, h + o(h)$.
- Délky stání jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ přijede nový automobil, je $\lambda\, h\, +\, o(h)$.

Úkoly:

a) Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti Pn(t).
b) Ukažte, že limitní pravděpodobnosti pn se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Varianty:

- parkoviste (s frontou i bez)
  - ja dostal tema "popiste model parkoviste MFF", coz mi prislo jednoduche + jsem popsal proces zrodu a zaniku. Priklad jsem napsal cely, spravne, jenze Antoch zjistil, ze nektere veci tam uplne nechapu a neumim bez problemu odvodit intenzitu, takze nakonec za 3 (trochu divne se na me dival a pak se ptal, jestli jsem byl vubec nekdy na prednasce... tak mozna i proto ta znamka)
  - Já jsem měl parkoviště před Matfyzem bez fronty, pak s konečnou a nekonečnou frontou.
  - Kolega měl matfyzácký parkoviště, myslím, že měl rozebrat různý druhy (konečný parkoviště, a možná s frontou). Myslím, že na to stačilo zase umět ty věci co byly na přednášce a odvodit vzorce z derivace.

Řešení (jako ústředna):
b)
E_n intenzity:

zrod:	$\lambda_n=\lambda$		(v jednom okamžiku může přijet jen 1 auto)
zánik:	$\mu_n=n\mu$	$0 < n \le N$	(vyberu 1 auto a nechám ho odjet ~ Bi(n, μh))

Jde o model zrodu a zániku s $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n=n\mu$. Z rovnic z věty **5.2** plyne:

$$0 = -\lambda\, p_0 + \mu\, p_1$$
$$0 = -(\lambda + n\,\mu)\, p_n + (n+1)\,\mu\, p_{n+1} + \lambda\, p_{n-1}$$
$$p_1 = \lambda/\mu\; p_0$$
$$p_2 = \lambda^2/2\mu^2\; p_0$$
$$\dots$$
$$p_n = 1/n!\; (\lambda/\mu)^n\, p_0$$

Z existence stacionárního rozdělení plyne $\sum p_n = 1$.

protože $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ tak platí i:

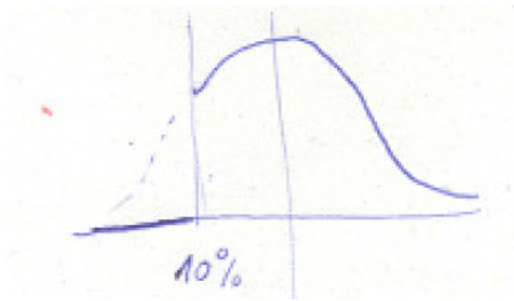
$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$p_0 \, e^{\lambda/\mu} = 1$$

Odtud $p_0 = e^{-\lambda/\mu}$ a

$$p_n = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sim Po\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

~ UPo(λ/μ)
(useknuté Poissinovo rozdělení - Poissonovo s normalizační konstantou *přerozdělením chvostu*, useknutí se ale v praxi často zanedbává)



Model telefonní budky s omezenou frontou

(Antoch slidy str.55)
Zadání: Uvažujme stanici obsluhy, která může obsluhovat nejvýše jednoho zákazníka, např. telefonní budku. Zákazníci, kteří nemohou být obslouženi, se řadí do jediné omezené fronty délky N. řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li počet zákazníků (v obsluze i ve frontě) právě n.
Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že zákazník, který je v čase t obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h)$obsloužen, je rovna $\mu\, h + o(h)$.
- Délky obsluhy jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ přijde nový zákazník, je $\lambda\, h \, + \, o(h)$.

Úkoly:

a) Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
b) Ukažte, že pro limitní pravděpodobnosti p_n platí:

$$p_n = (\lambda/\mu)^n \, p_0 \quad \text{, kde } p_0 = \mu^{N+1} \frac{\lambda - \mu}{\lambda^{N+2} - \mu^{N+2}}$$

Řešení (z [1]):
a) ...
b)
E_n intenzita příchodů a odchodů je konstantní:
zrod: $\lambda_n = \lambda$
zánik: $\mu_n = \mu$ $\quad 0 \le n \le N$

Jde o model zrodu a zániku s $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$. Z rovnic z věty **5.2** plyne:

$$0 = \; -\lambda\, p_0 + \mu\, p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)\, p_n + \mu\, p_{n+1} + \lambda\, p_{n-1}$$
$$p_1 = \lambda/\mu\ p_0$$
$$p_2 = \lambda^2/\mu^2\ p_0$$
$$\dots$$
$$p_n = (\lambda/\mu)^n\, p_0$$

jde o UGe(λ / μ) (useknuté geometrické rozdělení $p_n = (\lambda/\mu)$."*něco*")

$\sum p_n = 1$:

$$1 = \sum (\lambda/\mu)^n\, p_0$$

- (N+2 sčítanců, protože může být fronta dlouhá 1 až N lidí, nebo fronta prázdná a budka obsazená, nebo fronta prázdná i budka prázdná)
- použijeme vzorec pro součet prvních N+2 členů geom. posloupnosti:

$$1 = p_0 \frac{(\lambda/\mu)^{N+2} - 1}{\lambda/\mu - 1}$$

$$p_0 = \frac{\lambda/\mu - 1}{(\lambda/\mu)^{N+2} - 1} = \frac{\mu^{N+2}(\lambda/\mu - 1)}{\lambda^{N+2} - \mu^{N+2}} = \frac{\mu^{N+1}(\lambda - \mu)}{\lambda^{N+2} - \mu^{N+2}}$$

□

Problém jednoho opraváře a mnoha strojů (inverze parkoviště)

(Antoch slidy str.55)

Zadání: Mějme M strojů obsluhovaných jedním opravářem. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, jestliže nepracuje právě n strojů.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že stroj který je v čase t opravován, začne v intervalu $(t, t+h)$ pracovat, je rovna $\mu\, h + o(h)$.
- Délky oprav jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že stroj který v čase t pracoval, se v intervalu $(t, t+h)$ porouchá, je rovna $\lambda\, h\ +\ o(h)$.

Úkoly:

a) Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.

b) Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_{M-k} se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametrem μ/λ, tj. pro k = 1, . . . ,M

$$p_{M-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k p_M, \quad \text{kde} \quad p_M = \left[1 + \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k\right]^{-1}$$

Řešení (s0cketka/výpisky):

a) ...

b)

Stavem je počet rozbitých strojů.

Extra posoudíme kraje, prostředek bývá stejný:

1) E_0

$\lambda_0 = M\lambda$(všechny fungujou a všechny se můžou rozbít)

$\mu_0 = 0$ (není co opravovat)

2) $E_1 \dots E_{M-1}$

$\lambda_n = (M - n)\lambda$ (pokud se porouchalo n strojů, může se porouchat ještě M-n)
$\mu_n = \mu$ (konstantní intenzita práce opraváře, opravujem nejvýše 1)

3) E_M

$\lambda_n = 0$ (už není co by se rozbilo)
$\mu_n = \mu$ (konstantní intenzita práce opraváře, opravujem nejvýše 1)

Sestavení rovnic:

E_i

- E_{i-1} $\rightarrow \lambda_n h + o(h)$
  - $p_{i-1}(t)(M - i + 1)\lambda$ (rozbil se)
    - (M - i + 1) - počet funkčních, jeden z nich se mi rozbil
- E_i $\rightarrow (1 - \lambda_n h - \mu_n h) + o(h)$
  - $- p_i(t)(\mu + (n - i)\lambda)$ (nestalo se nic)
- E_{i+1} $\rightarrow \mu_n h + o(h)$
  - $p_{i+1}(t)\ \mu$ (opravil se)
- (ostatních zanedbatelně, neuvažuji)
- $p_i'(t)$ = součet 3 pstí ↑

Zkoumám interval (t, t+n), jsem En, na konci intervalu můžu být v En+1, En nebo En-1 nebo v jiných, ty jsme odbili tim o(h).

$p_n(t)$ = P(systém ve stavu En v čase t)

$p_n(t + n)$ = "nestalo se nic" + "opravil se" + "rozbil se" + o(h)

$p_n(t + n) = p_n(t)((1 - \lambda_n h - \mu_n h) + o(h)) + p_{n+1}(t)(\mu_{n+1} h + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} h + o(h)) + o(h)$

$p_n(t + n) - p_n(t) = p_n(t)(- \lambda_n h - \mu_n h) + p_{n+1}(t)\mu_{n+1} h + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1} h + o(h)$

$\Rightarrow (p_n(t + n) - p_n(t)) / h$ (poškrtáme h)

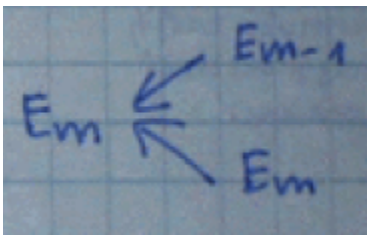
$p'_n(t) = p_n(t)(- \lambda_n h - \mu_n h) + p_{n+1}(t)\mu_{n+1} + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}$

A dodělám kraje:

$p'_0(t)$ = "nic se nerozbije" + "jeden jsem opravil ve stavu 1"

$p'_0(t) = - M\lambda\ p_0(t) + p_1(t)\mu$

$p'_M(t)$ =



$= \mu\ p_M(t) + \lambda\ p_{M-1}(t)$

Řešení rovnic:

$0 = \mu\ p_M + \lambda\ p_{M-1}$

$\Rightarrow p_M = (\mu / \lambda)\ .\ p_{M-1}$

…

$$p_n = \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$p_{M-n} = M!\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{1}{n!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n p_0$$ (dosadili jsme M-n za n)

$$1 = p_0 \, M! \, (\tfrac{\lambda}{\mu})^M \sum_{n=0}^{M} \tfrac{1}{n!} (\tfrac{\mu}{\lambda})^n$$

protože $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$ tak platí i:

$$1 = p_0 \, M! \, (\tfrac{\lambda}{\mu})^M e^{\mu/\lambda}$$

Jediný rozdíl proti parkovišti je ve změně významu λ a μ (zaměnili jsme je - tj. **inverze parkoviště**).
Takže očekáváme zase useknutého Poissona: UPo(μ / λ) .

$p_M = M!(\tfrac{\lambda}{\mu})^M$ slouží jako normalizační konstanta UPo.

Problém mnoha opravářů a mnoha strojů

Příklad 5.3. Předpokládejme, že v nějaké dílně pracuje celkem N strojů stejného typu. V libovolném okamžiku může nastat porucha kteréhokoliv stroje, a tedy potřeba jej opravit. Dále předpokládejme, že se o stroje stará r opravářů, přičemž se na opravě podílí vždy jen jeden opravář. Stroj se v případě poruchy začne okamžitě opravovat, pokud je ovšem některý z opravářů volný. Porouchá-li se stroj v okamžiku, kdy jsou všichni opraváři zaměstnáni, musí se čekat, až se některý z nich uvolní.

Stroj, který pracuje v čase t, se během krátkého časového intervalu $(t, t+h)$ porouchá s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, kde $\lambda > 0$ je konstanta a $o(h)$ představuje nekonečně malou veličinu řádu vyššího než h, pro níž

platí $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$. Stroj, jenž se v čase t opravuje, bude uveden do provozu během časového intervalu $(t,t+h)$ s pravděpodobností $\mu h+o(h)$, kde $\mu>0$ je konstanta.

Předpokládejme, že v čase t je mimo provoz právě j strojů. Počet strojů mimo provoz je zřejmě náhodná veličina s binomickým rozdělením. Proto platí:

- Pravděpodobnost $p_{j,j+1}(h)$, že se počet strojů, které nepracují, zvětší během intervalu $(t,t+h)$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, jež v čase t pracují, tj.
$$\binom{N-j}{1}\big(\lambda h+o(h)\big)^1\big(1-\lambda h+o(h)\big)^{N-j-1}\approx(N-j)\lambda h+o(h),\ 0\le j<N.$$
- Pravděpodobnost $p_{j,j-1}(h)$, že se jejich počet v intervalu $(t,t+h)$ zmenší o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které jsou v čase t opravovány, tj.
$$\binom{j}{1}\big(\mu h+o(h)\big)^1\big(1-\mu h+o(h)\big)^{j-1}\approx j\mu h+o(h),\ 1\le j\le r,$$
resp.
$$\binom{r}{1}\big(\mu h+o(h)\big)^1\big(1-\mu h+o(h)\big)^{r-1}\approx r\mu h+o(h),\ r<j\le N.$$
- Pravděpodobnost, že se počet nepracujících strojů změní v intervalu $(t,t+h)$ o více než ± 1, je řádově $o(h)$.

Označme $X(t)$ počet nepracujících strojů v čase t. Pak $\{X_t,t\ge 0\}$ je konečný Markovův řetězec se spojitým časem. Pro příslušné dílčí intenzity přechodu (viz věta 5.6 a následující poznámka) dostaneme

$$q_{j,j+1}=(N-j)\lambda,\ 0\le j<N,$$
$$q_{j,j-1}=j\mu,\ 1\le j\le r,$$
$$q_{j,j-1}=r\mu,\ r<j\le N,$$
$$q_{jk}=0 \text{ ve všech ostatních případech.}$$

Celkové intenzity přechodu určíme analogicky s využitím věty 5.6 a poznámky následující za větou 5.7

$$q_0=N\lambda,$$
$$q_j=(N-j)\lambda+j\mu,\ 1\le j\le r,$$
$$q_j=(N-j)\lambda+r\mu,\ r<j<N,$$
$$q_N=r\mu.$$

Tím je plně určena matice intenzit přechodu $\mathbf{Q}$ pro uvažovaný Markovův řetězec, protože platí $q_{jj}=-q_j$ pro všechna $j=0,1,\ldots,N$. Spočteme

příslušné limitní pravděpodobnosti. Soustava lineárních algebraických rovnic (5.3) má tvar

$$
\begin{aligned}
&-N\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0,\\
&(N-j+1)\lambda\pi_{j-1} - \big((N-j)\lambda + j\mu\big)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1} = 0,\ 1 \le j < r,\\
&(N-j+1)\lambda\pi_{j-1} - \big((N-j)\lambda + r\mu\big)\pi_j + r\mu\pi_{j+1} = 0,\ r \le j < N,\\
&\lambda\pi_{N-1} - r\mu\pi_N = 0.
\end{aligned}
$$

Řešením uvedené soustavy dostaneme

$$
\begin{aligned}
\pi_j &= \binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0,\ 1 \le j < r,\\
\pi_j &= \frac{N(N-1)\ \ldots\ (N-j+1)}{r!\ r^{j-r}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0,\ r \le j \le N.
\end{aligned}
$$

Model popisující práci několika svářečů

Příklad 15. Mějme N svářečů, kteří nezávisle na sobě ve víceméně náhodných intervalech odebírají proud. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, jestliže pracuje právě n svářečů.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že svářeč který je v čase t pracuje, přestane pracovat v intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky sváření jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že svářeč, který v čase t nepracoval, v intervalu $(t, t+h)$ pracovat začne, je rovna $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí binomickým rozdělením $Bi\big(N, \mu/(\mu+\lambda)\big)$

$$p_n = \binom{N}{n}\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{N-n}\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Řešení(tuetchek):

Mám a svářečů, pokud svářeč nepracuje, začne pracovat s intenzitou λ, při práci s intenzitou μ přestane.

$$\lambda_n = (a-n)\lambda \qquad \mu_n = n\mu \qquad p_n = \binom{a}{n}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{a-n}\left(1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n}$$

Intenzity jdou „proti sobě“, ovlivňují se navzájem. Výsledné rozdělení je binomické.

Příklad 16. Mějme látku A (reagent), jejíž molekuly se nevratně přeměňují v molekuly látky B (produkt), přičemž rychlost reakce je dána konstantou $\kappa > 0$. Nechť koncentrace reagentu A v čase t je představována náhodnou veličinou $X(t)$, přičemž $X(0) = n_0$.

Z fyzikální podstaty předpokládejme, že:

- Pst jevu, že se změní jedna molekuly za $(t, t+h)$ v případě, kdy se za čas $(0, t)$ změnilo právě $n_0 - n$ molekul, je $n\kappa h + o(h)$.
- Pst změny více než jedné molekuly za $(t, t+h)$ je nulová.
- Látky A a B jsou statisticky nezávislé.
- Inverzní reakce $B \to A$ nastává s pravděpodobností nula.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí binomickým rozdělením $Bi(n_0, e^{-\kappa t})$.

Úkol
Popište pravděpodobnostní model kinetiky chemické reakce, při níž se molekuly látky A přeměňují nezvratně v molekuly látky B.

Řešení
Mějme látku A (reagent), jejíž molekuly se nezvratně přeměňují v molekuly látky B (produkt), přičemž rychlost reakce je určena konstantou $\kappa > 0$. Nechť koncentrace reagentu A v čase t je představována náhodnou veličinou X(t) a nechť $X(0) = n_0$. Fyzikální podstata unimolekulárních reakcí je základem pro následující předpoklady:

1. Pravděpodobnost toho, že se změní jedna molekula za dobu (t, t + h), je-li známo, že za dobu t se změnilo právě $n_0 - n$ molekul je rovna $\kappa n h + o(h)$.
2. Pravděpodobnost toho, že se přemění více než jedna molekula za dobu (t, t + h) je o(h).
3. Látky A a B jsou statisticky nezávislé
4. Inverzní reakce A $\rightarrow$ B nastává s pravděpodobností 0.

Jev X(t) = n znamená, že v okamžiku t je celkem n molekul látky A (reagentu). Situace, kdy v okamžiku t + h je n molekul látky A, může nastat třemi vylučujícími se způsoby.

1. V čase t bylo n + 1 molekul reagentu a za dobu (t, t + h) došlo k jedné změně (s pravděpodobností $\kappa(n+1)h + o(h)$).
2. V čase t bylo n molekul látky A a za dobu (t, t + h) nedošlo ke změně (s pravděpodobností $1-\kappa nh+o(h)$).
3. V čase t bylo n + κ molekul látky A, za dobu (t, t + h) došlo ke změnám (s pravděpodobností $o(h)$).

Odtud plyne, že pro n = 1, 2, 3, ... $n_0 - 1$ platí pro pravděpodobnosti

$$P_n(t) = P(X(t) = n)$$

$$P_n(t+h) = (\kappa(n+1)h + o(h))P_{n+1}(t) + (1 - \kappa nh + o(h))P_n(t) + o(h)$$

Upravíme na tvar:

$$\frac{1}{h}(P_n(t+h) - P_n(t)) = -\kappa n P_n(t) + \kappa(n+1)P_{n+1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Přejdeme-li na obou stranách k limitě $h \leftarrow 0$, je limita posledního sčítance na pravé straně rovna nule, tedy existuje limita pravé strany a také limita levé strany této rovnosti. Dostaneme:

$$P_n^{'}(t) = -\kappa n P_n(t) + \kappa(n+1)P_{n+1}(t) \qquad (\mathbf{1})$$

pro n = 1, 2, 3, ... $n_0 - 1$.
Jev $X(t) = n_0$ nastane pouze jedním možným způsobem: v čase t je n_0 molekul reagentu a za dobu (t, t + h) nedojde ke změně (s pravděpodobností $\kappa n_0 h + o(h)$). Proto:

$$P_{n_0}(t+h) = P_{n_0}(t)(1 - \kappa n_0 h + o(h))$$

a odtud stejným postupem jako výše:

$$P_{n_0}^{'}(t) = -\kappa n_0 P_{n_0}(t) \qquad (\mathbf{2})$$

Rovnice (1) a (2) se řeší za počátečních podmínek $P_n(0) = 1$ pro n = n_0, $P_n(0) = 0$ pro n $\neq n_0$. Tyto rovnice tvoří konečný systém, který lze řešit postupně. Řešíme nejprve rovnici (2):

$$P_{n_0}(t) = ce^{-\kappa n_0 t}$$

a konstantu c určíme z počátečních podmínek, dostaneme c = 1 a tedy:

$$P_{n_0}(t) = e^{-\kappa n_0 t}$$

Z rovnic (1) vyřesíme nejprve rovnici pro n = n_0 - 1, potom pro n = n_0 - 2 atd. Řešení (1) a (2) je následující:

$$P_n(t) = \binom{n_0}{n} e^{-\kappa n_0 t}(e^{-\kappa t} - 1)^{n_0 - n} = \binom{n_0}{n} e^{-\kappa n t}(1 - e^{-\kappa t})^{n_0 - n} \qquad n = 0, 1, \ldots, n_0$$

tj. pravděpodobnosti $P_n(t)$ se řídí binomickým rozdělením s parametry n_0, $e^{-\kappa t}$, Bi(n_0, $e^{-\kappa t}$). Pro střední hodnotu a rozptyl koncentrace X(t) reagentu potom platí:

$$EX(t) = n_0 e^{-\kappa t}$$

$$D^2X(t) = n_0 e^{-\kappa t}(1 - e^{-\kappa t})$$

fyzikální systém → náhodné změny v čase
(rozpad atomů, elektron ústředna)

$p_n(t)$ – pst, že za dobu t nastalo právě n změn

předpoklady:
- stacionární proces
- bez ohledu na počet změn v $(0,t)$: → 1 změn za $(t,t+h)$ pst $\lambda h + o(h)$ $\lambda > 0$
  → 2 a více změn – pst $o(h)$

Pozn.: To co nastalo předtím nemá vliv!
($\dots$ v $(0,t)$ $(t,t+h]$ jsou nezávislé)

Úlohy: 1) Rozsavte diferenciální rovnice pro $p_n(t)$
2) Ukažte, že $p_n(t) \sim P_0(\lambda t)$

Řešení 1: $\underset{\sim}{p}(t) = \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$ ← absolutní pravděpodobnosti

$P_i(t)$ – v čase t nastal stav i
$S = \{0,1,-3\}$ (např.: nastalo i změn)

$\underset{\sim}{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & \ddots \\ \vdots & \end{pmatrix}$ → matice přechodu (smysl jen pro stavy z N)

$p_{ij}(t)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j v čase t.

$\sum_j p_{ij}(t) = 1 \quad \forall i$

$\{N(t), t \geq 0\}$ → vnější počet změn

$p_n(t) = P(N(t) = n)$

$p_{ij}(h) = P(N(h) = j \mid N(0) = i)$ ← stacionarita

$= P(N(t+h) = j \mid N(t) = i) \quad \forall t \geq 0$

Matice intenzit (smysl jen pro stacionární proces, viz e nebere v úvahu t)

$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots \\ q_{10} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$ $\quad q_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}$, $i \neq j$, $q_{ii} = -\lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$

definiční věc

Kolmogorovy diferenciální rovnice

- $[\underset{\sim}{p}^T(t)]' = \underset{\sim}{p}^T(t) Q$ → derivace po složkách → vždy konvergují (pro nekonečné $\underset{\sim}{p}(t)$)
- retrospektivní: $\underset{\sim}{P}'(t) = Q \cdot \underset{\sim}{P}(t)$
- ——— II ———: $\underset{\sim}{P}'(t) = \underset{\sim}{P}(t) \cdot Q$

Na to abychom spočetli Q, potřebujeme?

$p_{ij}(h) = ?$

$p_{j,j+1}(h) = \lambda h + o(h)$ – přibyl 1 změna

$p_{ij}(h) = \begin{cases} o(h) & j > i \\ 0 & j < i \end{cases}$ $i \neq j$ & $j \neq i+1$

(Pro $j < i$ je $p_{ij}(h) = 0$ ... počet událostí nemůže klesat)

$p_{j,j}(h) = 1 - \lambda h + o(h)$

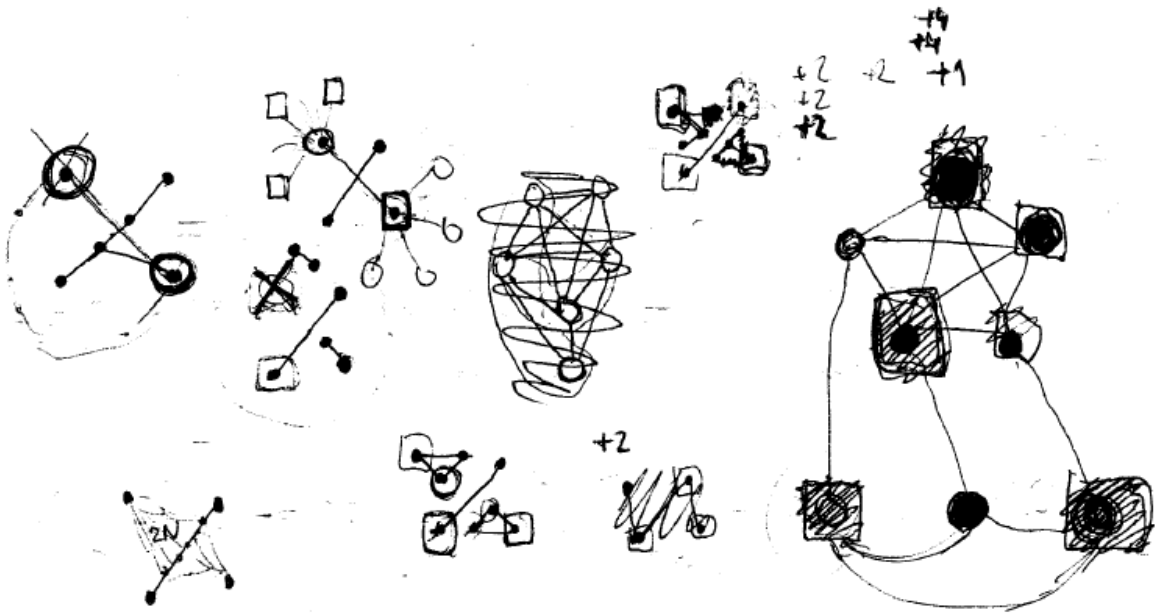
$q_{j,j+1} = \lambda$ $q_{ij}(h) = 0$ $i \neq j$ & $j \neq i+1$ $q_{jj} = -\lambda$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \\ & -\lambda & \lambda & 0 \\ & & -\lambda & \lambda \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$p^T(t) \cdot Q \rightarrow$ $p_0'(h) = p_0(h) \cdot (-\lambda)$

$p_h'(h) = \lambda \cdot p_h(h) - \lambda \cdot p_{h-1}(h)$; $h \geq 1$

② Řešíme vytvořující fcí nebo pomocí (trikově)



Fungující, rozbitý

Příklad. Mějme systém, který může být ve dvou stavech – fungující, rozbitý. Intenzita poruchy je λ (střední doba poruchy $\frac{1}{\lambda}$), střední doba opravy $\frac{1}{\mu}$.

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Oficína se dvěma židlemi v pipelině

Příklad (Oficína se dvěma židlemi v pipelině). Mějme model oficíny se dvěma židlemi bez fronty. Stavy budou (0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (W,1), kde 1 indikuje obsazenost a W čekání. Příchody zákazníků mají intenzitu λ, doba na 1. židli μ_1, doba na 2. židli μ_2.

modelovat vyrobu kried, kde chceme byt informovany warningom, ak sa dlzka kriedy privelmi odchyli od pozadovanej hodnoty (2)

Zadání: Ja som dostal ulohu "modelovat vyrobu kried, kde chceme byt informovany warningom, ak sa dlzka kriedy privelmi odchyli od pozadovanej hodnoty."
Varianty: něco povídal o kvalitě a takové ty víceúrovňové warningy... Zadání jsem neslyšel.
Řešení:

- **Hint:** V poznamkach z cviceni sa nachadza ocakavana odpoved.

Proces

Zadání: Kolega predomnou dostal za ulohu, tusim (ale mozno strasim 🙂), zostrojit diferencialne rovnice pre proces, v ktorom boli mozne priame prechody i do stavov inych ako len do n+1, n-1 (kde n je sucasny stav). Tj proces, ktory nemozno priamo namodelovat birth-death procesom.

5.2 Poissonův proces jako model zrodu a zániku

Teorie

Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost jevu, že za dobu *t* nastalo *n* změn (např. rozpad atomů). Předpokládejme, že proces je **stacionární** (nezávisí na poloze a délce intervalu) a bez ohledu na historii pravděpodobnost jedné změny za čas *h* je $\lambda h + o(h)$, více změn $o(h)$.

Čítací proces - stochastický proces $t \geq 0$, N(t) = # událostí v intervalu [0,t]

- např.: události - proces příchodu a náh. veličiny Xi (doby mezi příchody)
- □ stochastický = náhodný, opak deterministického

Poissonův proces(☠)

- **Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$** je čítací proces { N(t), $t \geq 0$ } takový, že
    - $N(0) = 0$
    - přírůstky jsou nezávislé náhodné veličiny
        - tzn: každé dva disjunktní časové intervaly mají stejnou distribuci
    - přírůstky jsou stacionární
        - tzn: rozdělení počtu událostí v intervalu I záleží pouze na délce tohoto intervalu, nikoliv na hodnotě procesu v čase, kdy I začíná
    - $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ & $P(N(h) \geq 2) = o(h)$ pro $h \to 0$
        - tzn: za krátký čas. úsek se stane povětšinou jen 1 událost (podobně jako v předch. modelech)
- **Pozn.(☠ vztah stř.hodnoty a intenzity):** Poissonův proces má stacionární přírůstky a EN(t) = λt.
    - □ takže rozptyl by měl být také: var N(t) = λt
- **Pozn.:** Výsledek, že N(t) se řídí Poissonovým rozdělením, je důsledkem aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým.
- **V5.3:** $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$
    - tj. pst že nenastane žádná událost klesá exponenciálně
- **V5.4:** Doba mezi událostmi ~ Exp(λ).
    - (v homogenním Poissonově procesu)
- **V5.5:** Doba čekání na n-tou událost ~ Γ(n, λ).
- **V5.6:** Počet událostí v intervalu délky t ~ Po(λt).

Teoretické (5)

- poisonovo rozdeleni -> poisonuv proces
- (2x) homogenní Poissonov proces
- generacni proces (ten model generaci...)
- V mojom pripade som dostal Poissonov proces.
    - Zpisal som mu tri definicie,
    - ukazal, ze je to homogenny Markov retazec,
    - vyratal intenzity a
    - spomenul Kolmogorove differencialne rovnice (ku ktorym sme sa napokon ani nedostali).
    - P.Antoch sa ma neustale pytal na rozne zakladne otazky, ako napriklad, aky je vztah medzi intenzitou a strednou hodnotou, ako vyratam rozptyl Poissonovho rozdelenia a pod. Mam pocit, ze p.Antoch sa snazi zistit, ci rozumiete pravej podstate problemu a v pripade, ze nerozumiete, tak vam nepomoze ani milion vzorcov, ktore mate na papieri.
- Poissonův proces:
    - - napsal jsem definic + popsal slovně co co znamená
    - - větu o tom, že doba čekání na událost exponenciálně klesá (tady jsme se zastavili nejdéle, protože chtěl vědět jaký je vztah mezi počtem událostí v čase a časem mezi událostmi)
    - a to mu ve směs stačilo (měl jsem tam ještě napsanou dif. rovnici a matici intezit + jak se vypočítá, ale na to se jenom koukl v krátkosti bez komentáře)

Příklady

Server

Příklad. Mějme server, na který chodí málo časté požadavky s intenzitou $\lambda = 1/\text{den}$. Určete (a) střední dobu do příchodu 10 požadavků a (b) pravděpodobnost, že mezi 10. a 11. požadavkem jsou dva dny.

(a) Doby čekání na požadavky T_i mají exponenciální rozdělení, a tedy střední hodnotu $1/\lambda = 1$. Odtud $E[S_{10}] = \sum_{i=1}^{10} E[T_i] = 10 \cdot 1 = 10$

(b) Z Věty 5.4:

$$P(T_{11} - T_{10} > 2) = P(T_i > 2) = e^{-\lambda t} = e^{-2}$$

Server 2

Příklad. Mějme server, na který chodí požadavky s intenzitou $\lambda = 10/\text{hodina}$, s pravděpodobností $p = 1/12$ jsou šifrované, s pravděpodobností $11/12$ nešifrované. Určete pravděpodobnost, že za 1 den nepříjde žádný šifrovaný požadavek.

Označme T_i dobu čekání mezi šifrovanými požadavky. Šifrované požadavky mají intenzitu $\lambda_{\check{s}} = \frac{10}{12}$ za hodinu a jeden den má 24 hodin. Z Věty 5.4:

$$P(T_1 > 24) = e^{-24\lambda_{\check{s}}} = e^{-20}$$

5.3 Systémy hromadné obsluhy

Teorie

Systém hromadné obsluhy

- je systém, kde je
    - alespoň jedna paralelní stanice obsluhy
        - přicházejí zákazníci, kteří obsluhu požadují a po obsloužení systém opouštějí

- zákazníci, kteří nemohou být (okamžitě) obslouženi se řadí do jediné fronty,
- doby mezi příchody (po sobě jdoucích) zákazníků jsou i.i.d. veličiny ~ *A*
- doby obsluhy jsou i.i.d. veličiny ~ *B*

- Rozdělení *A* je typicky exponenciální (Markovian), deterministické (Deterministic), obecné (General), Erlangovo (Erlang tj. Gama).
- **Systém M/M/x (☠)** - systém hromadné obsluhy s příchody zákazníků řídícími se homogenním Poissonovým procesem a dobami obsluhy s exponenciálním rozdělením.
  - *x* odpovídá počtu obslužných stanic:
    - M/M/1:
      - $\lambda_n = \lambda$ $0 \le n < \infty$
      - $\mu_n = \mu$ $1 \le n < \infty$
      - limitní pst pn ~ Ge(1 − λ/μ)
    - M/M/c:
      - $\lambda_n = \lambda$ $0 \le n < \infty$
      - $\mu_n =$
        - $n\mu$ $0 \le n \le c$
        - $c\mu$ $c \le n < \infty$
      - limitní pst pn ~ UPo(c + 1, λ/μ)
    - M/M/∞:
      - $\lambda_n = \lambda$ $0 \le n < \infty$
      - $\mu_n = n\mu$ $1 \le n < \infty$
      - limitní pst pn ~ Po(λ/μ)
  - **V5.7(☠):** Systémy M/M/x lze popsat obecným procesem zrodu a zániku
    - (*x* obslužných stanic, nekonečná fronta).
  - **V5.8(☠):** Pro systém M/M/c platí, že odchody ze stabilizovaného systému (s neomezenou frontou) s parametry λ, μ jsou opět popsány homogenním Poissonovým procesem s parametrem λ.
    - **Pozn.:** Systémy M/M/c se dají dobře kombinovat a za předpokladu stabilizovatelnosti popsat vhodným Markovským procesem.
  - **Pozn.:** Pro systém M/M/1 platí, že
    - Střední počet zákazníků v systému je $\frac{\lambda}{\mu}/(1-\frac{\lambda}{\mu}) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
    - Rozptyl počtu zákazníků je $\frac{\lambda}{\mu}/(1-\frac{\lambda}{\mu})^2$
    - Střední délka fronty je $(\frac{\lambda}{\mu})^2/(1-\frac{\lambda}{\mu})$.
  - **Pozn.:** Doba T_n strávená zákazníkem, který se v systému M/M/1 zařadil jako n-tý řídí gamma rozdělením Γ(n+1, μ). Je to součet dob jeho obsluhy a obsluh zákazníků před ním

    $$T_i \sim Exp(\mu),\ \sum_{i=0}^{n} T_i \sim \Gamma(n+1, \mu)$$
  - **Pozn.:** M/M/1 + M/M/1 = tandem
    - tj. sériové propojení dvou systémů M/M/1 se nazývá **tandemové uspořádání**.

Teoretické

- M/M/x fronty
  - Moc jsem radost z M/M/x nemel, jen jsem si to asi dvakrat v rychlosti prolitnul ve slajdech a moc jsem o tom nevedel. Po priprave jsem si rikal, ze to asi vzdam, protoze jsem toho mel minimum:
    - jen definice o co jde,
    - ze to vede na proces zrodu a zaniku,
    - deleni na M/M/1,c,nekonecno,
    - rozdeleni limitnich pravdepodobnosti jsem jen mel jake je to rozdeleni bez parametru

a to jeste jedno spatne).
    - Antoch si to vzal, zacal mi upravovat nepresnosti a vytahoval ze me dalsi informace.
    - Takze jsme se dostali k intenzite, rekl jsem mu jak je definovana (f(x)/1 - F(x)), ze prevracena hodnota bude stredni doba cekani,
    - ze exponencialni rozdeleni ji ma jako jedine konstantni.
    - Pak jsme se dostali k intenzite v zavislosti na stavu systemu a velikosti fronty a mozna letmo jeste par detailu.
    - Z temer niceho co jsem mel na papire ze me prof. Antoch dostal povrchni znalost problematiky a nakonec jsem odesel s trojkou, ale byla dost s vyhradami, nekolikrat mi bylo zopakovano, ze lepsi to rozhodne nebylo. Kdybych se mel hodnotit ja sam, tak bych se skoro urcite vyhodil…
- M/M/c fronty

  Ja som dostal priamo M/M/c s neobmedzenou frontou.
  Napisal som:
  - situacia sa modeluje pomocou birth-death procesu
  - definiciu birth-death procesu, diferencialne rovnice i s konkretnymi hodnotami lambda_n a mju_n
  - odvodenie invariantneho/stacionarneho rozdelenia

  Antoch sa ma pytal, ako by som diferencialne rovnice odvodil. Napisal som mu:

  $$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda_n h-\mu_n h)+P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}h)+P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}h)+o(h)$$

  $$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = P_n(t)(-\lambda_n-\mu_n)+P_{n+1}(t)\mu_{n+1}+P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}+\frac{o(h)}{h}$$

  Teda pre h->0:

  $$P_n'(t) = P_n(t)(-\lambda_n-\mu_n)+P_{n+1}(t)\mu_{n+1}+P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}$$

  S tym bol spokojny. Este som mu spomenul, ze rovnicu stacionarneho rozdelenia:

  $$v_n(\lambda_n+\mu_n) = v_{n+1}\mu_{n+1}+v_{n-1}\lambda_{n-1}$$

  .. mozno intuitivne interpretovat ako "celkova intenzita odchodov zo stavu = intenzita vstupov do stavu". S tym Antoch suhlasil, no tento fakt ho velmi nezaujal. Odisiel som s jednotkou.

Příklady

2 systémy M/M/1 zapojené za sebou

Příklad. Mějme dva systémy M/M/1 zapojené za sebou, intenzita příchodů je λ, intenzita odchodů z prvního systému μ_1, z druhého μ_2. Stavy budou (i, j), kde $i, j \geq 0$ jsou počty zákazníků v systému. Pro limitní rozdělení dostanem soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda p_{0,0} + \mu_2 p_{0,1} \\
0 &= -(\lambda + \mu_1) p_{m,0} + \mu_2 p_{m,1} + \lambda p_{m-1,0} \\
0 &= -(\lambda + \mu 2) p_{0,n} + \mu_2 p_{0,n+1} + \mu_1 p_{1,n-1} \\
0 &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{m,n} + \mu_2 p_{m,n+1} + \mu_1 p_{m+1,n-1} + \lambda p_{m-1,n}
\end{aligned}
$$

Jako řešení rovnic by zřejmě mělo vyjít

$$
p_{m,n} = \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right)}_{M/M/1} \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)}_{M/M/1}
$$

za předpokladu, že vstup do druhé linky má intenzitu λ, což se dá ukázat, že platí. Pro praktické použití je nutný předpoklad $\lambda \ll \mu_1 + \mu_2$.

X. K roztřídění

Teoretické otázky

mohu potvrdit, skutecne nechce vzorce (stacilo rict jak bych to pocital), ale chce vedet proc to co delate vubec delate a take si u vseho dobre rozmyslete proc to muzete udelat - to jsou veci, po kterych jde a ze kterych pozna ze to umite. Jinak jak uz bylo receno milionkrat, je strasne hodnej, nedepta (pokud teda nekoho nedepta "ted rikate voloviny":)) a snazi se pomoc. Nicmene nic neda zadarmo (no dobre trojky mozna jo:))

- pst jevu "ZZZ"
- Šíření virů
    - Množení virů (větvící procesy - viz hroznýši na cvičení)
- Pokladna s frontou
- (2x) Větvící se procesy. Myslim, ze 3. v poradi sa postazoval, ze tie vetviace sa procesy sa nemal odkial naucit, v tom som sa ho zastal 😃, ale vecer pred skuskou som nasiel tento pekny link:http://prf.osu.cz/doktorske_studium/dokumenty/Random_Processes.pdf, kde je to celkom pekne popisane a myslim, ze v tom rozsahu to na prelezenie v pohode staci.
    -
- (3x) Fronty
    - Fronty (ukazat priklad a odvodit proc maji takove vlastnosti jako maji)
- (3x) off-line testovanie (teorie)
    - Ja som mal konkretne offline, a ma prekvapilo kolko malo mu k tomu trebalo. Som to zadefinoval, vysvetlil ako postupujem v pripade ze mam zname 'm' tj krok v ktorom sa zmenia lambdy. Potom som pokracoval Metodou Maximalnej Verohodnosti kde som zapisla

vzorec podla, ktoreho sa rozhodujeme ci hypotezu zamietneme alebo nie. Problem nastal potom ked som sa snazil odhadnut samotne lambdy pre Hypotezu a Alternativu. Napisal som mu to tam ale nejak som nevedel presne odvodit skadial ich mam. Takze mi to nakoniec toto okolo toho vysvetlil a bolo to. Vo variante kde 'm' nepoznam som mu len jednou vetou a potom ustne vysvetlil ze to hladame pre m=1..n a potom hladame max(MMV).

- (3x) on-line testovanie (teorie)

Příklady

- nejaky turingov stroj ktory sa moze hybat iba o +1. Problem je v tom ze je to v binarnom takze tam su pretecenia. Moc som o tom nevedel som to len pocul ked som odchadzal, ale asi nieco na markovove retazce.
- Je vyssi pravdepodobnost, ze padne 6 x Z nez NZNZNZ ?

Jinak poopravim, dokonce se davaly aj rozdeleni...temata se necyklikla...snad jenom obcas se dostali do pribuznych rovin (poisonovo rozdeleni -> poisonuv proces o par otazek dale). Jedine co je trosku neprijemne je cekani .. zacatek ve 14, konec v 19 hodin (plne obsazeny termin). JInak Antoch moc mily...ja zacal psat..a sebral mi papir...tak jsem mu rekl, co mam, zacal mluvit, co jeste dopsat...nacez mi rika..je videt, ze tohle naucene mate...prejdem k prikladu...tak jsem mu vysvetlil ty nahodne prochazky po primce, rekl ze na neco jsou vety (vsechny cisla ekvivalentni dle vety o dosazitelnosti ekvivalentnich stavu) a napsal vzorec..(ten jsem trosku popletl) a za 10 minut jsem byl ven. Celkove spokojenost...vazne moc mily pan.

rovnici obnovy,