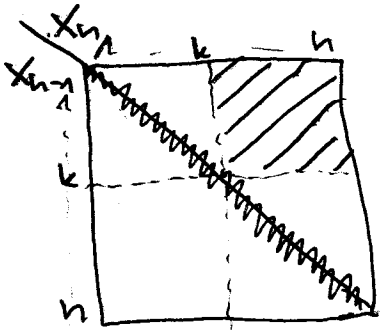
CVIKO (1)

n .. prvků
Očekění jsou nerůzná čísla $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$
prvky jsou uspořádány náhodně $\left(\frac{1}{n!}\right)$
každý prvek určí právě jedna a tím
zjistím jeho cenu
Úkol: Navrhněte strategii, která dovolí získat „nejlepší prvek"
s co největší pravděpodobností.

1) Projdu všech, různých u předchozího: $P(\text{best}) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!} \to 0$ $n \to \infty$
(u i-tého)

? Neexistuje strategie taková, že $P(\text{best}) > 0$ $n \to \infty$?

2) Vynecháme k a vezmeme prvního lepšího než předtím
Optimum je k.
Optimum: není k je dobrý největší, najdeme tedy v něm největší
(je mezi jedna kde když další prvky) → pro $n \to \infty$



$P(\text{best}) = \frac{(n-k+1)\cdot k}{n^2 - n}$ (hrubší odhad)
< diagonála

(Derivace: $n - 2k + 1 = 0$
$k = \frac{n+1}{2}$) $P(\text{best}) \approx \frac{1}{4}$

Ben-ti v čísle i další: x_{n-2} — $P(\text{best}) > \frac{1}{4}$.

Nejlepší je $\approx \frac{1}{e}$ (ten samý algoritmus).

X ... umístění optima

$P_k(\text{best}) = \sum_{i=1}^{n} P(\text{best} \mid X_i) \cdot \underbrace{P(X_i = i)}_{1/n}$ =
Věta o úplné pravděpodobnosti

$P(\text{best} \mid X = i) \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, k \\ \frac{k}{i-1} & \end{cases}$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k}{i-1} = \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1} = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} =$

$\approx \frac{k}{n} \int_{k}^{n-1} \frac{1}{x} dx = \frac{k}{n} \left(\ln n - \ln k\right) =$

$= \frac{k}{n} \cdot \ln \frac{n-1}{k} =$

$\approx \frac{k}{n} \cdot \ln \frac{n}{k} =$

nejlepší není $i-1$ musí být mezi prvními k!!! $\frac{k \cdot (i-k-1)!}{(i-1)!} = \frac{k}{i-1}$

Extrém? $\left(\frac{x}{n} \cdot \ln \frac{n}{x}\right)' = \frac{1}{n} \ln \frac{n}{x} + \frac{x}{n} \cdot \left(-\frac{n}{x^2}\right) =$

$= \frac{1}{n} \ln \frac{n}{x} - \frac{1}{n}$

$\ln \frac{n}{x} = 1 \to \frac{n}{x} = e \to x = \frac{n}{e}$

$\frac{n}{e} \cdot \ln \frac{n}{\frac{n}{e}} = \boxed{\frac{1}{e}}$

$\frac{1}{n} \ln \frac{n}{x}$

$n^2 = \left(\ln \frac{n}{x}\right) \cdot x^2 \sim n^2 = \ln \left(\frac{n}{x}\right)^{x^2} \cdot e^{n^2} = \left(\frac{n}{x}\right)^{x^2} \sim x = \frac{n}{e}$

$X \sim Po(\lambda)$

$P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ $x = 0,1,2\ldots$ je to umělé rozdělení

$EX = \lambda$ $\operatorname{var} X = \lambda$ $\left(A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}x^k = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda x} = e^{\lambda\cdot(x-1)}\right.$

$\left. A'(1) = \lambda\right)$

$X \sim Po(\lambda_1)$
$Y \sim Po(\lambda_2)$ $\Rightarrow X_1+X_2 \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$ $\left(A(x)\cdot B(x) = e^{\lambda_1\cdot(x-1)+\lambda_2\cdot(x-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(x-1)}\right)$

Po ... limitní rozdělení řady urnových schémat

$Z \sim Bi(n,p)$ $P(Z=k) = \binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ $n\to\infty$, $p_n\to 0$, $np_n\to\lambda$ ($p_n \approx \frac{\lambda}{n}$) → Herds se aproximuje $Po(\lambda)$

$\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{k!}\underbrace{np}_{\lambda}\underbrace{(n-1)p}\cdots\underbrace{(n-k+1)p}_{\lambda}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}_{e^{-\lambda}} \approx \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

$k \ll n$

Urnové schéma:

1) n ... přihrádek (jsou rozlišitelné)
k ... kuliček
náhodně přiřadit kuličky do přihrádek (každé přiřazení má stejnou šanci nastat)
$\frac{1}{n^k}$ (pro každou kuli mám n možností)
$P(\text{první přihrádka prázdná}) = \frac{(n-1)^k}{n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^k$
$P(\text{první ... právě } j \text{ kuliček}) = \frac{\binom{k}{j}\cdot(n-1)^{k-j}}{n^k} = \binom{k}{j}\left(\frac{1}{n^j}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-j} \to Bi\left(k, p=\frac{1}{n}\right)$
$j = 0,1,\ldots,k$

↳ $\frac{k}{n} \approx \lambda$ pak $k\to\infty$, $p = \frac{1}{n} = \frac{\lambda}{k} \to 0$ $p\cdot k = \frac{1}{n}\cdot k = \lambda$ $\Rightarrow Po\left(\frac{k}{n}\right)$

Šatnářka: $P(\text{nikdo nemá svůj klobouk})$
A_i -- i-tý člověk má svůj klobouk
UA_i -- alespoň jeden -11-
$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ ... nikdo nemá

$P(UA_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \ldots$ $P(\bar{A}) = 1-P(A)$

$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ $i<j$ $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\ldots\cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$

$P\left(\overline{UA_i}\right) = 1 - n\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n\cdot(n-1)} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)} - \ldots \approx \frac{1}{e} = \frac{k_n 0}{n!}$

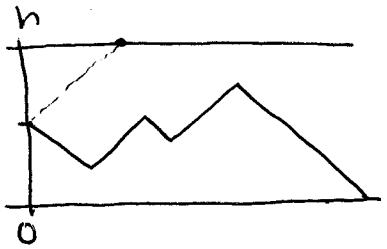
$P(\text{Právě } k \text{ má svůj klobouk}) = P(\text{vybereme } k, \text{zbytek nemá svůj klobouk}) = \frac{\binom{n}{k}\cdot(n-k)!\cdot K_{n-k,0}}{n!} =$

$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}\cdot K_{n-k,0} = \frac{1}{k!}\cdot K_{n-k,0} \to$ Dostanu se k $Po\left(\lambda=\frac{1}{e}\right)$

Úloha o zruinování hráče

Ai $\begin{cases} +1 & p \\ -1 & 1-p \end{cases}$ spravedlivá hra $p=1/2$

B $p-i$



$P(A \text{ prohraje vše}) =$

Problém 1. nemám omezenou délku hry

Jde o úlohu náhodné procházky s omezujícími bariérami

Princip podmínění výsledkem 1. hry $1_H \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \Omega$

Všude kde něco sekvenčně běží lze podmínit první hrou.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (1_V \cup 1_P)) = P(A|1_V)\underbrace{P(1_V)}_{p} + P(A|1_P)\cdot\underbrace{P(1_P)}_{q} = P(A)$$

$P(1_V) = p \quad P(1_P) = 1-p = q$

$P(A) = p_{n,i}$ ← s kolika Kč jsem přišel
↑ celkem kolik

$p_{n,i} = p \cdot p_{n,i+1} + q \cdot p_{n,i-1}$ n .. pevné

$p_i = p \cdot p_{i+1} + q \cdot p_{i-1}$ pro $i = 1, \dots, n-1$

Okrajové podmínky: $p_0 = 1 \quad p_n = 0$

Řešení pro $p = \frac{1}{2}$

$2p_i = p_{i-1} + p_{i+1} \;:\; p_2 = 2p_1 - p_0 = 2p_1 - 1 \;\dots\; p_4 = 4p_1 - 3$

A tedy: $p_i = i \cdot p_1 - (i-1)$

$2p_{n-1} = p_{n-2} + p_n = 0 \rightarrow p_{n-1} = (n-1)\cdot p_1 - (n-1-1) = (n-1)\cdot p_1 - n + 2$

$p_{n-2} = (n-2)\cdot p_1 - (n-2-1) = (n-2)p_1 - n + 3$

Tedy $2(n-1)\cdot p_1 - 2n + 4 = (n-2)\cdot p_1 - n + 3 \rightarrow p_1 = \underline{\underline{\frac{n-1}{n}}}$

Čím více je ve hře peněz, tím spíše prohraji.

⇒ Většinou má navrch kasino, má větší buffer peněz.

Špiši .. není rozdělení při

Jaká je situace – pokud máme časový horizont

– Otázka: Měl jsem někdy na pivo?

Máme 2 léky – chci zjistit – který je lepší?

Lze dělat sekvenčně – umím rozhodnout zda lék uzdravil nebo ne. Beru dvojice pacientů přibližně stejně nemocných

$A < {}^{0}_{1} \quad < {}^{0}_{1} \dots \quad \begin{pmatrix} X_1^A \\ X_1^B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2^A \\ X_2^B \end{pmatrix}, \dots$

$B < {}^{0}_{1} \quad < {}^{0}_{1} \dots$

1-pac 2.pac

$X_i^A = \begin{cases} 0 & 1-p_A = q_A \\ 1 & p_A \end{cases} \qquad X_i^B = \begin{cases} 0 & 1-p_B = q_B \\ 1 & p_B \end{cases}$

Otázka: Je $p_A > p_B$?

Kdy zastavíme pokus?

$$\underbrace{|(X_1^A + \dots + X_n^A)}_{\#\text{úspěchů } A} - \underbrace{(X_1^B + \dots + X_n^B)|}_{\#\text{úspěchů } B} \geq \Pi$$ ← jakmile dosáhnu Π, končím

$(X_1^A - X_1^B) + (X_2^A - X_2^B) + \dots$ $\quad Y_i = \begin{cases} +1 & A>B \\ 0 & A\sim B \\ -1 & A<B \end{cases}$

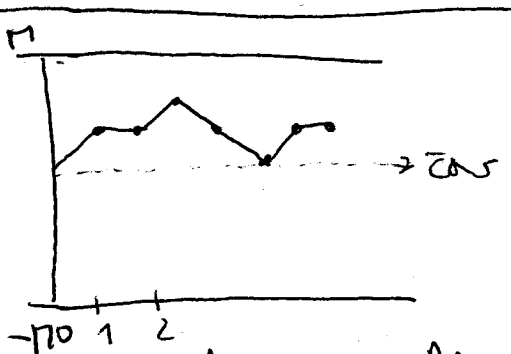
(Y_1, Y_2)

$P(Y_i=1) = P(A=1 \ \& \ B=0) = p_A \cdot q_B$

Toto už připomíná předchozí úlohu

– navíc 0 neovlivní pravděpodobnost doražení, ale pouze dobu

Zavedu $Z_i = \begin{cases} +1 & \frac{p_A q_B}{p_A q_B + p_A \cdot q_A} = p \\ -1 & 1 - \dots = q \end{cases}$



< dráha (algoritmus) A
dráha (algoritmus) B

Cíl – sekvenčně rozhodnout, který je lepší

dvojicím přiřadím náhodně A & B

$|(X_1^A + \dots + X_n^A) - (X_1^B + \dots + X_n^B)| = T$ < námi zvolená konstanta

A < 0 q_1 nevyléčí
1 p_1 vyléčí

B < 0 q_2
1 p_2

A \ B	0	1
0	0	−1
1	1	0

$Y_i = X_i^A - X_i^B \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$

Realizace na: $\begin{bmatrix} X_1^A \\ X_1^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2^A \\ X_2^B \end{bmatrix} \dots$ $\quad P(Y_i=-1) = P(A=0 \ \& \ B=1) = q_1 p_2$ etc.

Úloha o zruinování hráče:

$P_{i,n}$ < i/n $\quad p=q=\frac{1}{2}$

$\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}$ $\quad p \neq q$

$n = 2T$

$P(B>A)$

Stavy, která dají 0 jsou z hlediska doražení horní či dolní meze bezvýznamné

– je to jen posunutá úloha o zruinování hráče o n dolů ☺

– má výsledek pro obecná p, q, ale ta neznám

Jak předem ověřit, kolik bude třeba pokusů.

Udělám si scénář:

$p = p_1 q_2$

$q = p_2 \cdot q_1$

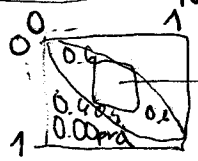
$\neq 1 \Rightarrow$ musíme zhomalizovat na 1

$p = p_1 \cdot q_2 / (p_1 q_2 + p_2 q_1)$ (0.76) $\quad q = p_2 q_1 / (p_1 q_2 + p_2 q_1)$ (0.16) ← NORMALIZACE

$p_1 = 0.6$

$p_2 = 0.4$

$\Rightarrow P(\text{špatné rozhodnutí}) = 0.007$



→ větší pravděpodobnost (dokdy se může zaredlovat)

Rekurentní jevy:

Házíme mincí

padlo r-Z za sebou

$r=1$ .. $Ge(p)$ $\quad \Omega = \{Z, NZ, NNZ, \dots\}$

$r=2$ – $\Omega = \{ZZ, NZZ, \cancel{ZZZ}, NNZZ, ZNZZ, \dots\}$

Je to rekurentní jev?

N	ZN
q	p^r

→ opakuji $n-1$ krát a na poslední místě je ZZ (n-tém)

↘ to jsem nejde nezdar mými

✱ VZOR:

ZNZNZN

toto hledáme

Rekurentní jev: ↓ ↓

ZNZN – NZZ|ZZ|

↑ zde { nenastává pro rek. jev

$P(n, n-1, \text{– padl } Z) = p^2$

$P(n, n-1, \dots, n-r+1 \text{ padl } Z) = p^r$ Nejde vyjádřit přes (u_n)??

Platí: $p^2 = u_n + p u_{n-1}$

$p^r = u_n + p u_{n-1} + p^2 u_{n-2} + \dots + p^{r-1} u_{n-r+1}$

ZN ZN – ZZ|ZZ| nebo ZN ZN – ZZ|Z

↑ toto jen ↑ ↑ n

$n-1$ zde nastalo {, vše zapomněla



1 Káva = 5Kč

- Umí vracet

Hloupý .. musí mít v zásobě 5 Kč mincí a pak dá kafe

Stav systému ... #5Kč

Konečná
Nekonečná
kapacita

P_i ... #5Kč v systému

$i = 0, 1, \dots, N$

$E_i \xrightarrow{1-p} E_{i-1}$ (platí 10Kč)

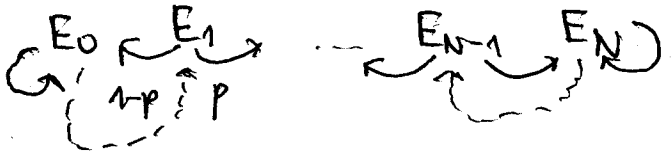
$\xrightarrow{p} E_{i+1}$ (platí 5Kč)

$E_0 \xrightarrow{1-p} E_0$ (vhodí 10 Kč a vrátíme 10Kč zpět, nemáme 5Kč)

$\xrightarrow{p} E_1$ (platí 5Kč)

$E_N \xrightarrow{1-p} E_{N-1}$ (platí 10Kč)

$\xrightarrow{p} E_N$ (peníze vrátím a nespustí se)



Automat na kávu = náhodná procházka v grafu

P (Hloupý automat → zastaví v konečném čase) $\begin{cases} 0 \\ \in (0,1) \\ 1 \end{cases}$

↳ Vypne se v E_0 + 10Kč a E_N + 5Kč

Obdoba hry: malá, velká (házení mincí)

Simulujeme:

$X_i \begin{cases} +1 & p \\ -1 & 1-p=q \end{cases}$

Generuj rnd $\begin{cases} > 1-p \Rightarrow \text{Zdar} \\ < 1-p \Rightarrow \text{Nezdar} \end{cases}$

↓

sign(RND − (1−p))

$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \qquad X_i = \begin{cases} +1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{cases} \qquad EX_i = 0$

$\text{var } X_i = EX_i^2 = (+1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$

$ES_k = \sum_{i=1}^{k} EX_i = 0$

$\text{Var } S_k = \sum_{i=1}^{k} \text{var } X_i = \underline{\underline{k}}$

$\tilde{S}_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow E\tilde{S}_k = 0 \quad \text{var } \tilde{S}_k = 1$

Platí: $\limsup_{k \to \infty} \tilde{S}_k = +\infty$

$\liminf \tilde{S}_k = -\infty$

ale

$$\limsup \frac{1}{\sqrt{2k \log\log k}} S_k = +1$$
$$\liminf \frac{1}{\sqrt{2k \log\log k}} S_k = -1 .$$

Co když $p < \frac{1}{2}$? Začíná se vychylovat

Proto je náhodná procházka dobrý náhodných sekvencí.

$S_k = X_k + S_{k-1} = X_k + (X_{k-1} + S_{k-2}) = \dots$

$\widetilde{S}_k = \frac{1}{\sqrt{k}} S_k = \frac{1}{\sqrt{k}} X_k + \frac{1}{\sqrt{k}} S_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}} X_k + \sqrt{\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-1}} S_{k-1} =$

$= \frac{1}{\sqrt{k}} X_k + \sqrt{\frac{k-1}{k}} \widetilde{S}_{k-1}$

$\to 0$ (pro $k \to \infty$) $\quad \to 1$

V klasických simulacích něco počítáš a průměruješ

$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i)$

def. klasické pravděpodobnosti

Např. počítání π:



strefil ... 1
nestrefil ... 0
$X, Y \sim RND(0,1)$

if $X^2 + Y^2 \le 1$ zdar
else nezdar

$\left(\frac{\hat{\pi}}{4}\right) = \frac{\#\text{zdarů}}{\#\text{pokusů}}$

$1 - \pi/4 - N$
$\pi/4 - z$

$T_n = \frac{1}{n} X_n + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} X_i = \frac{1}{n} X_n + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i = \frac{1}{n} X_n + \frac{n-1}{n} \cdot T_{n-1}$

→ proměnlivé n se málo hodí

→ doba návratu do 0 se stále prodlužuje (při $X_i \in \{-1, 1\}$)

Shewhartův diagram – beru výrobky jeden za druhým a výrobu zastavím tehdy, mám-li první špatný výrobek.

X_i ... to měřím

$\rightsquigarrow I_i = I[X_i \text{ je OK}]$ $\quad E_0$ - stav OK, E_1 stav KO



$(P(I_i = 1) = p, \; P(I_i = 0) = q)$

	E_0	E_1	
E_0	$p+q$		$= 1$
E_1	$0+1$		$= 1$

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → počáteční konfigurace (E_0 s prav. 1)

Střední doba do zastavení výroby?

1Z 1 – ZN $\quad Ge(p)$

$P(1.\text{nezdar v } k\text{-tém pokusu}) = p^{k-1} \cdot q = p_k$

$E\, Ge(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k q p^{k-1} = ?$

$A(x) = \sum_i p_i x^i \qquad A'(1) = \sum_i i p_i x^{i-1} \Big|_{x=1} = EX$

Nyní vyšetříme: $A(x) = \sum q p^{k-1} x^k = \frac{qx}{1-px}$

$A'(1) = \frac{q \cdot (1-px) - qx(-p)}{(1-px)^2} = \frac{q - qp + pq}{(1-p)^2} = \frac{1}{q}$ $\quad (1-p = q)$

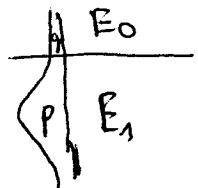
2) m_0 ... střední počet výsledků/kroků do zastavení

Existuje pro m_0 rekurentní vztah?

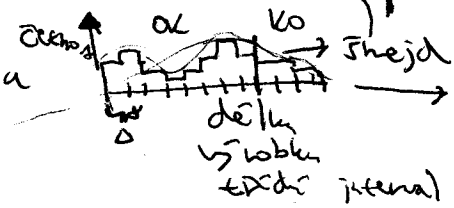
Pro 1 krok je to buď jen 0 1 ($1 \times E_0$).

$m_0 = 1 + m_0 \cdot p \longrightarrow m_0 = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{q}$

(1 ↑ výsledek (E_1) v 1 kroku; m_0 ↑ přejde do E_0 zase)



Výsledky jsou rovnoměrné na



→ plocha znormalizuje na 1 a dostanu p

$\sum_i \frac{\text{četnost}}{n \cdot \Delta} = 1$

→ vyrátím ze stavu E_0

$m_0 = E(\text{čas do konce} \mid \text{příští stav } E_0) \cdot p + E(\text{čas do konce} \mid \text{příští stav } E_1) \cdot q = *$

Věta o úplné pravd.:

A ... složité $\Omega = \bigcup H_i$ $H_i \cap H_j = \emptyset$ $i \neq j$  $P(A \cap \Omega) = P(A \cap \bigcup H_i) = P(\bigcup A \cap H_i) = \sum_i P(A \cap H_i)$

použijeme zde stejně hezkého

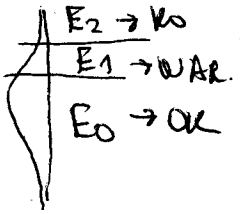
$* = (1 + m_0) \cdot p + 1 \cdot q = m_0 \cdot p + p + q = \underline{\underline{m_0 \cdot p + 1}}$.

(1 ↑ krok do E_0 ~ E v E_0; 1 ↑ krok do E_1, E v E_1 = 0 → (1+0)=1.)

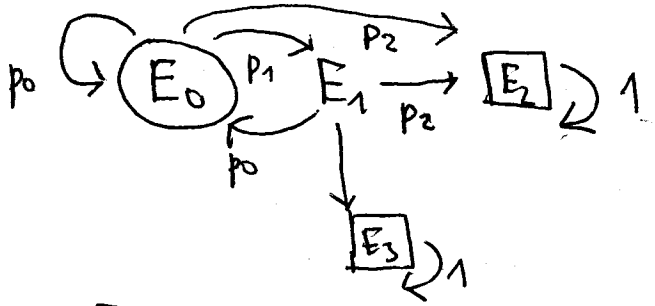
$\approx (1 + m_1) = (1 + 0) = 1.$

(m_i - střední počet kroků do konce, když začínám ve stavu E_i)

Vylepšení Shechartera:



2× za sebe Warning ⇒ KONEC



$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & 0 \\ p_0 & 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zajímá mě opět E.

Může začít v E_0 i v E_1.

$m_0 = 1 + p_0 m_0 + p_1 m_1$

$m_1 = 1 + p_0 m_0 + ?$

$m_0 = E(\text{čas do konce} \mid \text{příští stav } E_0) \cdot p_0 + E(\text{čas do konce} \mid \text{příští stav } E_1) \cdot p_1$
$+ E(\text{čas do konce} \mid \text{příští stav } E_2) \cdot p_2 = (1 + m_0) \cdot p_0 + (1 + m_1) \cdot p_1 + (1 + \underbrace{m_2}_{=0}) \cdot p_2 =$
$= p_0 + m_0 \cdot p_0 + p_1 + m_1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = m_0 p_0 + m_1 p_1 + 1.$

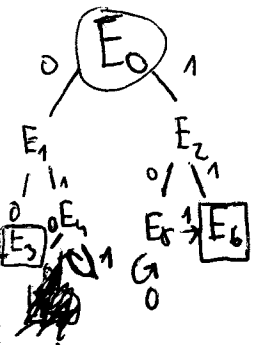
$m_1 = E(\text{čas do konce} \mid \text{příští stav } E_0) \cdot p_0 + \dots \text{atd} = (1 + m_0) \cdot p_0 + (1 + \underbrace{m_1}_{\approx 0}) \cdot p_1$
$+ (1 + \underbrace{m_2}_{\approx 0}) \cdot p_2 = p_0 + m_0 \cdot p_0 + p_1 + p_2 = m_0 \cdot p_0 + 1$

Tedy: $m_0 = m_0 \cdot p_0 + (m_0 \cdot p_0 + 1) \cdot p_1 + 1 \rightarrow m_0 = \frac{p_1 + 1}{p_0 \, 1 - p_0 (1 + p_1)}$.

abeceda; řetězec se čte stejně zleva i zprava ≈ palyndrom (9)

{0,1}

Navrhnout graf procházky, aby to byl palyndrom



→ Markovův řetězec (nedává rozhodně všechny palyndromy)

E_5, E_6 pohlcující stavy

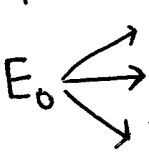
$a=(1,0,\dots,0)$ → E_0 se 100% pravd.

Jaká je pravd. pohlcení stavem E_5 ???

$C_1 \dots E_5$

$C_2 \dots E_6$

$T \dots$ ostatní E_0, E_1, E_2, E_4, E_5

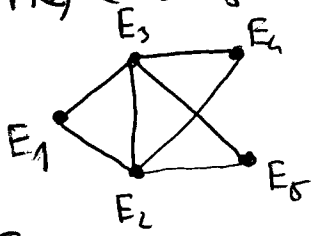


→ věta o úplné pravd. → pomocí ní to lze spočítat

$x_j = P(E_j \to C)$ $\quad x_j = x_j^{(1)} + \sum_{v \in T} x_{j,v}\, x_v$ → vede to na lin soustav

$P(E_j \to E_v)$

Nějaký graf: chceme se po něm procházet



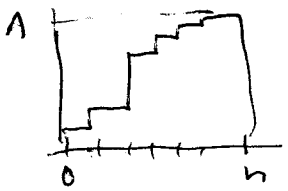
$P(E_j \to \text{soused}) = \frac{1}{\#\text{sousedů}}$ jedná se opět o Markovův řetězec

Simulace na kompu: Hodit kostkou podle a vypíše mý stav.

$\forall i \quad \sum_j p_{ij} = 1$ Každý řádek je formálně diskrétní rozdělení

soustředěná v bodech $\{1,2,\dots,n\}$

$P(X=j) = p_{ij}$ $\quad j=1,\dots,n$



Úloha 1:

$\sum_{i=1}^{N} c_i = ?$ $\quad N \gg 0$ $\quad \sum_{i=1}^{N} c_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{p_i} p_i = \sum_i d_i p_i = EX$ $\quad X \sim \{d_i\}$ / $\{p_i\}$

$p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$

Dobrý odhad EX je průměr z realizací této n.v. = Čebyšev.

(Konzistentní)

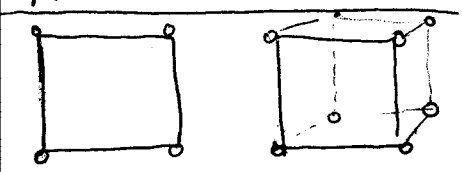
Generuji X k-krát a vrátím průměr ≈ součet c_i

Nějaká soustava $x = Ax + b$ — řešíme ji iterační

$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} + b \qquad x^{(0)} = b$

$(A^k + A^{k-1} + A^{k-2} + \dots + I)$ ... exponenciálně moc součtů

$A \rightsquigarrow \mathbb{P}, \mathbb{D}$ ... odhadneme $x^{(k)}$ pomocí Markovova řetězce



.... chceme náhodnou procházku po k-rozměrné krychli $\equiv \Pi\bar{R}^2$ s 2^k stavy ($\simeq$ vrcholy)
s pravd. $\frac{1}{k}$ přejdu do sousedního vrcholu

Simulace: 1) Vygenerujeme číslo vektoru: $\{0, 1, \underbrace{\quad}_{k}, 0\}$ → bitové 2^k

2) $U_i \sim R\{1, \dots, k\}$
prohodím U_i-tou složku $0 \to 1$ nebo $1 \to 0$

Je nerozložitelný $\Pi\bar{R}$ s konečně mnoha stavy
Tedy $\exists$ stacionární řešení $V = \mathbb{P}^T V$
V_i – pravděpodobnost (limitní) že v limitě bude ve stavu E_i.
připomíná to Ehrenfestův model

fyzikální systém → náhodné změny v čase
(rozpad atomů, telefonní ústředna)

$p_n(t)$ – pst, že za dobu t nastalo právě n změn

předpoklady:
- stacionární proces
- bez ohledu na počet změn v $(0,t)$: → 1 změn za $(t,t+h)$ pst $\lambda h + o(h)$ $\lambda > 0$
  → 2 a více změn – pst $o(h)$

Pozn.: To co nastalo předtím nemá vliv!
(změny v $(0,t)$ $(t,t+h]$ jsou nezávislé)

Úlohy: 1) Odvoďte diferenciální rovnice pro $p_n(t)$
2) Ukažte, že $p_n(t) \sim P_0(\lambda t)$

Řešení 1: $\underset{\sim}{p}(t) = \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$ ← absolutní pravděpodobnosti

$p_i(t)$ – v čase t nastal stav i
$S = \{0,1,\dots\}$ (např.: nastalo i změn)

$\underset{\sim}{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ → matice přechodu (smysl jen pro stavy z $\mathbb{N}$)

$p_{ij}(t)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j v čase t.

$\sum_j p_{ij}(t) = 1 \quad \forall i$

$\{N(t), t \geq 0\}$ → vrátí počet změn

$p_n(t) = P(N(t) = n)$

$p_{ij}(h) = P(N(h) = j \mid N(0) = i)$ ← stacionarita

$= P(N(t+h) = j \mid N(t) = i) \quad \forall t \geq 0$

Matice intenzit (smysl jen pro stacionární proces, už se nebere v úvahu t)

$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots \\ q_{10} & & \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$ $\quad q_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}$, $i \neq j$, $q_{ii} = -\lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$

definitorická věc

Kolmogorovy diferenciální rovnice

- $[\underset{\sim}{p}^T(t)]' \to$ derivace po složkách $= \underset{\sim}{p}^T(t) Q$ → vždy konvergují (pro nekonečné $\underset{\sim}{p}(t)$)
- retrospektivní: $\underset{\sim}{P}'(t) = Q \cdot P(t)$
- ——— II ———: $\underset{\sim}{P}'(t) = P(t) \cdot Q$

Na to abychom počítali Q, potřebujeme ?

$p_{ij}(h) = ?$

$p_{j,j+1}(h) = \lambda h + o(h)$ – přibyl 1 zákazník

$p_{jj}(h) = \begin{cases} d(h) & j > i \\ 0 & j < i \end{cases}$ $\quad i \neq j \;\&\; j \neq i+1$

(Pro $j < i$ je $p_{ij}(h) = 0$ … počet ubývání nemůže klesat)

$p_{j,j}(h) = 1 - \lambda h + o(h)$

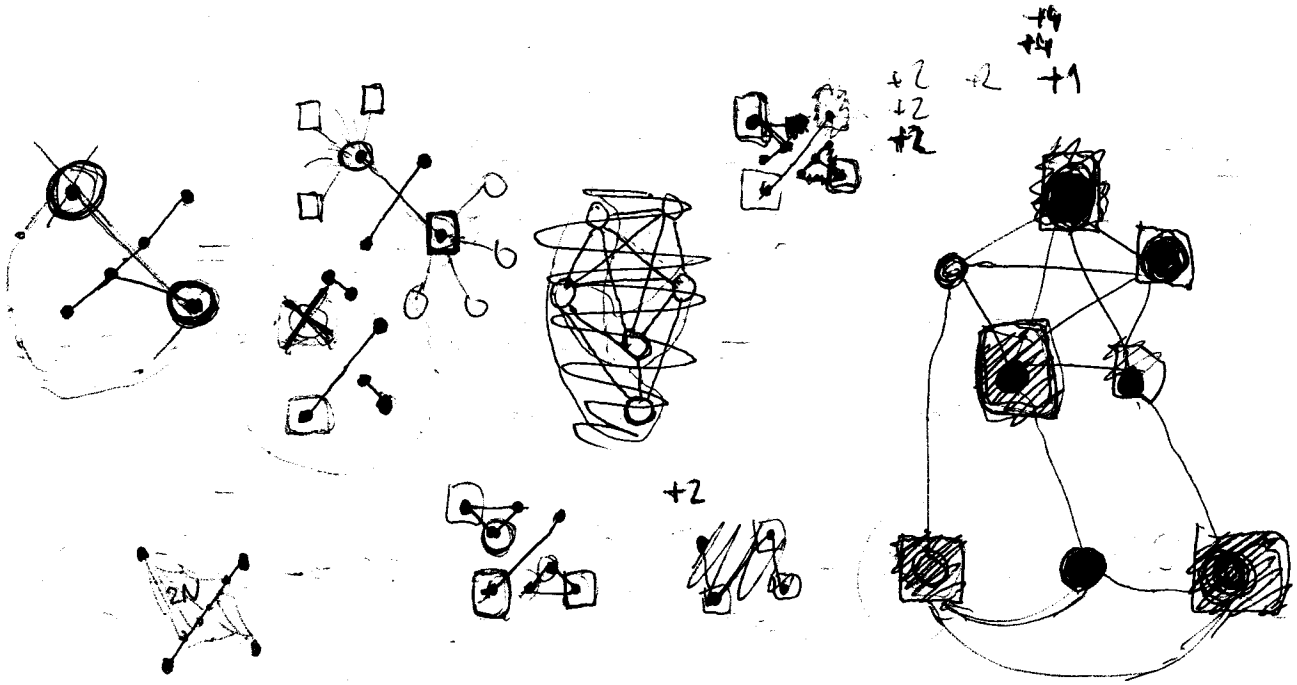
$q_{j,j+1} = \lambda \qquad q_{ij}(h) = 0 \quad i \neq j \;\&\; j \neq i+1 \qquad q_{jj} = -\lambda$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \\ & -\lambda & \lambda & 0 \\ & & -\lambda & \lambda \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\underline{p}^T(t) \cdot Q \rightarrow \quad p_0'(h) = p_0(h) \cdot (-\lambda)$

$p_n'(h) = \lambda \cdot p_n(h) - \lambda \cdot p_{n+1}(h); \quad n \geq 1$

② Řešíme vyšetřující fcí nebo pomocí (tokové)



Rubikova kostka

- každou stěnu může otočit 2 směry ... 12 možností

Markovův řetězec

E_1 — E_n

E_1 | $\mathbb{P}$

E_n

N – # stavů

v každém řádku může být s prav. $1/12$ do každého ze sebe

Může se točit tam a zpátky $\Rightarrow \Pi\bar{R}$ je periodický (kvůli symetrii) s periodou $\lambda = 2$ (nejmenší společný) nerozložitelný (z každého se dá zpět), konečný

Symetrie $\Rightarrow$ N je nedělitelné, $\mathbb{P} = \mathbb{P}^T$

$\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3$ ... $p_{ij}^{(n)}$ – pravd. z i do j po n krocích ... vyšetřuje $A(x)$

dostaneme $f_{jj}^{(n)}$ ... $B(x) = \frac{A(x)}{A(x)-1}$ a $B'(1)$ nám dá výsledek

Tato cesta je zde příliš složitá (kvůli ověřování $\mathbb{P}, \mathbb{P}^2$ ...)

∃ stacionární rozdělení

$v = \mathbb{P}^T v$ – bude rovnoměrné (stejně jako Ehrenfestův model či náhodná procházka po vrcholech krychle)

↳ Jakto ?: $v_i = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}_{ji}^T v_j = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_i = v_j$ $\quad \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$

Toto určitě platí $v_i = v_j \ \forall i,j$. $\quad v_i = 1/N \quad \sum_{i=1}^{N} v_i = 1$ (normalizace na rozdělení)

$\mathbb{P}$ .. dvojná stochastická matice

Platí: E_j trvalý nerozložitelný periodický s periodou λ

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu_j} \qquad v_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} > 0 \text{ (v per. případě)}$$

$v_j = \frac{\lambda}{\mu_j}$ → střední doba je tedy: $\frac{\lambda}{1/N} = N\lambda = \underline{2N}$

$N = 8! \cdot 12! \cdot 6$ → počet stěn $\approx 2^{47}$

počet možností na hranách ← počet možností v rozích

CVIKO
6.1.2011

n výrobků $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ T... d.n.v.

$P(T=i) = p_i > 0$ $\sum_i p_i = 1$

X_T .. náhodně vybraný prvek

$P(X_T \le t)$

Věta o úplné pravd.

$\Omega = \{i, i=1,\dots,n\}$

$$P(X_T \le t) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{P(X_T \le t \mid T=i)}^{?} \cdot P(T=i) =$$

($T=i$: H_i, $P(T=i)$: p_i)

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X_i \le t) \cdot P(T=i) = \sum_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i t}) \cdot P(T=i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X_T > t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot e^{-\lambda_i t} \equiv 1 - F(t)$$

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

$$\Rightarrow \text{intenzita: } \frac{\sum p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_i p_i e^{-\lambda_i t}} \equiv \Lambda_T(t)$$

$P(T=i \mid X_T > t)$ — jak tohle interpretovat?

Jaká je pravděpodobnost, když sledovaný bůsek odpracoval t, že je ten sledovaný právě i-tý?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(T=i \mid X_T > t) = \frac{p_i \cdot e^{-\lambda_i t}}{\sum_{j=1}^{n} p_j e^{-\lambda_j t}}$$

Tedy $\Lambda_T(t) = \sum_{i=1}^{n} P(T=i \mid X_T > t) \cdot \lambda_i$

Odbočka: intenzita: X _ doba života

λ_i pro exp

$$P(x < X \le x + \Delta \mid X > t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \cdot \Delta$$

($f(t)$: ss, $\Lambda(t)$)

Intenzita jednoznačně určuje N.V.

$\lambda_1 = \min_{1 \le i \le n} \lambda_i \qquad \lambda_1 < \lambda_2$

$$P(T=1 \mid X_T > t) = \frac{p_1 e^{-\lambda_1 t}}{p_1 e^{-\lambda_1 t} + \sum_{i=2}^{n} p_i e^{-\lambda_i t}} \cdot \frac{\frac{1}{e^{-\lambda_1 t}}}{\frac{1}{e^{-\lambda_1 t}}} = \frac{p_1}{p_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i \frac{e^{-\lambda_i t}}{e^{-\lambda_1 t}}} =$$

$$= \frac{p_1}{p_1 + \sum_{i=2}^{\infty} p_i e^{-(\lambda_i - \lambda_1)\cdot t}} \xrightarrow{t \to \infty} 1$$

$\lambda_i - \lambda_1 > 0$

$$P(T=i \mid X_T > t) \xrightarrow{t \to \infty} 0 \quad i > 1$$

Čím déle výtah pracuje, tím je větší šance, že to byl výtah z první třídy. Nezależí na distribuci T.

↓ výtah z první třídy pracují každé $EX = \frac{1}{\lambda_1}$.

Pošta: (Okénka) Okénka 1 | Okénka 2

Obě okénka obsazená

0 ← jaká doba obsluhy u okének jsou exponenciální

E (délka mého pobytu na poště)

!!

tj. z hlediska doby čekání je jedno, jaká doba je už člověk obsluhován

R_1 zbytková doba obsluhy
R_2 u okénka i
$\sim Exp(\lambda_i)$

(plyne z $P(X > x+t \mid X > x) = P(X > t)$) (⚠ podmínky jsou jsou pravd → 0 ☺)

Dvě možnosti: $R_1 < R_2 \equiv H_1$, $R_2 \le R_1 \equiv H_2$ ← směřuji k větě o úplné pravd.

$$P(R_1 < R_2) \equiv \int P(R_1 < R_2 \mid R_1 = t) = \int_{\text{vsech } t}^{\infty} P(R_2 > t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt =$$

$$= \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{-\lambda_1 t} dt =$$

$$= \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} dt =$$

$$= \lambda_1 \left[\frac{-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2} \right]_0^{\infty} = \boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

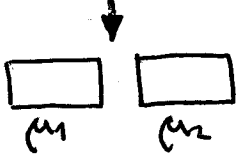
E(X|Y)

X .. n.v., kterou nás zajímá
Y .. n.v., která ovlivňuje průběh výsl. a usnadňuje výpočet
E(X|Y) = je ta n.v. Y, která po pevné Y=y nabývá hodnoty E(X|Y=y).

$$E(X \mid Y=y) = \sum_x x \cdot P(X=x \mid Y=y) \qquad \sum_y E(X \mid Y)$$

Věta: $E[E(X|Y)] = EX = \sum_y \sum_x x \cdot P(X=x \mid Y=y) \cdot P(Y=y) =$

$$= \sum_y \sum_x x \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \cdot P(Y=y) = \sum_x x \sum_y P(X=x, Y=y) = \sum_x x P(X=x) = EX.$$



R_1, R_2 } zbývající doby obsluhy $\sim Exp(\mu_1)$ CVIKO POSLEDNÍ

$$P(R_1 \le R_2) = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

Pojdeme naší formou $\Rightarrow P(R_2 < R_1) = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$

$$EX = \sum_x x\, p_x \qquad E[X|Y=y] = \sum_x x\, p_{x|y}$$

Čekání ve frontě (až se vaše obsluhuje) + doba obsluhy

OK_1 μ_1^{-1} ↓ OK_2 μ_2^{-1} ↓ $1/\mu_1$ $1/\mu_2$

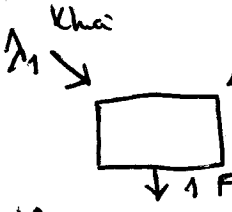
$$\Omega = \{ \underbrace{R_1 \le R_2}_{H_1} \text{ nebo } \underbrace{R_2 < R_1}_{H_2} \} \qquad \Omega = \bigcup_i H_i \times H_i \cap H_j = \emptyset \; H_j$$

$$P(A) = \sum_i P(A|H_i)\cdot P(H_i)$$

$$E(T) = E[T|R_1 \le R_2] + E(T|R_1 > R_2) = 2 \cdot \frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} +$$

↑ čekání + doba obsluhy.

$$+ 2\cdot\frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} = 4\,\frac{1}{\mu_1+\mu_2}$$



(NEZÁVISLÉ PŘÍCHODY)

Jaký charakter má výsledný výstupní proces?

Hypotéza Hi → výsledek je opět poisson. proces s intenzitou $\lambda_1+\lambda_2$.

$X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp\,\lambda$ nezáv. $\Rightarrow X+Y \sim \Gamma(n,\lambda)$ ← gamma

$$\Gamma(\alpha,\beta) = x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}\cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \leftarrow \text{gamma fce} \qquad \alpha,\beta,x>0$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$$

$X \sim Po(\lambda_1)$ $Y \sim Po(\lambda_2)$

$A(x) = e^{-\lambda\cdot(x-1)}$ $\left(A(x) = \sum e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}x^i = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda x}\right)$

$$X+Y \sim e^{-\lambda_1(x-1)}\cdot e^{-\lambda_2\cdot(x-1)} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(x-1)} \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$$

Teď to chci zkusmat přes exponenciální.

$P(Y \le t)$ $Y = \min(X_1, X_2)$ $P(Y > t) = P(\min(X_1,X_2) > t) =$

$= P(X_1 > t \;\&\; X_2 > t) = e^{-\lambda_1 t}\cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ ← nezávislost

$P(Exp(\lambda_1+\lambda_2) > t)$

$(F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \rightarrow$ distr. exponenc.)

Když budou mít n Aupa : $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ (NEZÁVISLÉ!)

$\min X_i \sim Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

$P(\max X_i \leq t) = P(X_1 \leq t \,\&\, \dots \,\&\, X_n \leq t) =$

$= \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i t})$

↑ nez.

Γ-rozdělení

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ — $f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$

$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ X_i nez $N(0,1)$

$\chi^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ $X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \leftrightarrow Y \sim \Gamma(\alpha)$

- snáze se počítá s 1 parametrem

$Y = \beta X$ nebo $Y = \frac{X}{\beta}$

- α parametr tvaru
- β parametr rozptýlení