Jan Matějek

domácí úkol – teorie $SC0_U^{\pm}$

a) NEMÁ eliminaci kvantifikátorů.
Uvažujme modely $B=\langle \mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, S^{\mathbb{N}}, U^B\rangle$ a $A=\langle \mathbb{N}\cup\mathbb{Z}, 0^{\mathbb{N}}, S^{\mathbb{N}}\cup S^{\mathbb{Z}}, U^B\rangle$ (znak sjednocení tady znamená disjunktní sjednocení), $U^A=U^B=\mathbb{N}$. Že jsou to modely teorie je celkem vidět (v *A* neplatí *U* na celém universu, ale to ničemu nevadí – teorie nevylučuje, aby existovalo více navzájem nezávislých „sérií“ následníků).
Uvažujme parciální vnoření $f: 0^A \to 0^B$ a formuli $\varphi(x)=(\exists y)(\neg U(y)\wedge U(x))$. Ta je zjevně 1-primitivní. Není splněna v *B* pro žádné ohodnocení, protože tam U platí v celém universu. Je ovšem splněna v A mj. právě pro nulu – *U(0)* platí, a jako y můžeme zvolit libovolné $c\in\mathbb{Z}$, protože tam *U* není realizováno.
Teorie tedy není 1-koexistenční, a tedy nemá ani eliminaci kvantifikátorů.

b) NENÍ modelově kompletní. *B* je podstrukturou *A*, ale není elementární podstrukturou, kvůli formuli z př. a)

c) modelů je právě spočetně mnoho. Použijeme definici ekvivalence z tvrzení 1.3.5.2. Modely A, B naší teorie jsou si izomorfní, když 1. v obou modelech platí buď $U(0)$ nebo $\neg U(0)$, 2. mají stejný počet tříd ekvivalence, ve kterých platí $U(x)$, a 3. mají stejný počet tříd ekvivalence, ve kterých platí $\neg U(x)$.

d) izomorfní spektrum $I(\kappa, SC0_U^{\pm})$:
- pro κ nekonečné je rovno κ. Pro κ = ω to už máme hotovo z c). Pro κ > ω nám vyjde, že je buď κ tříd ekvivalence takových, že tam platí *U*(*x*) a nejvýše κ těch, kde to neplatí, nebo naopak. Dohromady 2 . (κ + κ) = κ.
- pro κ konečné je rovno 0, protože žádné konečné modely nemáme.

e) NENÍ kompletní, protože např. sentence tvaru $U(x)$ nejsou dokazatelné ani vyvratitelné. To vyřešíme přidáním axiomu $(\forall x)U(x)$ nebo $(\forall x)\neg U(x)$. A to jsou také jediné jednoduché kompletní extenze – kdybychom si chtěli hrát s tím, že pro některá *x* platí $U(x)$ a pro jiná $\neg U(x)$, nemůžeme nikdy dokázat ani vyvrátit sentenci $U(x)$, protože nerozlišíme, ze které že skupiny to *x* je.

f) JE rozhodnutelná. Pokud je formule dokazatelná v obou úplných extenzích (což je rekurzivní podmínka), tak je dokazatelná i v původní teorii.

g) NEMÁ prvomodel. Máme dva různé modely, v jednom platí $U(0)$ a ve druhém $\neg U(0)$.
V (algebraickém) prvomodelu by tedy musely platit obě tyto formule, což dost dobře nejde.

h) NENÍ konečně axiomatizovatelná. Což mi připadá že je skoro vidět z toho, že SC0 není konečně axiomatizovatelná – rozšířili jsme teorii SC0 o dva axiomy, které se ale zabývají pouze predikátem *U* a nijak nám nepomohou ve snaze konečně axiomatizovat ty zděděné vlastnosti. Takže mohu s příslušnými úpravami (vyjmenování příslušných axiomů) okopírovat důkaz z tvrzení 1.3.5.2. Obdobně pro otevřenou axiomatizovatelnost.