Přednáška 1

~~Wednesday, 19 February 2025 13:18~~
19. 2. 2025

Výchozí principy OTR

jsou 2:
1.) princip ekvivalence
2.) princip obecné kovariance

Princip ekvivalence

Galileo: všechna volná tělesa padají v daném gravitačním poli se stejným zrychlením

klasický Newtonův pohybový zákon: $\cancel{m}\vec{a} = -\frac{GM\cancel{m}}{r^2}\vec{r}_0$

m se může prostě vykrátit ... ale: LS: m_i = inerciální, setrvačná hmotnost – míra odporu tělesa vůči urychlení
PS: $m = m_g$ gravitační hmotnost – měří gravitační přitažlivost mezi dvěma tělesy

1. formulace principu ekvivalence: gravitace je univerzální

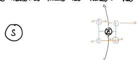
2. formulace principu ekvivalence: $m_g = m_i$

tohle je podrobeno zkoumání v případě experimentálního zkoumání

kyvadlo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{m_i}{m_g}}$ již Newton – přesnost 10^{-3}
později Bessel 10^{-5}

později pomocí torzních vah
Eötvös 10^{-9}
Dicke 10^{-11}
Braginsky 10^{-12}
v recentní době experiment MICROSCOPE 10^{-15}

představme si dvě stejně hmotná tělesa na vahách na Zemi obíhající kolem Slunce a rotující

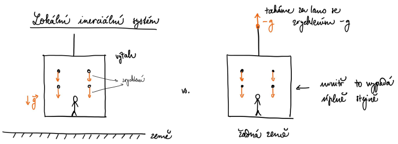


pro těleso 2 platí $m_i = m_g$
pro těleso 1 ne
když na začátku váhy vyvážíme
za půl dne se Země otočí o 180° a závaží si jakoby vymění místa
⇒ vyvážení se poruší
tzn. nešlo by to vyvážit trvale

podle STR přispívá ke hmotnosti těles i interakce

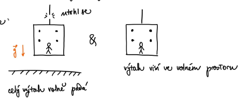
Slabý princip ekvivalence: tvrzení o tělesech padajících stejně rychle v gravitačním poli
Newtonův princip ekvivalence:
silný princip ekvivalence:

Lokální inerciální systém



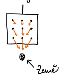
experimentátor ve výtahu mezi těmito situacemi nerozliší
(pokud se nepodívá z okna, neví, jestli je tam Země, nebo někdo tahá za provaz

podobně jsou nerozlišitelné situace:



zjistili jsme: gravitace se nedá odstranit, ale dá se odtransformovat

PROBLÉM: co když mám fakt velkej výtah?



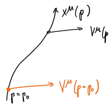
jednotlivá tělesa už nejsou vůči sobě (resp. výtahu) v klidu

pole už není homogenní

v takovém případě již nedokážeme jednoduše gravitaci odtransformovat, resp. ne pro všechna tělesa
- jde to jen lokálně
⇒ proto se zavádí lokální inerciální systém

idea je taková, že v dostatečně malém okolí každého bodu funguje STR

Paralelní přenos



$x^\mu(p)$ světočára parametrizovaná parametrem p

$V^\mu(p)$ chci, aby $V^\mu(p)$ byl v nejlepším smyslu rovnoběžný s $V^\mu(p_0)$

na počátku zadána světočára, původní bod a vektor

princip ekvivalence: v každém bodě máme lokální inerciální systém, ve kterém vše funguje jako v STR $\{\xi^{\hat\alpha}\}_{\hat\alpha=0}^{3}$

tento systém je automaticky kartézský
⇒ rovnoběžné vektory mají stejné složky, tj. $\frac{dV^{\hat\alpha}}{dp} = 0$ $\hat\alpha$ stříškované indexy se vztahují k lokálnímu systému

přecházíme ke „globálnímu" systému ... souřadnice $\{x^\alpha\}_{\alpha=0}^{3}$
víme, že V je vektor ... víme, jak se transformuje

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dp}\left(\frac{\partial\xi^{\hat\alpha}}{\partial x^\lambda}V^\lambda\right) = \frac{\partial\xi^{\hat\alpha}}{\partial x^\lambda}\frac{dV^\lambda}{dp} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\lambda \qquad / \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha}$$

$\xi = \xi(x(p))$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda}}_{\delta^\mu_\lambda}\frac{dV^\lambda}{dp} + \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\lambda$$

$$\boxed{0 = \frac{dV^\mu}{dp} + \boxed{\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda}}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\lambda}$$

ROVNICE PRO PARALELNÍ PŘENOS

$\Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}$ ... Christoffelovy symboly 2. druhu
↳ není to tenzor

$$|V|^2 = \underbrace{\eta_{\alpha\beta}V^{\hat\alpha}V^{\hat\beta}}_{\text{v LIS}} = \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}V^\mu\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}}_{g_{\mu\nu}}V^\nu =: g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$$

ale dá se psát i:

$$|V|^2 = \eta^{\rho\sigma}V_{\hat\rho}V_{\hat\sigma} = \eta^{\rho\sigma}\frac{\partial x^\varrho}{\partial\xi^\rho}V_\varrho\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\sigma}V_\sigma = g^{\varrho\sigma}V_\varrho V_\sigma$$

je to konzistentní?
chtěli bychom, aby g splňovalo vztah pro metriku $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta^\sigma_\mu$

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\underbrace{\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta^{\gamma\delta}\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\gamma}}_{\delta^\beta_\gamma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\delta}$$

$$= \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta}}_{\delta^\delta_\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\delta} = \delta^\sigma_\mu \quad \checkmark$$

snižování a zvyšování indexů:

$$g_{\mu\nu}V^\nu = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\underbrace{\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\rho}}_{\delta^\beta_\rho}V^{\hat\rho} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}V^{\hat\beta} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}V_{\hat\alpha} = V_\mu$$

jo, funguje to

Přednáška 2

Thursday, 27 February 2025 15:37

„... poté, co jsme si něco pověděli o principu ekvivalence a poté, co jsem mlžil o principu obecné kovariance...“

Proč je paralelní přenos, respektive přenosy obecně v geometrii, důležitý:
- Člověk potřebuje nějakým způsobem porovnávat vektory náležící tečným prostorům v různých bodech variety

rovnice paralelního přenosu: $\frac{dV^\mu}{dp} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\lambda = 0$

jak se k tomu dorazilo znovu (opak.):
- v lokálním systému souřadnic
- tu derivace složky podél křivky $= 0 = \frac{dV}{dp}$
- přechod k jiným (obecným) souřadnicím

metrika $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}$

Vztah $g_{\mu\nu}$ & $\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}$

derivace

$$g_{\mu\nu,\varkappa} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\varkappa\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\varkappa\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\varkappa\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\varkappa\nu}$$

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\varkappa\mu} = \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\varkappa\partial x^\mu}$$

$g_{\rho\nu}$, $g_{\mu\rho}$

$$g_{\mu\nu,\varkappa} = g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\varkappa\mu} + g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\varkappa\nu} = \Gamma_{\nu\varkappa\mu} + \Gamma_{\mu\varkappa\nu}$$

... cílem najít explicitní výraz symetrický v μ a ν

spustit index pomocí metriky, pozor: Γ není tenzor

podobně

$$g_{\varkappa\nu,\mu} = \Gamma_{\nu\mu\varkappa} + \Gamma_{\varkappa\mu\nu}$$

$$g_{\mu\varkappa,\nu} = \Gamma_{\varkappa\nu\mu} + \Gamma_{\mu\nu\varkappa}$$

2 indexy $\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\varkappa\partial x^\lambda}$ => se druhým a třetím indexem symetrické

když se to posčítá a poodčítá...

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}\right)}$$

Christoffelovy symboly 1. druhu

Christoffelovy symboly 2. druhu definované jako $\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} = g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\varkappa\lambda}$

→ ty jsou v rovnici paralelního přenosu

*když bych otočil pořadí indexů, tak ... *

Paralelní přenos vektoru - zachování skalárního součinu dvou vektorů

$$\frac{d}{dp}\left(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu\right) = g_{\mu\nu,\varkappa}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu}\frac{dV^\mu}{dp}W^\nu + g_{\mu\nu}V^\mu\frac{dW^\nu}{dp}$$

kam dosadit z paralelního přenosu

$$\frac{dW^\nu}{dp} = -\Gamma^\nu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}W^\lambda \qquad \frac{dV^\mu}{dp} = -\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\lambda$$

Složky ve členu máme:
- metrický tenzor
- vektory V, W

... můžeme je vytknout, ale opatrně s indexy

$$= \left(g_{\mu\nu,\varkappa}V^\mu W^\nu - \Gamma_{\nu\varkappa\lambda}V^\lambda W^\nu - \Gamma_{\mu\varkappa\lambda}V^\mu W^\lambda\right)\frac{dx^\varkappa}{dp}$$

$$= \underbrace{\left(g_{\mu\nu,\varkappa} - \Gamma_{\nu\varkappa\mu} - \Gamma_{\mu\varkappa\nu}\right)}_{=0}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\mu W^\nu = 0$$

z dřívějšího odvození na začátku

=> paralelní přenos zachovává skalární součin libovolných vektorů po libovolné křivce

speciálně i normu

paralelní přenos zachovává časo/prostorupodobnost vektorů

Paralelní přenos kovektoru

(lze přenášet libovolné tenzory, kovektory jsou dobrá náhrada po vektorech)

Víme:

$$0 = \frac{d}{dp}\left(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu\right) = \frac{d}{dp}\left(V^\mu W_\mu\right) = \frac{dV^\mu}{dp}W_\mu + V^\mu\frac{dW_\mu}{dp} = V^\lambda\left(\frac{dW_\lambda}{dp} - \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}W_\mu\right) = 0$$

$\frac{dV^\mu}{dp} = -\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\lambda$; vektor V je libovolný, $\Rightarrow = 0$

$$\boxed{\frac{dW_\lambda}{dp} - \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}W_\mu = 0}$$

paralelní přenos kovektoru

obecný tenzor: první člen + členy jako z rovnice pro vektor + členy jako z rovnice pro kovektor = 0
↳ tolik, kolik je horních indexů ↳ tolik, kolik je dolních indexů

Paralelní přenos & princip obecné kovariance

– je jeho rovnice skutečně tenzorová?

budeme ověřovat pro vektor, a to přímo transformací

$$V'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta}V^\delta$$

„je to klasická úloha na to, jestli je šedá abeceda dostatečně dlouhá“
„kéž by mě bavilo vás z toholo zkoušet“

$$\frac{dx'^\varkappa}{dp} = \frac{\partial x'^\varkappa}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{dp}$$

$$\frac{dV'^\mu}{dp} = \frac{d}{dp}\left(V^\alpha\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{dV^\alpha}{dp}\frac{dx'^\mu}{dx^\alpha} + \underbrace{V^\alpha\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta dx^\alpha}\frac{dx^\beta}{dp}}_{\text{tohle je člen, který tam v STR není}}$$

$$\Gamma'^\mu_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial\xi^\iota}\frac{\partial^2\xi^\iota}{\partial x'^\varkappa\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\iota}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\varkappa}\left(\frac{\partial\xi^\iota}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}\right)\right)$$

lokální souřadnice necháváme, jak jsou, netransformujeme

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\left(\underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\iota}\frac{\partial^2\xi^\iota}{\partial x^\rho\partial x^\sigma}}_{\text{definice }\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\varkappa}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial\xi^\iota}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\varkappa\partial x'^\lambda}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\varkappa}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}}_{\text{odpovídá transformaci tenzoru 3. řádu}} + \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\delta^\alpha_\sigma\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\varkappa\partial x'^\lambda}}_{\text{tohle je tu navíc}}$$

složky afinní konexe (zde Christoffelovy symboly) se transformují jako tenzory jen pro lineární transformace $\left(\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\varkappa\partial x'^\lambda} = 0\right)$

Dosadíme do rovnice: $\frac{dV'^\mu}{dp} + \Gamma'^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx'^\varkappa}{dp}V'^\lambda = 0$

$$= \frac{dV^\alpha}{dp}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\varkappa}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\frac{\partial x'^\varkappa}{\partial x^\eta}\frac{dx^\eta}{dp}\frac{dx'^\lambda}{dx^\delta}V^\delta$$

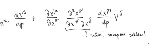
δ^ρ_η, δ^σ_δ

$$+ V^\alpha\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta dx^\alpha}\frac{dx^\beta}{dp} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\delta^\alpha_\sigma\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\varkappa\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\varkappa}{\partial x^\eta}\frac{dx^\eta}{dp}\frac{dx'^\lambda}{dx^\delta}V^\delta$$

$$= \frac{dV^\alpha}{dp}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{dp}V^\sigma + V^\alpha\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}\frac{dx^\beta}{dp} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\underbrace{\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\eta\partial x^\delta}}\frac{dx^\eta}{dp}V^\delta$$

! nutno! to napsat takhle!

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\left(\frac{dV^\alpha}{dp} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{dp}V^\sigma\right) + V^\delta\frac{dx^\eta}{dp}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\eta\partial x^\delta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\varkappa\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\varkappa}{\partial x^\eta}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta}\right)}_{\text{tohle je nula}}$$



Geodetiky

- hledáme přímku
1. – hledáme křivku, podél níž se paralelně přenáší její tečný vektor
   přejdeme od V^μ k $\frac{dx^\mu}{dp}$

⇒ rovnice geodetiky

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0}$$

Subtle rozdíl:
- V rovnici paralelního přenosu je křivka zadaná, hledáme, jak se přenáší vektor
- V rovnici geodetiky křivka zadána není, naopak se hledá

co ještě musíme na začátku zadat: $x^\mu(p=p_0) = x^\mu_0$
(dvě podmínky – rovnice 2. řádu) $\left.\frac{dx^\mu}{dp}\right|_{p=p_0}$

Rovnice geodetiky je rovnice paralelního přenosu – geodetika nemůže měnit svůj charakter z prostorupodobné na časupodobnou ani naopak

charakterizace křivky: $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = \begin{cases}-1 & (<0)\\ 0 & \\ 1 & (>0)\end{cases}$

světy/prostorupodobnost odpovídá velikosti tečného vektoru (znaménku)

2. Jiný pohled na geodetiky: světočáry volných testovacích částic.
   - Volný = nepůsobí na to nic jiného než gravitační síla
     - Gravitační sílu nelze odstínit
   - Testovací - částice cítí pole, ale sama k němu nepřispívá, nemusí se brát v úvahu její vliv na okolí
   - Částice - uvažujeme "bodové" částice - nějaké malé, takové, aby na různé její části nepůsobily rozdílné síly v důsledku nehomogenního pole

Pozn. in advance: křivost je geometrická obdoba nehomogenit pole.

Princip ekvivalence: v lokálním inerciálním systému jako v STR, tj. volné částice se pohybují bez zrychlení.
Mluvíme-li o částicích, zužujeme trochu svůj záběr, má smysl řešit pouze časupodobné světočáry

lok. systém: $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$ ... z obdobné rovnice jsme odvodili rovnici pro paralelní přenos
nulové zrychlení ⇒ můžeme získat rovnici geodetiky

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

obvykle se píše pomocí čtyřrychlosti $\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}u^\varkappa u^\lambda \overset{\circledast}{=} 0$

není to nic jiného než speciální případ pohybové rovnice (s nulovou působící silou)

3. Ještě jiný pohled na geodetiky: extremální spojnice
   - V nějakém smyslu se extremalizuje délka oblouku

pohybujeme se $\tau_{AB} = \int_A^B d\tau$

pochopitelně variační úloha s pevnými konci

$$\delta\tau_{AB} = \delta\int\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \int\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}}}_{\frac{1}{d\tau}}\left(-g_{\mu\nu,\rho}\delta x^\rho dx^\mu dx^\nu - g_{\mu\nu}(\delta dx^\mu)dx^\nu - g_{\mu\nu}dx^\mu\delta dx^\nu\right)\frac{d\tau}{d\tau}$$

δ do integrálu

$$= \int\frac{1}{2}\frac{1}{d\tau d\tau}\left(-g_{\mu\nu,\rho}\delta x^\rho dx^\mu dx^\nu - 2g_{\mu\nu}(d\delta x^\mu)dx^\nu\right)d\tau$$

$$= \int\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}u^\mu u^\nu\delta x^\rho - g_{\mu\nu}(\delta u^\mu)u^\nu\right)d\tau$$

tohle bychom chtěli pomocí per partes převést na variaci polohy

$$= \int\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}u^\mu u^\nu + \frac{d}{d\tau}\left(g_{\rho\nu}u^\nu\right)\right)\delta x^\rho\, d\tau$$

okrajové členy zmizí, máme úlohu s pevnými konci

$$= \int\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}u^\mu u^\nu + g_{\rho\nu,\mu}\underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{u^\mu}u^\nu + g_{\rho\nu}\frac{du^\nu}{d\tau}\right)\delta x^\rho\, d\tau$$

rozložíme na symetrickou a antisymetrickou část v μ a ν
antisymetrická po vynásobení s $u^\mu u^\nu$ bude nula (součin antisymetrického a symetrického tenzoru)

$$= \int\left(\underbrace{\frac{1}{2}\left(-g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\nu,\mu} + g_{\rho\mu,\nu}\right)}_{=\Gamma_{\rho\mu\nu}}u^\mu u^\nu + g_{\rho\nu}\frac{du^\nu}{d\tau}\right)\delta x^\rho\, d\tau$$

$$\int\left(g_{\rho\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + g_{\rho\alpha}\frac{du^\alpha}{d\tau}\right)\delta x^\rho\, d\tau$$

⊛ rovnice geodetiky

$$= \int g_{\rho\alpha}\underbrace{\left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \frac{du^\alpha}{d\tau}\right)}\delta x^\rho\, d\tau = 0$$

tohle je snad pravda, když člověk přejmenuje ρ na α a α na ν

$$= \int g_{\alpha\nu}\left(\Gamma^\nu_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \frac{du^\nu}{d\tau}\right)\delta x^\alpha\, d\tau$$

Přednáška 3

Thursday, 6 March 2025 15:38

Pokračujeme v geodetikách $\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}\frac{dx^\kappa}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0$

odbočka: <u>geometrizované jednotky</u>

v OTR se standardně používá $c=1$, $G=1$

odpovídá to speciální volbě jednotek – rychlost je efektivně bezrozměrná

– geometrizovaná hmotnost $\frac{GM}{c^2}$ … rozměr délky

„taky se můžete setkat s relativistama, který vám řeknou, že hmotnost Slunce jsou tři kilometry"

(Ne)afinní parametrizace

(ω) co když změníme parametrizaci? $p \to q(p)$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dq}{dp}\right) + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}\frac{dx^\kappa}{dq}\frac{dq}{dp}\frac{dx^\lambda}{dq}\frac{dq}{dp} = 0$$

$$\frac{d^2x^\mu}{dq^2}\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 + \frac{dx^\mu}{dq}\frac{d^2q}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}\frac{dx^\kappa}{dq}\frac{dx^\lambda}{dq}\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 = 0$$

tímto vydělíme

$$\underbrace{\frac{d^2x^\mu}{dq^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}\frac{dx^\kappa}{dq}\frac{dx^\lambda}{dq}}_{\text{tohle je ta rovnice jakou jsme měli}} = \underbrace{-\frac{\frac{d^2q}{dp^2}}{\left(\frac{dq}{dp}\right)^2}\frac{dx^\mu}{dq}}_{\text{tady ale není nulová pravá strana}}$$

afinní parametrizace (p) – když je pravá strana nula

neafinní parametrizace (q) – když pravá strana není nula

afinní parametrizace je jednoznačná až na lineární transformaci (na pravé straně je d^2q/dp^2)

pro geometry je geodetika jen tohle

relativisti říkají geodetika obojímu (rozdíl je v tom, „jak rychle" se ta křivka probíhá)

jak poznat, že s nenulovou pravou stranou je to pořád geodetika?

– pravá strana je úměrná tečnému vektoru křivky

Newtonovská limita

– přirozený požadavek na soulad nové teorie se starou fungující teorií

za jakých okolností jde o newtonovskou limitu:

1) <u>malé rychlosti</u> $\left|\frac{dx^i}{dt}\right| \ll c \equiv 1$ $\quad / \cdot \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \Rightarrow \left|\underbrace{\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}}_{u^i}\right| \leq \left|\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{u^t}\right|$

prostorová & časová složka čtyřrychlosti

2) „slabé (gravitační) pole" – ve skutečnosti jde více než o sílu pole o jeho nehomogenity

a ještě víc ve skutečnosti jde o to, aby byl <u>prostoročas podobný Minkowského</u>

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, přičemž $|h_{\mu\nu}|$ je malé i s derivacemi … pracujeme do lineárního řádu

$g^{\nu\rho} = \eta^{\nu\rho} - \underset{\text{proč?}}{h^{\nu\rho}}$ … sledujme

chceme $\underset{=\delta^\rho_\mu \text{ aby to byla metrika}}{g_{\mu\nu}g^{\nu\rho}} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\rho} - h^{\nu\rho}) = \delta^\rho_\mu \underbrace{- \eta_{\mu\nu}h^{\nu\rho} + h_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}}_{\text{ale tohle nemůžu jen tak zahodit … chci ale, aby to byla nula}} + \underbrace{O(h^2)}_{\text{zahodím}}$

3) <u>stacionární metrika</u> $g_{\mu\nu,t} = 0$ (tj. $h_{\mu\nu,t} = 0$)

$h_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \eta_{\mu\nu}h^{\nu\rho}$

$\eta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\nu}h^{\nu\rho} = \delta^\alpha_\nu h^{\nu\rho} = \underbrace{h^{\alpha\rho} = h_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}\eta^{\alpha\mu}}_{\text{jako v STR, zvedání indexů pomocí Minkowského metriky}}$

Jak vypadají složky afinní konexe (Christoffelovy symboly)?

$$\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(g_{\sigma\kappa,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\sigma}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\left(h_{\sigma\kappa,\lambda} + h_{\lambda\sigma,\kappa} - h_{\kappa\lambda,\sigma}\right)}_{\text{toto je } O(h)} + O(h^2)$$

dostáváme $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \overset{(*)}{=} 0$

ostatní členy jsme zanedbali, zůstaly jen časové složky

$$\Gamma^\mu_{tt} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\left(\cancel{h_{\sigma t,t}} + \cancel{h_{t\sigma,t}} - h_{tt,\sigma}\right) = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}h_{tt,\sigma} = -\frac{1}{2}h_{tt}{}^{,\mu}$$

podívejme se na (*)

$\mu = 0$: $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} + 0 = 0 \overset{(*)}{=} \frac{d^2t}{d\tau^2} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \text{konst.}$

$\mu = i$: $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}h_{tt}{}^{,i}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$

chceme to porovnávat s rovnicí $\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Phi^{,i}$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{dx^i}{dt}\underbrace{\frac{d^2t}{d\tau^2}}_{\overset{(*)}{=}0}$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}\cancel{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2} = \frac{1}{2}h_{tt}{}^{,i}\cancel{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}$$

chci $\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}h_{tt}{}^{,i}$ a $\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Phi^{,i}$ byly stejné rovnice

$\Rightarrow \frac{1}{2}h_{tt}{}^{,i} = -\Phi^{,i}$

tzn. $h_{tt} = -2\Phi + \cancel{\text{konst.}}$

↳ tohle škrtneme, když chceme v nekonečnu $h_{tt} = 0$ (daleko od zdroje se prostoročas od Minkowského neliší)

& $\Phi = 0$ (potenciál daleko od zdroje klesá k nule)

$$\boxed{g_{tt} = -1 - 2\Phi}$$

toto je v bezrozměrných jednotkách, potenciál má rozměr c^2

Poznámky k tomuto výsledku:

- celé jsme odvodili za předpokladu malých $h_{\mu\nu}$, ale nám vyšlo $h_{tt} = -2\Phi$
  - ⇒ měřítko relativističnosti situace je velikost bezrozměrného gravitačního potenciálu
  - chci, aby $\Phi \ll 1$ (1 jako typická složka $\eta_{\mu\nu}$)
  - velikost bezrozměrného Φ např.:
    - povrch Země 10^{-9}
    - Slunce 10^{-6}
    - bílý trpaslík 10^{-4}
    - neutronová hvězda 10^{-2} až 10^{-1}
    - černá díra $r_H = \frac{2GM}{c^2}$ … poloměr horizontu událostí
    - bezrozměrný potenciál je $\left|\frac{\Phi}{c^2}\right| = \left|\frac{GM}{c^2 r}\right| = \frac{1}{2}$
- získali jsme jakýsi překladový slovník mezi geometrickou a polní představou OTR
  - vidíme, že metrika $g_{\mu\nu}$ má nějakým způsobem význam potenciálu (gravitačního)
  - $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$ jsou derivace $g_{\mu\nu}$ … je to pole

Časová dilatace a posun frekvence v gravitačním poli

$$d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}\underbrace{\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}}\,dt$$

… přepočet mezi vlastním a souřadnicovým časem

„souřadnicová rychlost" … ne čtyřrychlost, to je $\frac{dx^\mu}{d\tau}$

v STR se hodiny, které se navzájem nepohybují, navzájem nerozejdou – realizují tentýž inerciální čas

v OTR se navzájem se nepohybující hodiny mohou rozejít v důsledku existence gravitačního pole

g_{tt} je obecně různé v různých místech

$x^\mu(\tau)$ světočára

$\{t, x^i\}$ souřadnice

$$= \sqrt{-g_{00}\underbrace{\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^0}{dt}}_{1} - 2g_{tj}\underbrace{\frac{dx^j}{dt}}_{v^j}\underbrace{\frac{dx^0}{dt}}_{=1} - g_{ij}\underbrace{\frac{dx^j}{dt}}_{v^j}\underbrace{\frac{dx^i}{dt}}_{v^i}}\,dt$$

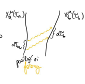
v STR: $\sqrt{-\eta_{00} - 0 - \eta_{ij}v^iv^j}\,dt = \sqrt{-1 - \underbrace{\delta_{ij}v^iv^j}}\,dt$

tohle by bylo $\frac{v^2}{c^2}$, ale jsme v geometrizovaných jednotkách, takže $c^2 = 1$

tzn. jde pouze o rozšíření speciálněrelativistické dilatace

posun frekvence:

chceme studovat efekt gravitačního pole, takže chceme omezit např. dopplerovské jevy



bude nás zajímat $\frac{\nu_b}{\nu_a} = \frac{\frac{1}{d\tau_b}}{\frac{1}{d\tau_a}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)_a}{\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)_b}}}_{\text{tohle známe}}\ \underbrace{\frac{dt_a}{dt_b}}_{\text{ale tohle ne}}$

… přepsali jsme problém z podílu vlastních period do podílu souřadnicových period

když v prostoru obě pozorovatelky stojí, je jejich prostorová rychlost nulová $v^i_{a,b} = 0$

… nenulové jen $\frac{dx^0}{dt}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-(g_{tt})_a}{-(g_{tt})_b}}\ \frac{dt_a}{dt_b}$$

kdy je tohle 1? … když oběma fotonům trvá cesta od jedné pozorovatelky ke druhé stejně dlouho

↳ ve smyslu souřadnicového času myslím

víme, že jsou to fotony: $ds^2 = 0 = g_{tt}\,dt^2 + 2g_{tj}\,dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i dx^j$

to se dá vyřešit jako kvadratická rovnice pro dt

$$dt = \frac{-2g_{tj}dx^j \pm \sqrt{4g_{tj}^2 dx^{j2} - 4g_{tt}g_{ij}dx^idx^j}}{2g_{tt}}$$

chceme $\Delta t_{AB} = \int_A^B dt$ dosadíme <u>stejné pro všechny fotony</u>, nezávislé na t

⇒ integrand, tj. dt nesmí záviset na čase

- dx^j jsou v pohodě, pozorovatelky stojí na místě
- ⇒ nutnou podmínkou je stacionarita metriky $g_{\mu\nu,t} = 0$

za předpokladu, že je to splněno, platí $\frac{\nu_b}{\nu_a} = \sqrt{\frac{-(g_{tt})_a}{-(g_{tt})_b}}$

newtonovská limita takto počítám $\frac{\nu_b}{\nu_a} = \sqrt{\frac{1+2\Phi_a}{1+2\Phi_b}} \doteq (1+\Phi_a)(1-\Phi_b) \doteq 1 + \Phi_a - \Phi_b + \cancel{O(\Phi^2)}$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_a} = \frac{\nu_b - \nu_a}{\nu_a} = \Phi_a - \Phi_b$$

př. sférický symetrický potenciál $\frac{\Delta\omega}{\nu_a} = -\frac{GM}{c^2 r_a} + \frac{GM}{c^2 r_b} \doteq -\frac{GM_\odot}{c^2 R_\odot}$

$r_b \gg r_a$; např. a … Slunce ⊙, b … Země

homogenní pole $\frac{\Delta\omega}{\nu_a} = -\frac{g\,\Delta l}{c^2}$ $\quad \Delta l = l_b - l_a$

takle spočítal i Einstein intuicí $h\nu_b = h\nu_a - E_{\text{potenciální}} = h\nu_a - mg\Delta l \Rightarrow \nu_b = \nu_a - \frac{h\nu_a g\Delta l}{c^2}$

$h\nu_a = E = mc^2$

jiná představa: $c\,\Delta t_{AB} = \Delta l + \underbrace{\frac{1}{2}g\left(\Delta t_{AB}\right)^2}_{\text{tohle zanedbáme}}$ něco jako Dopplerův jev $\nu_b = \nu_a\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_a\left(1 - \frac{g\Delta l}{c^2}\right)$

(Př.) orbitující satelit – jedna pozorovatelka na Zemi (stojí); druhá pozorovatelka na orbitě (pohybuje se)

$$\frac{\nu_b}{\nu_a} = \frac{\sqrt{\left[-(\eta_{tt}+h_{tt}) - 2(\eta_{tj}+h_{tj})\frac{dx^j}{dt} - (\eta_{ij}+h_{ij})v^iv^j\right]_a}}{\sqrt{-(g_{tt})_b}} = \frac{\sqrt{1+2\Phi_a - v_a^2}}{\sqrt{1+2\Phi_b}} \doteq 1 + \frac{3}{2}\Phi_a - \Phi_b$$

pro kruhový oběh $v_a^2 = -\Phi_a$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_a} = \frac{3}{2}\Phi_a - \Phi_b = \frac{M}{R} - \frac{3}{2}\frac{M}{R+\Delta l}$$

pro Zemi; Δl výška nad povrchem Země

$$= M\,\frac{2(R+\Delta l) - 3R}{2R(R+\Delta l)}$$

ve standardních jednotkách

$$= -\frac{M}{2R}\,\frac{R - 2\Delta l}{R+\Delta l} = -3{,}44\cdot10^{-10}\cdot\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}$$

na oběžné výšce závislý případ, se může navzájem rušit v $\Delta l = \frac{R}{2}$

jsou proti sobě gravitační a příčný Dopplerův efekt

posunutí modrá, posunutí červená

Přednáška 4

Thursday, 13 March 2025 15:38

Poznámka k satelitní navigaci

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_A} = -3{,}47 \cdot 10^{-10}\,\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}$$

nejjednodušší případ přijímání signálu z jednoho satelitu

zjišťujeme z toho svou vertikální polohu

$$\frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_A} \sim \frac{\frac{1}{d\tau_B} - \frac{1}{d\tau_A}}{\frac{1}{d\tau_A}} = \frac{d\tau_A - d\tau_B}{d\tau_B}$$

Země, satelit, perioda

$$\Rightarrow\quad d\tau_A - d\tau_B = \left(-3{,}47\cdot 10^{-10}\cdot\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}\right) d\tau_B$$

↳ to je, o kolik se hodiny na satelitu a na Zemi rozejdou za nějaký časový úsek $d\tau_B$ na Zemi

$$d\tau_B \approx 1\,\text{den} \Rightarrow |d\tau_A - d\tau_B| \approx \underline{3\cdot 10^{-5}\,\text{s}}\,\left|\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}\right|$$

↳ to vypadá hodně málo

pro určování polohy je třeba přenásobit čas rychlostí světla…

$$c\,|d\tau_A - d\tau_B| \approx \underline{9\,\text{km}}\,\left|\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}\right|$$

↳ to už je řádově celkem dost

pro GPS $\Delta l \doteq 20\,200$ km ⇒ chyba řádově 11,52 km/den

Kovariantní derivace

na hladké varietě afinní konexe – říká, jakým způsobem „přenášet" (porovnávat) tečné prostory vektorové/kovektorové/tenzorové v různých bodech variety

pro definici derivace potřebujeme afinní konexi – potřebujeme odečítat dvě věci v místech blízko u sebe a pak to nějak limitit

v OTR jsou složky afinní konexe Christoffelovy symboly a jsou dány metrikou (souvislost s metrikou je nesamozřejmá, pro OTR speciální)

paralelní přenos: $\frac{dV^\mu}{dp} + \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\lambda = 0$

pokud máme rozšíření V^μ i mimo křivku, můžeme první člen napsat pomocí gradientu V^μ

$$V^\mu{}_{,\varkappa}\frac{dx^\varkappa}{dp} + \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}V^\lambda = 0$$

to je potřeba, abychom měli gradient definovaný

vytknu

$$\left(V^\mu{}_{,\varkappa} + \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}V^\lambda\right)\frac{dx^\varkappa}{dp} = 0$$

už jsme řešili, že $\Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}$ není tenzor a $\frac{dV^\mu}{dp}$ není vektor (chovají se slušně jen vůči lineárním transformacím)

⇒ $V^\mu{}_{,\varkappa}$ není tenzor

$$\frac{\partial V'^\mu}{dx'^\varkappa} = \frac{\partial}{\partial x'^\varkappa}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}V^\alpha\right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\varkappa\partial x^\alpha}V^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial V^\alpha}{\partial x'^\varkappa}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\varkappa}V^\alpha}_{\text{tohle je ten člen fuj navíc}} + \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\varkappa}\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}}_{\text{tohle je ten ok tenzorový člen}}$$

ovšem: celá rovnice je vektorová & $\frac{dx^\varkappa}{dp}$ je vektor

⇒ $\left(V^\mu{}_{,\varkappa} + \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}V^\lambda\right)$ je nutně $(\text{tenzor})^\mu{}_\varkappa$

⇒ definujeme kovariantní derivaci vektoru jako derivaci, která zachovává tenzorovost

(právě jsme viděli, že parciální derivace ji nezachovává)

$$\boxed{V^\mu{}_{;\varkappa} := V^\mu{}_{,\varkappa} + \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}V^\lambda}$$

Pro kovektor: $\frac{dc_\alpha}{dp} - \Gamma^\mu{}_{\varkappa\alpha}\frac{dx^\varkappa}{dp}c_\mu = 0$

$$\Rightarrow\quad \boxed{c_{\alpha;\varkappa} := c_{\alpha,\varkappa} - \Gamma^\mu{}_{\varkappa\alpha}c_\mu}$$

Pro obecný tenzor vždy parciální derivace & pak správný počet příslušných členů dle počtu příslušných indexů.

Invariant: $\boxed{\Phi_{;\alpha} := \Phi_{,\alpha}}$

↳ toto už je kovektor: ⇒ netřeba žádné opravné členy

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}$$

$$\underbrace{\Phi'_{,\alpha} = \Phi_{,\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}}_{\text{transformace jako kovektor}}$$

Kdybychom se na to podívali zpětně: promítneme-li kovariantní derivaci do směru (řekněme do směru křivky)

$$V^\mu{}_{;\varkappa}\frac{dx^\varkappa}{dp} = \left(V^\mu{}_{,\varkappa} + \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}V^\lambda\right)\frac{dx^\varkappa}{dp} \leftarrow \text{LS rovnice pro paralelní přenos}$$

$=: \frac{DV^\mu}{dp}$ „absolutní derivace"

⇒ kompaktní zápis rovnice paralelního přenosu

$$\boxed{\frac{DV^\mu}{dp} = 0}$$

podobně geodetika: $\frac{D}{dp}\left(\frac{dx^\mu}{dp}\right) = 0$ případně $\frac{Du^\mu}{d\tau} = 0$

obecná pohybová rovnice: $\frac{Dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$

↳ čtyřsíla

rozdíl od STR: použití absolutní derivace namísto parciální

Lorentzova čtyřsíla např. $q\,F^{\mu\nu}u_\nu$

Základní vlastnost(i) kovariantní derivace: derivujeme metriku

$$g_{\mu\nu;\rho} = g_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\iota{}_{\rho\mu}g_{\iota\nu} - \Gamma^\iota{}_{\rho\nu}g_{\mu\iota}$$

jako první se tu napíše ten index, podle kterého se derivuje

$$= g_{\mu\nu,\rho} \underbrace{- \Gamma_{\nu\rho\mu} - \Gamma_{\mu\rho\nu}}_{\text{mínus symetrizace } \Gamma_{\dots} \text{ v } \mu \text{ a } \nu} \overset{\text{kdyby se dosadilo}}{=} 0$$

$$\boxed{g_{\mu\nu;\rho} = 0}$$

… speciální vlastnost Levi-Civitovy afinní konexe používané v OTR

„anihiluje metriku"

VAROVÁNÍ:

$$V_{\alpha,\mu} = \left(g_{\alpha\beta}V^\beta\right)_{,\mu} = \underbrace{g_{\alpha\beta,\mu}V^\beta}_{\text{! navíc!}} + g_{\alpha\beta}V^\beta{}_{,\mu}$$

metrikou nelze jednoduše snižovat/zvyšovat indexy, co se parciálně derivují

protože metrika nekomutuje s parciální derivací (je různá v různých místech)

pro výraz typu $V_{\alpha;\mu}$ se to nerozbije, protože $g_{\alpha\beta;\mu}$ je nula

Křivost

torze: $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$

X, Y hladká vektorová pole

komutátor:

$$T^\mu{}_{\varkappa\lambda}X^\varkappa Y^\lambda = \underbrace{Y^\mu{}_{;\varkappa}}_{= \cancel{Y^\mu{}_{,\varkappa}} + \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}Y^\lambda}X^\varkappa - \underbrace{X^\mu{}_{;\varkappa}}_{\cancel{X^\mu{}_{,\varkappa}} + \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}X^\lambda}Y^\varkappa - \left(\cancel{Y^\mu{}_{,\varkappa}X^\varkappa} - \cancel{X^\mu{}_{,\varkappa}Y^\varkappa}\right)$$

skoro totéž, ale parciální derivace

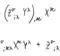
$$= \Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda}X^\varkappa Y^\lambda - \Gamma^\mu{}_{\lambda\varkappa}X^\varkappa Y^\lambda = \underbrace{\left(\Gamma^\mu{}_{\varkappa\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\varkappa}\right)}_{\text{v OTR je tohle nula}}X^\varkappa Y^\lambda$$

„torze vyjadřuje míru nezavření infinitezimálního geodetického rovnoběžníku"

* a to bylo asi všechno k torzi v této přednášce *

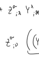
Křivost: je něco jiného; vyjadřuje, jak moc je paralelní přenos neintegrabilní

obrázek:



tenhle rozdíl

ještě lepší obrázek: sféra



Křivost: $R(X,Y)Z := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$

$$R^\sigma{}_{\nu\varkappa\lambda}Z^\nu X^\varkappa Y^\lambda = \left(Z^\sigma{}_{;\lambda}Y^\lambda\right)_{;\varkappa}X^\varkappa - \left(Z^\sigma{}_{;\varkappa}X^\varkappa\right)_{;\lambda}Y^\lambda - Z^\sigma{}_{;\nu}\left(Y^\nu{}_{,\varkappa}X^\varkappa - X^\nu{}_{,\lambda}Y^\lambda\right)$$

$$= Z^\sigma{}_{;\lambda\varkappa}Y^\lambda X^\varkappa - Z^\sigma{}_{;\varkappa\lambda}X^\varkappa Y^\lambda + Z^\sigma{}_{;\lambda}Y^\lambda{}_{;\varkappa}X^\varkappa - Z^\sigma{}_{;\varkappa}X^\varkappa{}_{;\lambda}Y^\lambda - Z^\sigma{}_{;\nu}Y^\nu{}_{,\varkappa}X^\varkappa + Z^\sigma{}_{;\nu}X^\nu{}_{,\lambda}Y^\lambda$$

$$= \left(Z^\sigma{}_{;\lambda\varkappa} - Z^\sigma{}_{;\varkappa\lambda}\right)X^\varkappa Y^\lambda + Z^\sigma{}_{;\nu}\underbrace{\left(\left(Y^\nu{}_{;\varkappa} - Y^\nu{}_{,\varkappa}\right)X^\varkappa - \left(X^\nu{}_{;\lambda} - X^\nu{}_{,\lambda}\right)Y^\lambda\right)}_{\text{to je torze } T^\nu{}_{\varkappa\lambda}X^\varkappa Y^\lambda}$$

$$= \underbrace{\left(Z^\sigma{}_{;\lambda\varkappa} - Z^\sigma{}_{;\varkappa\lambda}\right)X^\varkappa Y^\lambda}_{\text{komutátor kovariantních derivací}} + \underbrace{Z^\sigma{}_{;\nu}T^\nu{}_{\varkappa\lambda}X^\varkappa Y^\lambda}_{\text{člen s torzí}}$$

BEZ TORZE:

nechť V_ν je kovektor

podívejme $V_{\nu;\varkappa\lambda} - V_{\nu;\lambda\varkappa} = W_{\nu\varkappa;\lambda} - W_{\nu\lambda;\varkappa}$

označme $W_{\nu\varkappa} := V_{\nu;\varkappa}$

$$= W_{\nu\varkappa,\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}W_{\sigma\varkappa} - \cancel{\Gamma^\sigma{}_{\lambda\varkappa}W_{\nu\sigma}} - \left(W_{\nu\lambda,\varkappa} - \Gamma^\sigma{}_{\varkappa\nu}W_{\sigma\lambda} - \cancel{\Gamma^\sigma{}_{\varkappa\lambda}W_{\nu\sigma}}\right)$$

odečteme, protože Γ je v druhých dvou indexech symetrické

(to platí bez torze, tzn. v OTR ano)

$$= \cancel{V_{\nu,\varkappa\lambda}} - \left(\Gamma^\sigma{}_{\varkappa\nu}V_\sigma\right)_{,\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\left(V_{\sigma,\varkappa} - \Gamma^\iota{}_{\varkappa\sigma}V_\iota\right) - \cancel{V_{\nu,\lambda\varkappa}} + \left(\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}V_\sigma\right)_{,\varkappa} + \Gamma^\sigma{}_{\varkappa\nu}\left(V_{\sigma,\lambda} - \Gamma^\iota{}_{\lambda\sigma}V_\iota\right)$$

$\nu, \varkappa, \lambda$ volné indexy, nejdou přeznačovat

něco se tam pokrátí – např. všechny členy s derivací V (žlutá)

$$= -\Gamma^\sigma{}_{\varkappa\nu,\lambda}V_\sigma + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\Gamma^\iota{}_{\varkappa\sigma}V_\iota + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu,\varkappa}V_\sigma - \Gamma^\sigma{}_{\varkappa\nu}\Gamma^\iota{}_{\lambda\sigma}V_\iota$$

přeznačme příhodná (ne všechna) σ, ι na něco stejného

& přeuspořádání členů

$$\underbrace{\left(\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu,\varkappa} - \Gamma^\rho{}_{\varkappa\nu,\lambda} + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\Gamma^\rho{}_{\varkappa\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\varkappa\nu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\right)}_{R^\rho{}_{\nu\varkappa\lambda}}V_\rho$$

$R^\rho{}_{\nu\varkappa\lambda}$ Riemannův tenzor

Riemannův tenzor v přirozené podobě má jeden index nahoře a tři dole

k jeho definici není vůbec třeba metrika, stačí složky afinní konexe

druhá běžná podoba Riemannova tenzoru, jestliže máme metriku:

$$R_{\mu\nu\varkappa\lambda} := g_{\mu\rho}R^\rho{}_{\nu\varkappa\lambda}$$

zde se hodí to varování o metrice a parciální derivaci

$$= \underbrace{\left(g_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\right)}_{\Gamma_{\mu\lambda\nu}}{}_{,\varkappa} - g_{\mu\rho,\varkappa}\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} - \underbrace{\left(g_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\varkappa\nu}\right)}_{\Gamma_{\mu\varkappa\nu}}{}_{,\lambda} + g_{\mu\rho,\lambda}\Gamma^\rho{}_{\varkappa\nu} + \Gamma_{\mu\varkappa\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\varkappa\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda,\nu\varkappa} + \cancel{g_{\mu\nu,\lambda\varkappa}} - g_{\lambda\nu,\mu\varkappa} - g_{\mu\varkappa,\nu\lambda} - \cancel{g_{\mu\nu,\varkappa\lambda}} + g_{\varkappa\nu,\mu\lambda}\right)$$

$$+ \Gamma^\rho{}_{\varkappa\nu}\left(\underbrace{g_{\mu\rho,\lambda}}_{= \Gamma_{\rho\lambda\mu} + \cancel{\Gamma_{\mu\lambda\rho}}} - \cancel{\Gamma_{\mu\lambda\rho}}\right) - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\left(\underbrace{g_{\mu\rho,\varkappa}}_{\Gamma_{\rho\varkappa\mu} + \cancel{\Gamma_{\mu\varkappa\rho}}} - \cancel{\Gamma_{\mu\varkappa\rho}}\right)$$

$$\boxed{R_{\mu\nu\varkappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda,\nu\varkappa} + g_{\varkappa\nu,\mu\lambda} - g_{\lambda\nu,\mu\varkappa} - g_{\mu\varkappa,\nu\lambda}\right) + g_{\rho\sigma}\left(\Gamma^\rho{}_{\nu\varkappa}\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma{}_{\mu\varkappa}\right)}$$

Vlastnosti Riemannova tenzoru: $R^\rho{}_{\nu\varkappa\lambda}$ antisymetrie v $\varkappa\lambda$

$R^\rho{}_{\{\nu\varkappa\lambda\}} = 0$ 1. Bianchiho identity

součet všech cyklických permutací v těchto třech indexech

$R_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ antisymetrie

toto jsou všechny nezávislé symetrie $R_{\mu\nu\varkappa\lambda}$

z těchto symetrií můžeme dojít k počtu nezávislých složek $R_{\mu\nu\varkappa\lambda}$

$R_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ … $6\cdot 6 = 36$

$R^\rho{}_{\{\nu\varkappa\lambda\}}$ … $-4\cdot 4 = -16$

= 20 nezávislých složek

Přednáška 5

Thursday, 20 March 2025 15:40

opak z minula

značení: $R_{\mu\{\nu\varkappa\lambda\}} = 0$ (1. Bianchiho identity)

píšeme

sečteme
$$\begin{cases} \cancel{R_{\mu\nu\varkappa\lambda}} + \cancel{R_{\mu\lambda\nu\varkappa}} + R_{\mu\varkappa\lambda\nu} = 0 \\ \cancel{R_{\lambda\mu\nu\varkappa}} + \cancel{R_{\lambda\varkappa\mu\nu}} + R_{\lambda\nu\varkappa\mu} = 0 \\ \cancel{R_{\varkappa\lambda\mu\nu}} + \cancel{R_{\varkappa\nu\lambda\mu}} + R_{\varkappa\mu\nu\lambda} = 0 \\ \cancel{R_{\nu\varkappa\lambda\mu}} + \cancel{R_{\nu\mu\varkappa\lambda}} + R_{\nu\lambda\mu\varkappa} = 0 \end{cases}$$

ty škrtlé se díky antisymetrii odečtou

ty vpravo se naopak sečtou $\Rightarrow 2(R_{\mu\varkappa\lambda\nu} + R_{\lambda\nu\varkappa\mu}) = 0$

dále upravujeme
$$R_{\mu\varkappa\lambda\nu} - R_{\lambda\nu\mu\varkappa} = 0$$
$$R_{\mu\varkappa\lambda\nu} = R_{\lambda\nu\mu\varkappa}$$

symetrické vůči prohození dvojic indexů

někdy se píše $\underline{R_{\mu\varkappa\lambda\nu}}$ (podtržení značí symetrii)

z toho též $R_{\mu\nu\varkappa\lambda} = R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = (-1)(-1)\,R_{\lambda\varkappa\nu\mu} = R_{\lambda\varkappa\nu\mu}$

(indexy seřazené od konce vůči pořadí na začátku)

pozn. na okraj: netrivialita v OTR není přítomnost gravitačního pole, ale jeho nehomogenita

Geometrický význam Riemanna

vektůrek count |

už jsme řešili, že obecně je paralelní přenos neintegrabilní

zároveň ale je integrabilní v plochém prostoru (někdy se tomu říká absolutní paralelismus, např. euklidovský prostor)

jestliže Riemannův tenzor popisuje „plochost"/křivost, měla by integrabilita záviset právě na něm

Integrabilita obecné diferenciální formy

zadání, běžné ve fyzice: v jednom bodě známe hodnotu a ve všech bodech známe gradient nějaké veličiny

v jakých případech se můžeme do jiného bodu dostat integrací přes libovolnou křivku? (→ získat hodnotu v jiném bodě)

obecná forma: $dT^{\cdots}_{\cdots} = f^{\cdots}_{\cdots\rho}\, dx^\rho$

podmínka integrability: $0 = \oint_\gamma f^{\cdots}_{\cdots\rho}\, dx^\rho = \int_S f^{\cdots}_{\cdots\rho,\sigma}\, dS^{\rho\sigma} = \int_S \underbrace{\left(f^{\cdots}_{\cdots\rho,\sigma} - f^{\cdots}_{\cdots\sigma,\rho}\right)}_{=0}\, d_{(1)}x^\rho d_{(2)}x^\sigma = 0$

integrál po uzavřené dráze

(odpovídá rotace = 0 pro konzervativní pole)

element plochy
$$dS^{\rho\sigma} = \underbrace{d_{(1)}x^\rho d_{(2)}x^\sigma - d_{(1)}x^\sigma d_{(2)}x^\rho}_{\text{antisymetrické... antisymetrie se propíše i do } f}$$

(1), (2) vektůrky definující plošku

klíčové slovo: Pfaffovy formy

speciální *zářný* příklad: souřadnicová transformace $dx'^\mu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\, dx^\nu$ — tohle je to $f^{\cdots}_{\cdots\nu}$

požadavek $f^{\cdots}_{\cdots\rho,\sigma} = f^{\cdots}_{\cdots\sigma,\rho}$ je požadavek na záměnnost druhých parciálních derivací

paralelní přenos $\dfrac{dV^\mu}{dp} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} \dfrac{dx^\varkappa}{dp} V^\lambda = 0$

známe-li od V gradient nebo ho známe jako pole: $\left(\dfrac{\partial V^\mu}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} V^\lambda\right)\dfrac{dx^\varkappa}{dp} = 0$

(abychom věděli, co je parciální derivace)

$$dV^\mu \overset{\circledast}{=} \underbrace{-\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\, dx^\varkappa\, V^\lambda}_{f^{\cdots}_{\cdots\varkappa}}$$

požadavek na integrabilitu: $(\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} V^\lambda)_{,\iota} = (\Gamma^\mu_{\iota\lambda} V^\lambda)_{,\varkappa}$

rozepíšeme $\underline{\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda,\iota} V^\lambda} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} V^\lambda_{,\iota} = \underline{\Gamma^\mu_{\iota\lambda,\varkappa} V^\lambda} + \Gamma^\mu_{\iota\lambda} V^\lambda_{,\varkappa}$

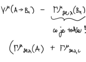
přeznačení $\lambda \to \sigma$

sem dosadit z $\circledast$

$$\Gamma^\mu_{\varkappa\sigma,\iota} V^\sigma + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}(-\Gamma^\lambda_{\iota\sigma}) V^\sigma = \Gamma^\mu_{\iota\sigma,\varkappa} V^\sigma + \Gamma^\mu_{\iota\lambda}(-\Gamma^\lambda_{\varkappa\sigma}) V^\sigma$$
$$\underbrace{\left(\Gamma^\mu_{\varkappa\sigma,\iota} - \Gamma^\mu_{\iota\sigma,\varkappa} + \Gamma^\mu_{\iota\lambda}\Gamma^\lambda_{\varkappa\sigma} - \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\iota\sigma}\right)}_{=R^\mu_{\ \sigma\iota\varkappa}} V^\sigma = 0$$

Kdy toto platí? Když ta závorka je nula

jiný způsob: víc obrázkový & víc otrocký



„to je infinitezimální obrázek"

defekt vektoru

$$V^\mu(A\to B_1) = V^\mu(A) - \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}(A)\, d_{(1)}x^\varkappa(A)\, V^\lambda(A)$$

pokud veličina není označená jakém bodě je, je v A

$$V^\mu(A\to B_1\to C) = V^\mu(A\to B_1) - \underbrace{\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}(B_1)}_{\text{co je tohle?}}\, d_{(2)}x^\varkappa(B_1)\, V^\lambda(A\to B_1)$$

rozvoj Taylorem $\left(\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}(A) + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda,\iota}\, d_{(1)}x^\iota\right) d_{(2)}x^\varkappa(B_1) \left(V^\lambda - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\, d_{(1)}x^\alpha(A)\, V^\beta\right)$

$$V^\mu(A\to B_1\to C) = V^\mu - \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} d_{(1)}x^\varkappa(A) V^\lambda - \Big(\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} V^\lambda d_{(2)}x^\varkappa(B_1) - \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\, d_{(1)}x^\alpha(A)\, d_{(2)}x^\varkappa(B_1)\, V^\beta$$
$$+ \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda,\iota}\, d_{(1)}x^\iota(A)\, d_{(2)}x^\varkappa(B_1)\, V^\lambda - \text{něco, co zanedbáme, je to } o(d^3)\Big)$$

přenos po druhé větvi: stejné, jen se jedničky změní na dvojky a naopak

$$\delta V^\mu(C) = V^\mu(A\to B_2\to C) - V^\mu(A\to B_1\to C)$$
$$= \underbrace{0}_{o(d^0)} + \underbrace{\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} V^\lambda \left(d_{(1)}x^\varkappa(A) + d_{(2)}x^\varkappa(B_1) - d_{(2)}x^\varkappa(A) - d_{(1)}x^\varkappa(B_2)\right)}_{o(d^1)=0}$$

I II III IV

je zadání, že se to odečte, že vedou do stejného bodu

u členů $o(d^2)$ již uvažujeme všechny úseky dx v A, neboť $d_{(2)}x^\varkappa(B_1) = d_{(2)}x^\varkappa(A) + \underbrace{o(d^2)}_{\text{tohle zahodím}}$

$$-\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda,\iota} V^\lambda\, d_{(1)}x^\iota\, d_{(2)}x^\varkappa + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} V^\beta d_{(1)}x^\alpha\, d_{(2)}x^\varkappa - \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} V^\beta d_{(2)}x^\alpha\, d_{(1)}x^\varkappa + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda,\iota} V^\lambda\, d_{(2)}x^\iota\, d_{(1)}x^\varkappa$$

„teď už je to jen indexový boj"

$$= V^\beta d_{(1)}x^\varkappa d_{(2)}x^\alpha \underbrace{\left(\Gamma^\mu_{\varkappa\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\varkappa} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\varkappa\beta} - \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)}_{R^\mu_{\ \beta\varkappa\alpha}}$$

(možná se tady někde v průběhu ztratilo mínus před celou tou věcí)

Fyzikální význam Riemanna

Einstein in STR: hmm Zug

Einstein in GTR: hmm Aufzug

víme $g_{00} = -1 - 2\Phi$

... prej víme, že Riemann reprezentuje nehomogenitu gravitačního pole, ale nevíme jak přesně nebo jestli ji reprezentuje plně

světočáry těles, na které působí jen gravitace ... geodetiky

kongruence geodetik: $(\tau, l) \to x^\mu(\tau, l)$ zobrazení, které je difeomorfismus

$u^\mu := \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ l „čísluje" geodetiky (ale spojitý index)

$\delta x^\mu := \dfrac{dx^\mu}{dl}$ každým bodem prochází pouze jedna křivka

$$\frac{D\,\delta x^\mu}{d\tau} = \underbrace{\frac{d}{d\tau}\delta x^\mu}_{\frac{d}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dl} = \frac{d}{dl}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d}{dl}u^\mu} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} u^\varkappa \delta x^\lambda = \frac{d}{dl}u^\mu + \underbrace{\Gamma^\mu_{\lambda\varkappa}}_{\substack{\text{symetrické}\\ \text{v } \varkappa\lambda}} \delta x^\lambda u^\varkappa = \frac{Du^\mu}{dl}$$

pro difeomorfismus jdou ty derivace prohodit

$$\underline{\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}} \Leftrightarrow \frac{D\,\delta x^\mu}{d\tau} \overset{\circledast}{=} \frac{Du^\mu}{d\tau} \Leftrightarrow \delta x^\mu_{\ ,\nu} u^\nu = u^\mu_{\ ,\nu}\delta x^\nu,$$ což se dá značit $[u, \delta x]^\mu = 0$ (komutující vektorová pole)

případně $(\mathcal{L}_u \delta x)^\mu = 0$ (Lieova derivace)

podívejme se na
$$\frac{d}{d\tau}\underbrace{\left(g_{\mu\nu} u^\mu \delta x^\nu\right)}_{\text{skalár}} = \frac{D}{d\tau}\left(g_{\mu\nu} u^\mu \delta x^\nu\right) = g_{\mu\nu}\frac{D}{d\tau}\left(u^\mu \delta x^\nu\right)$$
$$= g_{\mu\nu}\underbrace{\frac{Du^\mu}{d\tau}}_{\substack{=0\\ \text{protože máme}\\ \text{geodetiky}}}\delta x^\nu + g_{\mu\nu}u^\mu \frac{D\,\delta x^\nu}{d\tau} \overset{\circledast}{=} g_{\mu\nu}u^\mu\frac{Du^\nu}{dl} = \frac{1}{2}\frac{D}{dl}\underbrace{\left(g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right)}_{\text{invariant}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dl}(-1)$$

$$\frac{D^2\delta x^\mu}{d\tau^2} = \frac{D}{d\tau}\left(\frac{D\,\delta x^\mu}{d\tau}\right) = \frac{D}{d\tau}\left(\frac{Du^\mu}{dl}\right) = \frac{D}{d\tau}\Big(u^\mu_{\ ;\beta}\underbrace{\delta x^\beta}_{\frac{dx^\beta}{dl}}\Big) = u^\mu_{\ ;\beta\alpha}\delta x^\beta u^\alpha + u^\mu_{\ ;\beta}\underbrace{\frac{D\,\delta x^\beta}{d\tau}}_{=\frac{Du^\beta}{dl}}$$

$$= \underbrace{u^\mu_{\ ;\alpha\beta}u^\alpha \delta x^\beta + u^\mu_{\ ;\beta}\frac{Du^\beta}{dl}}_{} + R^{\iota\mu}_{\ \ \beta\alpha} u_\iota u^\alpha \delta x^\beta$$

$$= \frac{D}{dl}\Big(\underbrace{u^\mu_{\ ;\alpha}u^\alpha}_{\frac{Du^\mu}{d\tau} = a^\mu = 0}\Big) + \bigcirc$$

zrychlení, ale to je nula, protože geodetiky

$$\boxed{\frac{D^2\delta x^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\ \iota\beta\alpha}u^\iota \delta x^\beta u^\alpha}$$ geodetická deviace

co je sakra čtyřrychlost v globálních obecných souřadnicích?

víme to v LIFE (lok. inerciálním systému) $u^{\hat\alpha} = (1, 0, 0, 0)$ ($\frac{d\tau}{d\tau}$)

pak $\delta x^{\hat\alpha} = (0, \delta x^{\hat i})$

aby $\eta_{\alpha\beta}u^\alpha \delta x^\beta = 0$ mají na sebe být kolmé

$\Rightarrow$ můžeme psát
$$\frac{d^2\delta x^{\hat i}}{d\tau^2} = -R^{\hat i}_{\ \hat 0\hat j\hat 0}\ 1\cdot\delta x^{\hat j}\cdot 1$$

z čtyřrychlosti

tohle je něco, co můžeme reálně proměřit (můžeme tedy změřit některé složky R)

newtonovská rovnice: $\dfrac{d^2\delta x^i}{dt^2} = -\underbrace{\Phi^{,i}_{\ \ j}}_{}\,\delta x^j$ ... vlastně skoro úplně stejná rovnice

slapový tenzor

druhá derivace gravitačního potenciálu

Přednáška 6

Thursday, 27 March 2025 15:42

obecný povídací úvod:

„geometrie = fyzika"

newtonovská gravitační rovnice: $\Delta\Phi = 4\pi\rho$

dokážeme z toho už teď hrubě předjímat Einsteinovy rovnice

$\Delta\Phi$ … druhé derivace metriky

ρ … hustota energie dle vzorce $E = mc^2$

dnes se budeme bavit „právě o tom ρ" … o zdrojích pole, resp. o zdrojích zakřivení časoprostoru

Tenzor energie a hybnosti

proč by měl být na pravé straně zrovna tenzor energie a hybnosti? < nevíme / vyjde to tam variačně z lagrangeovského formalismu

co je tenzor energie & hybnosti?

⇒ THROWBACK DO STR

Hmotný nabitý nekoherentní prach

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu_L \quad \left(= q\, F^{\mu\nu} u_\nu\right)$$

$p^\mu = m_0 u^\mu$ $\qquad$ m_0 se při působení Lorentzovy síly nemění, protože $\underbrace{\eta_{\mu\nu} F^\mu u^\nu}_{=0 \text{ pro } F^\mu_L} = -c^2 \frac{dm_0}{d\tau}$

takže $m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu_L \qquad \Big/ \frac{d}{dV_0}$ přechod k hustotní rovnici

$$\rho_{00}\, \underbrace{u^\mu{}_{,\nu} u^\nu}_{\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}} = \Phi^\mu_L$$

ρ_{00} … klidová hustota klidové hmotnosti

$$\underbrace{\left(\rho_{00} u^\mu u^\nu\right)_{,\nu}}_{T^{\mu\nu}_{prach}} - u^\mu \underbrace{\cancel{\left(\rho_{00} u^\nu\right)_{,\nu}}}_{0 \text{ ZZhm}} = \Phi^\mu_L$$

$u^\mu = \gamma(c, \vec v)$ $\qquad$ $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{\gamma\, dm_0}{\frac{dV_0}{\gamma}} = \gamma^2 \rho_{00}$

$T^{00}_{prach} = \rho_{00} u^0 u^0 = \rho c^2$ hustota energie

$T^{0j}_{prach} = \rho_{00} u^0 u^j = \rho c v^j$ < tok hustoty energie $\cdot \frac{1}{c}$ / hustota hybnosti

$T^{ij}_{prach} = \rho_{00} u^i u^j = \rho v^i v^j$ (ρv^i … hustoty hybnosti, v^j … tok)

EM pole

$$T^{\mu\nu}_{EM} = \frac{1}{\mu}\left(F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma - \frac14 \eta^{\mu\nu} \underbrace{F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}}_{2|\vec B|^2 - 2\frac{|\vec E|^2}{c^2}}\right)$$

μ … permeabilita

$$T^{00}_{EM} = \frac{1}{\mu}\left(\underbrace{F^{0\sigma} F^0{}_\sigma}_{= F^{0j} F^0{}_j} - \frac12\left(|B|^2 - \frac{|E|^2}{c^2}\right)\right) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) = \frac12\left(\vec E\cdot\vec D + \vec H\cdot\vec B\right) = \text{hustota energie } w$$

$F^{00} = 0$ protože F antisymetrický; $= \frac{E^j E_j}{c^2} = \frac{\vec E\cdot\vec E}{c^2} = \frac{|\vec E|^2}{c^2}$

$$T^{0j}_{EM} = \frac{1}{\mu}\left(\underset{\frac{E^k}{c}}{F^{0k}} F^j{}_k + 0\right) = \frac{1}{\mu}\frac{E^k}{c}\varepsilon^j{}_{kl} B^l = \frac{1}{\mu c}\varepsilon^{jkl} E^k B^l = \frac{1}{\mu c}\left(\vec E\times\vec B\right)_j = \frac{1}{c}\left(\vec E\times\vec H\right)_j$$

Poyntingův vektor$/c$ → hustota toku energie$/c$

$$T^{ij}_{EM} = \frac{1}{\mu}\left(F^{i\sigma} F^j{}_\sigma - \frac14 \underset{\delta^{ij}}{\eta^{ij}} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\right) = \frac{1}{\mu}\left(F^{i\sigma} F^j{}_\sigma - \frac12 \delta^{ij}\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)\right)$$

$$F^{i0} F^j{}_0 + F^{ik} F^j{}_k = -\frac{E^i E^j}{c^2} + \underline{\varepsilon^{ikm}} B_m \underline{\varepsilon^j{}_{kn}} B^n = -\frac{E^i E^j}{c^2} + \delta^{ij} B^2 - B^i B^j$$

$= \delta^{ij}\delta^m{}_n - \delta^i{}_n \delta^{mj}$

celkem

$$= \frac{1}{\mu}\left(-\frac{E^i E^j}{c^2} + \delta^{ij} B^2 - B^i B^j - \frac12 \delta^{ij}\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)\right) = \delta^{ij} w - E^i D^j - H^i B^j$$

$\delta^{ij} \cdot$ hustota energie

$$\mu\, T^{\mu\nu}_{EM,\nu} = F^{\mu\sigma}{}_{,\nu} F^\nu{}_\sigma + F^{\mu\sigma} F^\nu{}_{\sigma,\nu} - \frac14 \eta^{\mu\nu}\, 2\cdot F^{\rho\sigma}{}_{,\nu} F_{\rho\sigma}$$

$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mu j^\alpha$ 1. sada maxwellek

F antisymetrický ⇒ $F^\nu{}_{\sigma,\nu} = -\mu j_\sigma$

$$= F^{\mu\sigma,\nu} F_{\nu\sigma} - \frac12 F^{\rho\sigma,\mu} F_{\rho\sigma} - \mu F^{\mu\sigma} j_\sigma$$

$$= \left(F^{\mu\sigma,\rho} - \frac12 F^{\rho\sigma,\mu}\right) F_{\rho\sigma} - \mu F^{\mu\sigma} j_\sigma$$

sčítá se přes ρ i σ a $F_{\rho\sigma}$ je antisymetrický
i v závorce se uplatní pouze antisymetrická část

$$= \underbrace{\left(F^{\mu[\sigma,\rho]} - \frac12 F^{\rho\sigma,\mu}\right)}_{} F_{\rho\sigma} - \mu F^{\mu\sigma} j_\sigma = -\mu F^{\mu\sigma} j_\sigma$$

$\frac12\left(F^{\mu\sigma,\rho} - F^{\mu\rho,\sigma} - F^{\rho\sigma,\mu}\right)$

$-\frac12 \underbrace{\left(F^{\sigma\mu,\rho} + F^{\mu\rho,\sigma} + F^{\rho\sigma,\mu}\right)}_{=0 \text{ z 2. sady Maxwellových rovnic}}$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu}_{EM,\nu} = -F^{\mu\nu}_L j_\nu = -\Phi^\mu_L \quad \text{hustota Lorentzovy čtyřsíly}$$

spřáhneme-li prach & EM pole – ve smyslu, že se prach pohybuje právě jen v poli, které sám budí, vychází nám

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{prach} + T^{\mu\nu}_{EM} = 0 \quad \text{… vyjádření zákonů zachování energie a hybnosti}$$

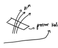
ZPĚT DO OTR

Ideální tekutina

- „nenabitý prach"
- navíc ideální tekutina = neviskózní … jediná věc, co můžeme tedy mít navíc, je izotropní tlak

$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P \cdot ?$ $\qquad$ izotropní ve smyslu prostorovém

$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$



tvrdíme: $h^{\mu\nu}$ projektor na prostor kolmý na čtyřrychlost

$$h^{\mu\nu} h_{\nu\sigma} = \left(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu\right)\left(g_{\nu\sigma} + u_\nu u_\sigma\right)$$
$$= g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} + g^{\mu\nu} u_\nu u_\sigma + u^\mu u^\nu g_{\nu\sigma} + u^\mu u^\nu u_\nu u_\sigma$$
$$= g^\mu{}_\sigma + u^\mu u_\sigma - u^\mu u_\sigma + u^\mu u_\sigma = h^\mu{}_\sigma$$

$$h^{\mu\nu} u_\nu = g^{\mu\nu} u_\nu + u^\mu u^\nu u_\nu = 0$$

$h^{\mu\nu}$ funguje jako 3D metrika v prostoru lokálně kolmém na čtyřrychlost

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P h^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$$

nutně invarianty, ρ odpovídá ρ_{00} z předchozího (klidová hustota klidové hmotnosti)

chceme mít tekutinu jako uzavřený systém, na který nepůsobí žádné jiné síly než < vztlaková / gravitační

požadujeme

$$0 = T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \underbrace{\rho_{;\nu} u^\mu u^\nu}_{\frac{d\rho}{d\tau} u^\mu} + \underbrace{P_{;\nu} u^\mu u^\nu}_{(**)} + (\rho+P)\underbrace{u^\mu{}_{;\nu} u^\nu}_{\frac{Du^\mu}{dx^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} = a^\mu} + (\rho+P) u^\mu u^\nu{}_{;\nu} + \underbrace{P_{;\nu} g^{\mu\nu}}_{(**)} + P \underbrace{g^{\mu\nu}{}_{;\nu}}_{0}$$

$;$ … kovariantní derivace; a^μ … čtyřzrychlení

$(**) \to P_{;\nu} h^{\mu\nu}$

obsahuje členy $\perp$ a členy $\parallel$ s čtyřrychlostí

ty jsou navzájem nezávislé

čtyřzrychlení kolmé na čtyřrychlost: $\quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \quad \Big/ \frac{D}{d\tau}$ obě strany

$$2 g_{\mu\nu} \underbrace{\frac{Du^\mu}{d\tau}}_{a^\mu} u^\nu = \frac{D}{d\tau}(-1) = \frac{d}{d\tau}(-1) = 0$$

invariant, takže $\frac{D}{d\tau}$ a $\frac{d}{d\tau}$ je totéž

$\perp$:

$$(\rho+P) a^\mu = -P_{,\nu} h^{\mu\nu}$$

Eulerova pohybová rovnice

klasicky: $\rho\vec a = -\rho\vec\nabla\Phi - \vec\nabla P$ → pravá strana OTR rovnice

ρ … setrvačná hmotnost, je v OTR $\rho + P$; příspěvek tlaku malý, v negeometrizovaných jednotkách je to P/c^2

$\rho\vec\nabla\Phi$ … gravitační síla, zahrnuta v OTR ve čtyřzrychlení

$\parallel$:

$$\frac{d\rho}{d\tau} + (\rho+P) u^\nu{}_{;\nu} = 0$$

rovnice kontinuity

klasicky $\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \mathrm{div}\,\vec v = 0$ — zde zase navíc P

Podmínky hydrostatické rovnováhy

předepisujeme pohybový stav (statický), z pohybové rovnice vydestilujeme podmínky, za jakých nastává

„já tady nebudu psát klid, ale statická situace, aby to vypadalo … učeněji"

statická situace: $\quad g_{\mu\nu,0} = 0$ (stacionární) & zároveň $g_{0j} \overset{(*)}{=} 0$ (statická)

$$ds^2 = g_{00}\,dt^2 + \underbrace{2 g_{0j}\, dt\, dx^j}_{=0 \text{ aby to bylo stejné při záměně } dt \to -dt} + g_{ij}\, dx^i dx^j$$

$u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$

navíc díky $(*)$ $\quad u_\alpha = g_{\alpha\mu} u^\mu = g_{\alpha 0} u^0 = (u_0, 0, 0, 0)$

$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$, když $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$, pak $u^0 = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}$

$$a_\alpha = u_{\alpha;\nu} u^\nu = \underbrace{u_{\alpha,\nu} u^\nu}_{=0} - \Gamma^\iota{}_{\nu\alpha} u_\iota u^\nu = -\frac12\left(g_{\iota\nu,\alpha} + \underbrace{g_{\alpha\iota,\nu} - g_{\nu\alpha,\iota}}_{}\right) u^\iota u^\nu$$

protože u^ν má jen časovou složku, derivujeme pouze $u_{\alpha,t}$, ale u_α má taky jen časovou složku, která $\sim g_{00}$, a $g_{00,0} = 0$

$= g_{\alpha\iota,\nu} - g_{\alpha\nu,\iota}$ antisymetrické v indexech $\nu\iota$ – násobí se $u^\iota u^\nu$ a to je symetrické, takže to vypadne

$$= -\frac12 g_{\iota\nu,\alpha} u^\iota u^\nu = -\frac12 g_{00,\alpha} u^0 u^0 = \frac12 \frac{g_{00,\alpha}}{g_{00}} = \frac12\left(\ln|g_{00}|\right)_{,\alpha} = \left(\ln\sqrt{-g_{00}}\right)_{,\alpha}$$

místo α lze psát rovnou j, protože $g_{00,0} = 0$

podívejme se na druhou stranu Eulerovy rovnice

$$-P_{,\nu} h^\nu{}_\alpha = -P_{,\nu}\left(\delta^\nu_\alpha + u^\nu u_\alpha\right) = -P_{,\nu}\left(\delta^\nu_\alpha - \delta^\nu_0 \delta^0_\alpha\right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha = 0 \\ -P_{,\nu}\delta^\nu_j = -P_{,j} & \text{pro } \alpha = j \end{cases}$$

celkem: $\quad (\rho+P)\left(\ln\sqrt{-g_{00}}\right)_{,j} = -P_{,j}$

velmi častá speciální a přirozená parametrizace g_{00}: $\quad g_{00} = -e^{2\Phi}$ $\qquad$ pro $\Phi \ll 1$ z Taylora $-1 - 2\Phi$, a tak by to mělo fungovat

Φ má jakýsi správný význam Newtonova gravitačního potenciálu

při dosazení do podmínek hydrostatiky: $\quad (\rho+P)\,\Phi_{,j} = -P_{,j}$

$\Phi_{,j}$, $P_{,j}$ … gravitační & vztlaková síla – jsou v rovnováze

$\rho + P$ … setrvačná hmotnost jednotkového objemového elementu (podle toho, že $\rho+P$ stojí u zrychlení), zároveň gravitační hmotnost, protože zde stojí u derivace gravitačního potenciálu

Přednáška 7

Thursday, 3 April 2025 15:42

Einsteinovy rovnice

Newton: $\Delta\Phi = 4\pi\rho$

z newtonovské limity víme $\Phi \Leftrightarrow$ metrika

LS ... nehomogenita Φ ... bude tam křivost, Riemannův tenzor

PS ... sem dáme tenzor energie a hybnosti – proč? – neptejte, ani Einstein to přesně nevěděl

– je to vhodná veličina pro vyjadřování ZZ, které by měly z těchto rovnic potom plynout

„Teď už jsem to řekl vlastně všechno, stačí jen doplnit detaily."

co nám na té newtonovské rovnici chybí:

– časová derivace – žádná tam není a obě strany se musí rovnat ve stejném čase, což odpovídá nekonečné rychlosti šíření informace o gravitačním poli

– není to invariantní rovnice (kovariantní) } to by se ale dalo na LS vyřešit záměnou $\Delta \Rightarrow \Box$, hehe

– na pravé straně ρ ... hustota energie ... klidová hustota klidové energie? (ne, chceme obecnou rovnici) tak co teda?

... tenzor energie a hybnosti míváme jako dominantní složku neklidovou hustotu neklidové energie, ale kromě toho postihuje i kinetickou část

↳ navíc je to tenzor

zpět k LS: víme, že tam chceme mít $\mathcal{T}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\iota}, g_{\mu\nu,\iota\varkappa})$ (funkce nultých, prvních a druhých derivací metriky)

chceme to mít „invariantní co do formy"

$\Rightarrow$ lemma o jednoznačnosti Riemanna: $\mathcal{T}$ závisí už jen na $\mathcal{T}(g_{\mu\nu}, R^{\mu}{}_{\nu\varkappa\lambda})$

ta hlavní message je, že v $\mathcal{T}(g_{\mu\nu}, \cancel{g_{\mu\nu,\iota}}, g_{\mu\nu,\iota\varkappa})$ škrtneme 1. derivaci

proč? – $g_{\mu\nu,\iota} \sim \Gamma_{\nu\iota\mu} + \Gamma_{\mu\iota\nu}$ není tenzorová veličina sama o sobě, takže tam nemůže zůstat

na 1. derivacích metriky to závisí pouze prostřednictvím Riemanna

– formální důkaz: transformace do LIFE, zde nebude podrobně

– Ok. $R_{\mu\nu\varkappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda,\nu\varkappa} + g_{\nu\varkappa,\mu\lambda} - g_{\mu\varkappa,\nu\lambda} - g_{\nu\lambda,\mu\varkappa}\right) \underbrace{+\ \Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma}_{=0 \text{ v LIFE}}$

v LIFE Riemann explicitně souvisí s 2. derivacemi metriky (2. derivace se dají na oplátku vyjádřit pomocí R)

chceme, aby byl tvar závislosti $\mathcal{T}$ stejný ve všech systémech

$$\boxed{\textbf{Ricciho tenzor} \quad R_{\nu\lambda} := R^{\mu}{}_{\nu\mu\lambda} = g^{\mu\varkappa} R_{\mu\nu\varkappa\lambda}}$$

proč zrovna tohle? z (anti)symetrií Riemanna dostáváme, že všechny ostatní možné kontrakce Riemanna jsou buď 0, nebo se rovnají $\pm R_{\nu\lambda}$

$$\boxed{R := R^{\nu}{}_{\nu} = g^{\nu\lambda} R_{\nu\lambda} \quad \dots \quad \textbf{skalární křivost, Ricciho skalár}}$$

budeme požadovat, aby $\mathcal{T}(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\varkappa\lambda})$ $\underbrace{\text{závislo na } R^{\dots}_{\dots}}_{\text{na 2. derivacích metriky, tedy}}$ (s libovolným počtem indexů) lineárně

na LS má být něco se dvěma indexy (vpravo máme $T_{\mu\nu}$)

↳ mohou tam vystupovat pouze $R_{\mu\nu}$, $R g_{\mu\nu}$ & $g_{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \quad R_{\mu\nu} + C R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}$$

jsou tyhle věci konstanty, nebo funkce?

z požadavku na invarianci co do formy a ze zamyšlení v LIFE to musí být konstanty

budeme chtít určit ty konstanty

Cimmanovský úkrok stranou: **2. Bianchiho identity**

$V_{\nu;\varkappa\lambda} - V_{\nu;\lambda\varkappa} = R^{\sigma}{}_{\nu\varkappa\lambda} V_{\sigma}$ Ricciho identity

podobně to platí i pro tenzor 2. řádu (důkaz ve skriptech, použije se pouze definice kovariantní derivace)

$W_{\mu\nu;\varkappa\lambda} - W_{\mu\nu;\lambda\varkappa} = R^{\sigma}{}_{\mu\varkappa\lambda} W_{\sigma\nu} + R^{\sigma}{}_{\nu\varkappa\lambda} W_{\mu\sigma}$ (kolik indexů má tenzor, tolik členů na pravé straně)

použijeme tento vztah pro gradient $W_{\mu\nu} := V_{\mu;\nu}$

(*) $V_{\nu;\mu\varkappa\lambda} - V_{\nu;\mu\lambda\varkappa} = R^{\sigma}{}_{\nu\varkappa\lambda} V_{\sigma;\mu} + R^{\sigma}{}_{\mu\varkappa\lambda} V_{\nu;\sigma}$

cyklická permutace v $\nu\varkappa\lambda$ dá 1. Bianchiho identity = 0

totéž

srovnejme s: „to znamená, že těm rovnicím asi propojuje, když je od sebe odečteme"

(**) $V_{\nu;\varkappa\lambda\mu} - V_{\nu;\lambda\varkappa\mu} = R^{\sigma}{}_{\nu\varkappa\lambda;\mu} V_{\sigma} + R^{\sigma}{}_{\nu\varkappa\lambda} V_{\sigma;\mu}$

v $\varkappa\lambda\mu$ sudá permutace; v $\mu\varkappa\lambda$ taky sudá permutace; v cyklické permutaci se odečtou; zde ale nevznikne nic triviálního

co tedy uděláme: (*) (**) v obou rovnicích uděláme cyklickou permutaci $\{\mu\varkappa\lambda\}$

pak rovnice sečteme, hromada věcí dá nulu

mělo platit pro libovolný kovektor $\Rightarrow$ získáme výsledek pro Riemanna

$$\boxed{R^{\sigma}{}_{\nu\{\varkappa\lambda;\mu\}} = 0} \quad \text{2. Bianchiho identity}$$

Kontrahovaný (zúžený) 2. Bianchi:

$R^{\sigma\nu}{}_{\{\varkappa\lambda;\mu\}} = R^{\sigma\nu}{}_{\varkappa\lambda;\mu} + R^{\sigma\nu}{}_{\mu\varkappa;\lambda} + R^{\sigma\nu}{}_{\lambda\mu;\varkappa} = 0$ / zúžíme přes $^{\sigma}{}_{\varkappa}$

zúžíme přes 1. a 4. index

$R^{\nu}{}_{\lambda;\mu} - R^{\nu}{}_{\mu;\lambda} + R^{\varkappa\nu}{}_{\lambda\mu;\varkappa} = 0$ / zúžíme podobně $^{\nu}{}_{\lambda}$

$R_{;\mu} - R^{\nu}{}_{\mu;\nu} - R^{\varkappa}{}_{\mu;\varkappa} = 0$

$$\boxed{R_{;\mu} = 2 R^{\nu}{}_{\mu;\nu}}$$

$R_{\mu\nu} + C R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}$ – víme

– chceme, aby divergencí této rovnice vznikla 0 $\quad T^{\nu}{}_{\mu;\nu} = 0$

zderivujeme LS: $R^{\nu}{}_{\mu;\nu} + C (R \delta^{\nu}_{\mu})_{;\nu} + 0 = R^{\nu}{}_{\mu;\nu} + C R_{;\nu} \delta^{\nu}_{\mu} \overset{\text{požadujeme}}{=} 0$

$R^{\nu}{}_{\mu;\nu} + C R_{;\mu} = 0$ dosadíme za $R_{;\mu}$

$R^{\nu}{}_{\mu;\nu} + C\, 2 R^{\nu}{}_{\mu;\nu} = 0$

$\Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\textbf{Einsteinův tenzor} \quad G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}$$

„Duální" tvar polních rovnic – provedeme stopu, tj. násobíme $g^{\mu\nu}$

$R - \frac{1}{2} R \cdot 4 + 4\Lambda = \varkappa T$

$R = 4\Lambda - \varkappa T$

přepíšeme si $R_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varkappa T g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$ (dosadíme)

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right) + \Lambda g_{\mu\nu}}$$

(tady k tomu ještě bylo nějaké povídání o vakuovém řešení, nebo tak něco)

$\varkappa = ?$ nekoherentní prach v newtonovské limitě $T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu}$ (ideální tekutina bez tlaku, částečky na sebe působí pouze gravitačně)

okamžitě známe stopu, neboť $g^{\mu\nu} u_{\mu} u_{\nu} = -1 \Rightarrow T = -\rho$

Ricciho tenzor v newtonovské limitě $R^{\mu}{}_{\nu\varkappa\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu,\varkappa} - \Gamma^{\mu}{}_{\varkappa\nu,\lambda} + \underbrace{\Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma}_{\text{zanedbatelné členy, protože}}$

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ skorominkowského systém, $h_{\mu\nu}$ maličké

$\Gamma \sim o(h) \Rightarrow \Gamma\Gamma \sim o(h^2)$

$R_{00} = R^{\mu}{}_{0\mu 0} = \underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{00,\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{\mu 0,0}}_{\text{zahodíme derivaci podle času}} = \Gamma^{i}{}_{00,i} = \Phi^{,i}{}_{,i} = \Delta\Phi$

$\Gamma^{i}{}_{00} = \frac{1}{2} \eta^{i\sigma}\left(\underbrace{h_{\sigma 0,0} + h_{0\sigma,0}}_{\text{zahodíme derivace podle času}} - h_{00,\sigma}\right) = -\frac{1}{2} h_{00}{}^{,i} = \Phi^{,i}$

„teď si asi vzpomenete"

Semerák is wildly overestimating me

z nějakého důvodu, který teď nevidím, nás zajímá jen 00 složka rovnice

potřebujeme $T_{00} = \rho u_0 u_0 = \rho u_0 g_{00} u^0 = \rho u_0 \left(g_{00} u^0 + \cancel{g_{0j} u^j}\right) = -\rho g_{00} = \rho$

$-1 - o(u^2)$; $-1 - 2\Phi$

$o(h) \Rightarrow$ z toho zbytku mohu zahodit všechno menší než $o(1)$

(*) použití předpoklad newtonovské limity $|u^i| \ll |u^0|$ ($\Leftrightarrow |v| \ll c$)

$T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} = \rho + \frac{\rho}{2}(-1 - 2\Phi) = \frac{\rho}{2}$

$R_{00} = \varkappa\left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00}\right)$

$\Delta\Phi = \varkappa \frac{\rho}{2}$ a to se musí rovnat $4\pi\rho$

$\Rightarrow \boxed{\varkappa = 8\pi}$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right) + \Lambda g_{\mu\nu} \end{aligned}}$$

Einstein

Berlín 25. 11. 1915

ve standardních jednotkách $8\pi \rightarrow \frac{8\pi G}{c^4}$

Kosmologická konstanta Λ (členu se říká **kosmologický člen**) – volný parametr teorie, zevnitř nejde určit

zapomenutá poznámka: Lovelock – ukázal, že požadavek na lineární závislost na R je nadbytečný

– jakmile na pravé straně symetrický tenzor 2. řádu, pak už musí být levá strana lineární kombinací členů, které jsme použili

pokračování o kosmologické konstantě – pokud ji zahrneme do newtonovské limity $\Delta\Phi = 4\pi\rho \underbrace{- \Lambda(1 + 2\Phi)}$

z pozorování víme, že takhle se newtonovská gravitace nechová

ale to může jen znamenat, že Λ je maličká $|\Lambda| < 10^{-50}\ /\mathrm{cm}^2$

v běžných rozměrech zcela nevýznamné, ale v kosmologii už ne

„tímhletím člověk – teda ne člověk, Einstein – ..."

a bavili jsme se o uzavřených a otevřených ~~kosmických~~ vesmírech

Machův princip: setrvačnost dána interakcí se všemi ostatními tělesy ve vesmíru

– Einsteinovi se to líbilo

– funguje to jen v prostorově uzavřených vesmírech, v otevřených to záleží ještě na okrajových podmínkách (3D sféra)

– proto měl Einstein rád uzavřený vesmír

– pro vesmír jako 3D sféra je $\Lambda \neq 0$ nutná, dává repulzi, jinak by se to celé gravitačně zhroutilo

děje se tu povídání, které se mi těžko zapisuje, pardon

dva pohledy na kosmologický člen – patří na geometrickou stranu rovnice

– patří na zdrojovou stranu rovnice, je to nějaké ani-skalární pole $\Rightarrow$ temná energie

„až se budeme bavit o kosmologii, tak si řekneme, že skoro všechno ve vesmíru je temný"

↳ nejasný, záhadný

Einsteinovy rovnice matematicky – kvazilineární (lineární v nejvyšší derivaci) parciální diferenciální rovnice 2. řádu pro neznámou $g_{\mu\nu}$

– v prvních derivacích nelineární (Riemannův tenzor)

– ve skutečnosti bez metriky nejdou zadat, nejsou tak jednoduché jako maxwellky ve smyslu „zadám zdroj (PS) a vyřeším to", protože $g_{\mu\nu}$ často vystupuje i na PS

↳ už i pro ideální kapalinu

– počet neznámých $g_{\mu\nu}$ ... 10 složek (symetrické) $4+3+2+1 = 10$

počet rovnic ... 10 („jste s tím spokojení? ano! to není správná odpověď, kdyby byla, tak se tak blbě neptám")

chtěli bychom mít možnost zvolit si libovolné souřadnice, tj. aby nám zbyly 4 volné parametry

požadovali jsme $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ... 4 rovnice, které neomezují metriku, ale zdroje

$\Rightarrow$ na metriku zbývá 6 rovnic, jak bychom chtěli (ehm, což)

$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ jsou: Eulerova pohybová rovnice; rovnice kontinuity

srov. s elmagem: – rovnici kontinuity z maxwellek odvodíme, Lorentzovu sílu ale ne

zato v gravitaci z Einsteinových rovnic plynou pohybové rovnice <u>pro zdroje</u>

z toho je jasné vidět, že gravitační rovnice nemůžou být „zadej zdroj – najdeme metriku", ale nesou v sobě velká omezení pro zdroje samotné

zdroj: nelinearita rovnic – je v tom schováno jakési působení zdrojů samých na sebe

v maxwellově elektrodynamice nemá pole žádné charakteristiky zdroje

v gravitaci má gravitační pole nějakou energii a energie je zdrojem gravitačního pole ...

Přednáška 8

Thursday, 10 April 2025 15:44

Princip minimální vazby

role křivosti v rovnicích

LS Einsteinových rovnic plyne jasně a jednoznačně a není od ní vyhnutí

geometrie plyne nejprostě

pokud teda nepřipouštíme vyšší řády derivace metriky

chceme správnou speciálně relativistickou limitu – aby v ní vymizela křivost (to je ok, to se stane, protože $g_{\mu\nu} \mapsto \eta_{\mu\nu}$ & derivace $\eta_{\mu\nu}$, což jsou křivostní členy, jsou nulové)

princip ekvivalence je ale mnohem silnější – požaduje vymizení křivosti ve všech lokálních inerciálních systémech (malé okolí libovolného volně padajícího bodu)

(první derivace se odtransformují přechodem do volně padajícího systému)

– křivost sama ale tohle nesplňuje, druhé derivace nemusí vymizet $\Rightarrow$ nutně musí být fyzikální rovnice takové, že křivostní členy jsou vynásobeny něčím jiným, co řády v lok. inerciálních systémech zmizí

př. rovnice geodetické deviace $\frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = R \dots u\, \underline{\delta x}\, u$ $\to 0$ pro $\delta x \to 0$

obecně se ve fyzice člověk řídí jakýmsi principem jednoduchosti, Occamovy břitvy

elektromagnetismus $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^\mu$ – první sada maxwellových rovnic

kovariantní derivace

ovšem … nemohlo by to vypadat i jinak? Je možné vymyslet přídavné členy, které splňují princip obecné kovariance i speciálně relativistickou limitu

třeba $R^\mu{}_\nu j^\nu$ (ovšem nesplňuje to princip ekvivalence)

jak víme, že to tam nemá být?

jakási formulace principu jednoduchosti, minimální vazby: Když přecházíš z STR k OTR, udělej jen dvě věci:

1) $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$

2) čárka $\mapsto$ středník

(teda … pokud k tomu nemáš nějaký fakt dobrý důvod)

ve fyzice jsou všude diferenciální rovnice 2. řádu – problém: Ricciho identity $V_{\nu;\varkappa\lambda} - V_{\nu;\lambda\varkappa} = R^\iota{}_{\nu\varkappa\lambda} V_\iota$

~~parciální~~

2. kovariantní derivace spolu nekomutují

(podobný fundamentální problém jako přechod od klasických veličin k nekomutujícím operátorům v kvantovce)

Elektrodynamika (ve vakuu)

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi j^\alpha$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - \cancel{\Gamma^\iota_{\mu\nu} A_\iota} - A_{\mu,\nu} + \cancel{\Gamma^\iota_{\nu\mu} A_\iota}$$

$$= A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

pro Levi-Civitovu konexi $\Gamma^\iota_{\mu\nu}$

ale pozor: pro $F^{\mu\nu}$ se to už napsat pomocí parciálních derivací nedá (zvedání indexu za čárkou!)

$F_{\iota\nu}$ je antisymetrické

$$0 = F_{\{\mu\nu;\rho\}} = F_{\mu\nu,\rho} - \cancel{\Gamma^\iota_{\mu\rho} F_{\iota\nu}} - \cancel{\Gamma^\iota_{\nu\rho} F_{\mu\iota}} + F_{\rho\mu,\nu} - \cancel{\Gamma^\iota_{\rho\nu} F_{\iota\mu}} - \cancel{\Gamma^\iota_{\mu\nu} F_{\rho\iota}} + F_{\nu\rho,\mu} - \cancel{\Gamma^\iota_{\nu\mu} F_{\iota\rho}} - \cancel{\Gamma^\iota_{\rho\mu} F_{\nu\iota}}$$

$$= F_{\{\mu\nu,\rho\}}$$

↳ tohle platí v OTR tvaru, máme-li symetrické složky afinní konexe

teď zkusíme dosadit definici $F_{\mu\nu}$ do první sady

STR: $F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = (A^{\beta,\alpha} - A^{\alpha,\beta})_{,\beta} = A^{\beta,\alpha}{}_\beta - A^{\alpha,\beta}{}_\beta = A^{\beta,}{}_\beta{}^\alpha - \Box A^\alpha$

prohodím parciální derivace

z Lorenzovy kalibrační podmínky $A^\beta{}_{,\beta} = 0$ pak plyne $\Box A^\alpha = 4\pi j^\alpha$

OTR: $(\dots)$ $A^\beta{}_{;\beta}{}^\alpha - \Box A^\alpha = 4\pi j^\alpha$ Lorenz: $A^\beta{}_{;\beta} = 0$

$\Box$: $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ kovariantní d'Alambert

$\Rightarrow \Box A^\alpha = 4\pi j^\alpha$

anebo nahradíme čárku středníkem o něco dřív:

$$A^{\beta;\alpha}{}_\beta - \Box A^\alpha = 4\pi j^\alpha \quad \Rightarrow \quad A^{\beta;}{}_\beta{}^\alpha + \underbrace{R_\iota{}^{\beta\alpha}{}_\beta}_{\text{Ricciho tenzor}} A^\iota - \Box A^\alpha = 4\pi j^\alpha$$

Ricciho identity

$R_\iota{}^\alpha = R^\alpha_\iota$ můžeme psát nad sebe, protože Ricciho tenzor je symetrický

Def. $R_{\nu\lambda} = R^\mu{}_{\nu\mu\lambda}$

při použití Lorenze $A^\beta{}_{;\beta} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\Box A^\alpha - R^\alpha_\iota A^\iota}_{\Box_{dR} A^\alpha} = -4\pi j^\alpha}$$

$\Box_{dR} A^\alpha$ ↳ de Rhamův operátor

to je velmi zajímavá rovnice – coupling elmag pole s křivostí

– nesplňuje princip ekvivalence

– nesplňuje zásadu comma $\mapsto$ semicolon

} tohle zní docela divně, right?

$$(\Box A^\alpha - R^\alpha_\iota A^\iota)_{;\alpha} = A^{\alpha;\beta}{}_{\beta\alpha} - R^\alpha_{\iota;\alpha} A^\iota - R^\alpha_\iota A^\iota{}_{;\alpha} =$$

budeme chtít použít Lorenzovu kalibrační podmínku

vzniknou nám nějaké křivostní členy

$$W^{\alpha\beta}{}_{;\beta\alpha} = W^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} + \underbrace{R_\iota{}^\alpha{}_{\beta\alpha}}_{R_{\iota\beta}} W^{\iota\beta} + \underbrace{R_\iota{}^\beta{}_{\beta\alpha}}_{-R_{\iota\alpha}} W^{\alpha\iota}$$

použijeme pro $W^{\alpha\beta} = A^{\alpha;\beta}$

$$= A^{\alpha;\beta}{}_{\alpha\beta} + \cancel{\underbrace{R_\iota{}^\alpha{}_{\beta\alpha}}_{R_{\iota\beta}} A^{\iota;\beta}} + \underbrace{R_\iota{}^\beta{}_{\beta\alpha}}_{-R_{\iota\alpha}} A^{\alpha;\iota} - R^\alpha{}_{\iota;\alpha} A^\iota - \cancel{R^\alpha_\iota A^\iota{}_{;\alpha}}$$

$$= A^{\alpha;\beta}{}_{\alpha\beta} - R_{\iota\alpha} A^{\alpha;\iota} - R^\alpha{}_{\iota;\alpha} A^\iota = \Big(A^\alpha{}_{;\alpha}{}^\beta + \underbrace{R_\iota{}^{\alpha\beta}{}_\alpha}_{R_\iota{}^\beta} A^\iota\Big)_{;\beta} - \left(R^\beta{}_\alpha A^\alpha\right)_{;\beta}$$

$$= \underbrace{A^\alpha{}_{;\alpha}{}^\beta{}_\beta}_{=0} + \underbrace{\left(R^\beta_\iota A^\iota - R^\beta_\alpha A^\alpha\right)_{;\beta}}_{=0} = 0 = 4\pi j^\alpha{}_{;\alpha}$$

z Lorenzovy kalibrační podmínky

tzn. z vlnové rovnice s de Rhamovým operátorem plyne rovnice kontinuity pro čtyřproud

z čehož taky plyne, že pro tu jednodušší vlnovou rovnici bez křivosti to nefunguje (na konci by se to neodečetlo)

Vlnová rovnice pro $F_{\mu\nu}$

$$0 = F_{\mu\nu;\rho} + F_{\rho\mu;\nu} + F_{\nu\rho;\mu} \qquad /\text{pustíme na to divergenci}$$

$$0 = \Box F_{\mu\nu} + F_{\rho\mu;\nu}{}^\rho + F_{\nu\rho;\mu}{}^\rho \qquad \text{chceme dostat } \rho \text{ do první pozice za středník}$$

$$= \Box F_{\mu\nu} + F_{\rho\mu}{}^{;\rho}{}_\nu + \underbrace{R^\iota{}_{\rho\nu}{}^\rho}_{R^\iota_\nu} F_{\iota\mu} + R^\iota{}_{\mu\nu}{}^\rho F_{\rho\iota} + F_{\nu\rho}{}^{;\rho}{}_\mu + R^\iota{}_{\nu\mu}{}^\rho F_{\iota\rho} + \underbrace{R^\iota{}_{\rho\mu}{}^\rho}_{R^\iota_\mu} F_{\nu\iota}$$

$$= \Box F_{\mu\nu} - \underbrace{F_{\mu\rho}{}^{;\rho}{}_\nu}_{-4\pi j_{\mu;\nu}} + R^\iota_\nu F_{\iota\mu} + R^\iota{}_{\mu\nu}{}^\rho F_{\rho\iota} + \underbrace{F_{\nu\rho}{}^{;\rho}{}_\mu}_{4\pi j_{\nu;\mu}} + R^\iota{}_{\nu\mu}{}^\rho F_{\iota\rho} + R^\iota_\mu F_{\nu\iota}$$

$$= \Box F_{\mu\nu} - 4\pi\left(j_{\mu;\nu} - j_{\nu;\mu}\right) + R^\iota_\nu F_{\iota\mu} - R^\iota_\mu F_{\iota\nu} + F^{\iota\rho}\overbrace{\left(R_{\iota\nu\mu\rho} - R_{\iota\mu\nu\rho}\right)}^{R_{\iota\rho\mu\nu}}$$

smínusem

1. Bianchiho identity: $R_{\iota\mu\nu\rho} + R_{\iota\rho\mu\nu} + R_{\iota\nu\rho\mu} = 0$

$$\boxed{\Box F_{\mu\nu} = 4\pi\left(j_{\mu;\nu} - j_{\nu;\mu}\right) + \underbrace{R^\iota_\mu F_{\iota\nu} - R^\iota_\nu F_{\iota\mu}}_{= 2R^\iota{}_{[\nu} F_{\mu]\iota}} - R_{\iota\rho\mu\nu} F^{\iota\rho}}$$

je na tom zase zajímavé to co na té předchozí vlnové rovnici:

- členy s R v bodě nemizí
- scattering na křivosti

pojďme do parciálních derivací převést

warning: $A^{\beta;\alpha} - A^{\alpha;\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\left(A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}\right) = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\left(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\right)$

$$= \underbrace{g^{\alpha\mu}\left(g^{\beta\nu} A_\nu\right)_{,\mu}}_{A^{\nu,\mu}} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} A_\nu - \underbrace{g^{\beta\nu}\left(g^{\alpha\mu} A_\mu\right)_{,\nu}}_{A^{\mu,\nu}} + g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu}{}_{,\nu} A_\mu$$

přechod $g^{\alpha\mu}\partial_\mu =: \partial^\alpha$ je definice

(parciální gradient, zvednutí indexu)

$$= \underbrace{A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}}_{\text{tohle jsme chtěli}} \underbrace{- g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} g_{\nu\iota} A^\iota + g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu}{}_{,\nu} g_{\mu\iota} A^\iota}_{\text{tohle je tu navíc}}$$

$$\overset{*}{=} \left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g_{\nu\iota,\mu} - g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} g_{\mu\iota,\nu}\right) A^\iota = \overbrace{\left(g_{\nu\iota,\mu} - g_{\mu\iota,\nu}\right)}^{2g_{\iota[\nu,\mu]}} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} A^\iota$$

protože $\left(g^{\beta\nu} g_{\nu\iota}\right)_{,\mu} = \delta^\beta_{\iota,\mu} = 0 \overset{*}{=} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} g_{\nu\iota} + g^{\beta\nu} g_{\nu\iota,\mu}$

$$= A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu} + \underbrace{2g_{\iota[\nu,\mu]} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} A^\iota}_{\text{tohle prostě není nula}}$$

Přednáška 9

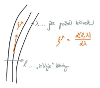
Thursday, 17 April 2025 15:58

Liova derivace & prostoročasové symetrie

Dneska jsem hrozně unavená

mějme difeomorfismus

tj. zobrazení $(l,\lambda) \mapsto x^\mu(l,\lambda)$



flow: grupa difeomorfismů $x^\mu(l_0,\lambda_0) \mapsto x^\mu(l_0,\lambda_0+\Delta\lambda)$

← přenos pomocí toku podél vektorového pole

posunutí z jednoho bodu do jiného podél křivky

difeomorfismus je prostě zobrazení (bijektivní), není to ten samý difeomorfismus jako ten $(l,\lambda) \mapsto x^\mu(l,\lambda)$

$\mathcal{L}$ „já to budu asi většinou psát škrtnutě" „neznamená to prosím vás, že je to děleno 2π"

existence hladkého vektorového pole je spjaté s existencí kongruence křivek

vektorové pole $\Rightarrow$ integrální křivky

křivky $\Rightarrow$ tečné vektorové pole

Lieova derivace: např. pro skalár – přirozené, co bychom chtěli, je, aby se skalár podél křivky neměnil

– to na skutečné varietě pro libovolné vektorové pole nebude pravda

– Lieova derivace je rozdíl mezi těmito dvěma věcmi: jak se to na varietě chová vs. jak by to nejlíp dávalo smysl

vektory se přenášejí pomocí křivky, k níž jsou tečné

křivka jsou jen body, body přenášet tokem podél vektorového pole umíme

$$\mathcal{L}_\xi T^{\cdots}_{\cdots}(x_0^\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{T^{\cdots}_{\cdots}(x_0^\alpha \leftarrow x^\alpha) - T^{\cdots}_{\cdots}(x_0^\alpha)}{\varepsilon}$$

$x^\alpha(l_0,\lambda_0+\varepsilon)$ přenesené do (l_0,λ_0)

zároveň předpokládáme, že x^α existuje na varietě jako vektorové pole takže my se můžeme na to pole

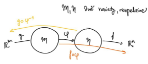
- $v(l_0,\lambda_0)$
- $v(l_0,\lambda_0+\varepsilon)$ – tohle přeneseme sem a porovnáme to s tím, co tam už je

nebo obráceně – z (l_0,λ_0) to přeneseme do $(l_0,\lambda_0+\varepsilon)$ a porovnáme to tam

– PUSH-FORWARD / PULL-BACK

$\mathcal{M},\mathcal{N}$ dvě variety, respektive pro nás spíš 2 oblasti téže variety

φ je ten přenos podél křivky?



$f\circ\varphi \quad \mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ pull-back (místo $\mathcal{N}$ je definiční obor $\mathcal{M}$)

$g\circ\varphi^{-1} \quad \mathcal{N}\to\mathbb{R}^m$ push-forward

pro tu Lieovu derivaci se to (asi?) vždycky přenáší zpátky do $x^\mu(l_0,\lambda_0)$ ... jen se to interpretuje jako pull-back / inverzní push-forward

přenos bodu: $$x^\mu = x^\mu(l_0,\lambda_0+\varepsilon) = \underbrace{x^\mu(l_0,\lambda_0)}_{x_0^\mu} + \varepsilon \underbrace{\frac{dx^\mu(l_0,\lambda)}{d\lambda}}_{\xi^\mu}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= x_0^\mu + \varepsilon\,\xi^\mu(x_0^\alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

přenos funkce: $$f(x^\alpha) = f(x_0^\alpha) + f_{,\mu}(x_0^\alpha)\,(x^\mu - x_0^\mu) + \mathcal{O}(|x^\mu - x_0^\mu|^2)$$

↑ dosadíme

$$= f(x_0^\alpha) + f_{,\mu}(x_0^\alpha)\,\varepsilon\,\xi^\mu(x_0^\alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

zde předpokládáme, že x^α se přenese do bodu x_0^α tak, že bude mít stejnou hodnotu jako v x^α

Lieova derivace funkce: $$\mathcal{L}_\xi(f)_{x^\alpha = x_0^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(x_0^\alpha\leftarrow x^\alpha) - f(x_0^\alpha)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(x^\alpha) - f(x_0^\alpha)}{\varepsilon}$$

takže je to směrová derivace $\mathcal{L}_\xi f = f_{,\mu}\,\xi^\mu$

pokud adaptuju souřadnice tak, že jedna z nich jde podél těch našich křivek, je Lieova derivace parciální derivace

tautologie: $\mathcal{L}_\xi \xi^\mu = 0$ ... to je nějaký vektor

Lieova derivace kovektoru vím $$\mathcal{L}_\xi(c_\alpha\xi^\alpha) = (c_\alpha\xi^\alpha)_{,\mu}\,\xi^\mu \underset{\text{Leibniz}}{=} c_{\alpha,\mu}\,\xi^\alpha\xi^\mu + c_\alpha\,\xi^\alpha{}_{,\mu}\,\xi^\mu$$

$$\underset{\text{Leibniz}}{=} c_\alpha\underbrace{(\mathcal{L}_\xi\xi^\alpha)}_{0} + (\mathcal{L}_\xi c_\alpha)\,\xi^\alpha$$

přeznačím $(\mathcal{L}_\xi c_\alpha)\,\xi^\alpha = c_{\alpha,\mu}\,\xi^\mu\xi^\alpha + c_\mu\,\xi^\mu{}_{,\alpha}\,\xi^\alpha$

tadyhle to je trochu divný, protože mi to nechává jen symetrickou část toho výrazu protože $\xi^\mu\xi^\alpha$ je sym.

$$\mathcal{L}_\xi c_\alpha = c_{\alpha,\mu}\,\xi^\mu + c_\mu\,\xi^\mu{}_{,\alpha}$$

$\mathcal{L}$ pro gradient funkce $c_\alpha = f_{,\alpha}$ $$(\mathcal{L}_\xi f_{,\alpha})\,\xi^\alpha = \underbrace{f_{,\alpha\mu}\,\xi^\mu\xi^\alpha}_{\text{tady je to ok – protože } f_{,\alpha\mu} \text{ je taky sym.}} + f_{,\mu}\,\xi^\mu{}_{,\alpha}\,\xi^\alpha$$

$\mathcal{L}$ pro vektorové pole $$\mathcal{L}_\xi(f_{,\mu}V^\mu) = (f_{,\mu}V^\mu)_{,\alpha}\,\xi^\alpha = \cancel{f_{,\mu\alpha}V^\mu\xi^\alpha} + f_{,\mu}\,V^\mu{}_{,\alpha}\,\xi^\alpha$$

$$= (\mathcal{L}_\xi f_{,\mu})\,V^\mu + f_{,\mu}(\mathcal{L}_\xi V^\mu) = \cancel{f_{,\mu\alpha}\,\xi^\alpha V^\mu} + f_{,\alpha}\,\xi^\alpha{}_{,\mu}\,V^\mu + f_{,\mu}(\mathcal{L}_\xi V^\mu)$$

po přeznačení $$f_{,\mu}\,V^\mu{}_{,\alpha}\,\xi^\alpha - f_{,\mu}\,\xi^\mu{}_{,\alpha}\,V^\alpha = f_{,\mu}(\mathcal{L}_\xi V^\mu)$$

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi V^\mu = V^\mu{}_{,\alpha}\,\xi^\alpha - \xi^\mu{}_{,\alpha}\,V^\alpha = [\xi,V]^\mu}$$

komutátor dvou vektorových polí, též zváno Lieova závorka

derivuju jedno podle druhého a odečtu derivaci druhého podle prvního

$\mathcal{L}$ pro kovektor znovu řádně $$\mathcal{L}_\xi(c_\alpha V^\alpha) = (c_\alpha V^\alpha)_{,\mu}\,\xi^\mu = c_{\alpha,\mu}\,V^\alpha\xi^\mu + \cancel{c_\alpha\,V^\alpha{}_{,\mu}\,\xi^\mu}$$

$$= (\mathcal{L}_\xi c_\alpha)\,V^\alpha + c_\alpha(\mathcal{L}_\xi V^\alpha) = (\mathcal{L}_\xi c_\alpha)\,V^\alpha + \cancel{c_\alpha\,V^\alpha{}_{,\mu}\,\xi^\mu} - c_\alpha\,\xi^\alpha{}_{,\mu}\,V^\mu$$

$$c_{\alpha,\mu}\,\xi^\mu V^\alpha + c_\mu\,\xi^\mu{}_{,\alpha}\,V^\alpha = (\mathcal{L}_\xi c_\alpha)\,V^\alpha$$

$$\mathcal{L}_\xi c_\alpha = c_{\alpha,\mu}\,\xi^\mu + c_\mu\,\xi^\mu{}_{,\alpha}$$

↑ jiné znaménko než u vektorů

pro víceindexové tenzory víc členů s gradientem ξ^μ (za každý index jeden člen navíc s příslušným znaménkem)

bacha: celou dobu pracujeme obecnějí, na holé varietě (diferencovatelné) – <u>nemáme metriku</u>, nemůžeme převádět indexy z kontravariantních na kovariantní a opačně

$\boxed{\text{Lieova derivace ponechává řád tenzoru}}$

nadále předpokládejme, že máme na varietě symetrickou afinní konexi

ukažme, že můžeme použít kovariantní derivaci

$$\mathcal{L}_\xi c_\alpha = c_{\alpha,\mu}\,\xi^\mu + c_\mu\,\xi^\mu{}_{,\alpha} \stackrel{?}{=} c_{\alpha;\mu}\,\xi^\mu + c_\mu\,\xi^\mu{}_{;\alpha} = c_{\alpha,\mu}\,\xi^\mu \cancel{- \Gamma^\iota_{\mu\alpha}\,c_\iota\,\xi^\mu} + \xi^\mu{}_{,\alpha}\,c_\mu \cancel{+ \Gamma^\mu_{\alpha\iota}\,\xi^\iota\,c_\mu}$$

Prostoročasové symetrie (izometrie) (jsme ve standardním OTR časoprostoru)

zde snižujeme indexy pomocí metriky

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\alpha}\,\xi^\alpha + g_{\alpha\nu}\,\xi^\alpha{}_{,\mu} + g_{\mu\alpha}\,\xi^\alpha{}_{,\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 2\,\xi_{(\mu;\nu)}$$

↑ můžeme psát místo čárek středníky

máme Levi-Civitovu afinní konexi, $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$

Killingova rovnice pro prostoročasové symetrie: $$\boxed{\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0}$$

řešení ξ^μ ... Killingova vektorová pole

přeurčený systém, nemusí mít vždy řešení

10 rovnic pro 4 složky vektoru

lineární kombinace Killingových vektorových polí je taky Killingovo pole

komutátor taky

podél libovolné geodetiky je $\xi_\mu \frac{dx^\mu}{dp}$ konstantní, kde ξ^μ je killing

↓ průmět tečného vektoru geodetiky do killingova vekt. pole

ukažme si to $$\frac{d}{dp}\left(\xi_\mu\frac{dx^\mu}{dp}\right) = \frac{D}{dp}\left(\xi_\mu\frac{dx^\mu}{dp}\right) = \underbrace{\frac{dx^\mu}{dp}\,\xi_{\mu;\alpha}\,\frac{dx^\alpha}{dp}}_{=0} + \xi_\mu\underbrace{\frac{D}{dp}\left(\frac{dx^\mu}{dp}\right)}_{=0}$$

$=0$ protože tečné vektory symetrické ... uplatní se jen sym. část $\xi_{\mu;\alpha}$, ale $\xi_{(\mu;\alpha)} = 0$ protože je to killing

$=0$ protože je to geodetika

Přednáška 10

Thursday, 24 April 2025 15:50

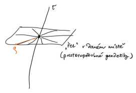
Schwarzschildovo řešení Einsteinových rovnic

máme 10 nezávislých složek metriky

symetrie obecně omezují stupně volnosti problému

my teď budeme řešit (prostorově) sféricky symetrická řešení

představme si: světočáru, časupodobnou (světočára počátku prostorových souřadnic)



obecná metrika ve sférických souřadnicích:

$$ds^2 = g_{\tau\tau}\, d\tau^2 + 2 g_{\tau\varrho}\, d\tau\, d\varrho + 2 g_{\tau\theta}\, d\tau\, d\theta + 2 g_{\tau\varphi}\, d\tau\, d\varphi + g_{\varrho\varrho}\, d\varrho^2 + 2 g_{\varrho\theta}\, d\varrho\, d\theta + 2 g_{\varrho\varphi}\, d\varrho\, d\varphi + g_{\theta\theta}\, d\theta^2 + 2 g_{\theta\varphi}\, d\theta\, d\varphi + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2$$

jeden ze způsobů, jak si zavést sférickou symetrii: vyškrtat členy lineární v θ, φ

my to budeme dělat jinak: lokálně $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\varrho} = 0$ ... podmínka lokální ortogonality

pokud si za x^μ, x^ν vezmeme lokální sférické souřadnice

dostaneme z toho $g_{\tau\varrho} = 0$ & podobně pro další prvky metriky

to ale platí jen lokálně

radiální geodetiky: $\frac{d^2x^\mu}{d\varrho^2} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} \frac{dx^\varkappa}{d\varrho} \frac{dx^\lambda}{d\varrho} = 0$

$\circledast\ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\varrho} \frac{dx^\nu}{d\varrho} = 1$ ... požadujeme globálně

$\Downarrow$

$g_{\varrho\varrho} = 1$ ... též globálně

pokud $\circledast$ dosadíme do radiální geodetiky $\frac{dx^\mu}{d\varrho}$ přejde na $\delta^\mu_\varrho \Rightarrow \Gamma^\mu_{\varrho\varrho} = 0$

teď značíme souřadnice 1, 2, 3 $(\varrho, \theta, \varphi)$

$$\Gamma^\mu_{11} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(g_{\sigma 1,1} + g_{1\sigma,1} - \underbrace{g_{11,\sigma}}_{\text{derivace jedničky} = 0}\right) = g^{\mu\sigma} g_{\sigma 1,1} = 0 \qquad / \cdot g_{\alpha\mu}$$

$$\Rightarrow \underbrace{g_{\alpha\mu} g^{\mu\sigma}}_{\delta^\sigma_\alpha} g_{\sigma 1,1} = 0$$

$$\boxed{g_{\alpha 1,1} = 0}$$

nějak jsme se dostali k tomu, že $g_{\alpha 1}$ je lokálně nulové a proto i globálně nulové

Předpoklady sférické symetrie

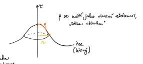
1) invariance vůči záměnám $d\theta \mapsto -d\theta$ a vůči $d\varphi \mapsto -d\varphi$

2) chceme, aby část metriky $g_{\theta\theta}\, d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2$ odpovídala "euklidovské" 2D sféře $\{\tau = \text{konst.}, \varrho = \text{konst.}\}$ ... tzn. $r^2(\tau, \varrho)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$

$\hookrightarrow \oint_0^{2\pi}\oint_0^{\pi} \sqrt{(g_{\theta\theta}\, g_{\varphi\varphi})}\Big|_{\tau = \text{konst.},\ \varrho = \text{konst.}} d\theta\, d\varphi =: 4\pi r^2(\tau, \varrho)$ ... vlastní plocha sféry $\varrho = \text{konst.}$

r ... „plochový poloměr"

význam ϱ a $r(\tau, \varrho)$:



3) $g_{\tau\tau}(\tau, \varrho, \theta, \varphi) = g_{\tau\tau}(\tau, \varrho)$ nezávislost na θ, φ

význam: stejný vlastní čas pro daný τ, ϱ, nezávislost vlastního času na θ, φ

dostáváme zjednodušenou metriku $\boxed{ds^2 = g_{\tau\tau}(\tau, \varrho)\, d\tau^2 + d\varrho^2 + r^2(\tau, \varrho)\, d\Omega^2}$

důležitý, již teď viditelný výsledek: **libovolnou sféricky symetrickou metriku můžeme zapsat pomocí dvou neznámých funkcí** (platí v libovolné metrické teorii gravitace)

uděláme ještě transformaci $(\tau, \varrho) \mapsto (t, r)$ ... r je plochový poloměr, co je t, to řekneme později

$\Rightarrow ds^2 = g_{tt}(t, r)\, dt^2 + g_{rr}(t, r)\, dr^2 + r^2\, d\Omega^2$

dá se taková transformace udělat tak, že nemusíme psát křížový člen? – důležitá vlastnost (τ, ϱ) byla, že člen s $g_{\tau\varrho}$ byl 0

obecně: nějaká transformace $(\tau, \varrho) \mapsto (T, R) \Rightarrow ds^2 = g_{TT}(T, R)\, dT^2 + 2 g_{TR}(T, R)\, dT\, dR + g_{RR}(T, R)\, dR^2 + R^2\, d\Omega^2$

chci $R = r$

musím si zvolit definovat T, aby tohle vypadlo

(nějak se něco dělo, de facto že to nemusíme psát)

závěr toho je, že vždycky jde přejít do souřadnic, ve kterých není křížový člen mezi nimi

dostat to tyto používám v obecné sféricky symetrické metrice

teprve teď je dosadíme do Einsteinových rovnic: $T_{\mu\nu} = 0$, $\Lambda = 0$ (vakuum)

$R_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 0$

(1) $G^t{}_t = -\frac{r \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + g_{rr}(g_{rr} - 1)}{r^2 (g_{rr})^2}$

(2) $G^r{}_r = \frac{r \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - g_{tt}(g_{rr} - 1)}{r^2 g_{tt}\, g_{rr}}$

položíme rovno 0

(3) $G_{tr} = \frac{\frac{\partial g_{rr}}{\partial t}}{r\, g_{rr}} \Rightarrow g_{rr}$ je nezávislé na čase (t)

$G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi$

3 nezávislé rovnice (ostatní složky G jsou automaticky 0 a vždy automaticky splněny $G_{\mu\nu} = 0$)

(1) s přihlédnutím k $g_{rr}(r)$: $r \frac{dg_{rr}}{dr} = -g_{rr}(g_{rr} - 1)$

$\frac{1}{g_{rr}(g_{rr} - 1)}\, dg_{rr} = -\frac{1}{r}\, dr \Rightarrow \ln\left(\frac{g_{rr} - 1}{g_{rr}}\right) = -\ln r + \ln(\text{konst.}) = \ln\left(\frac{\text{konst.}}{r}\right)$

$$\boxed{g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{\text{konst.}}{r}}}$$

(2): $\frac{r \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}}{g_{tt}} = g_{rr}(g_{rr} - 1)$

$\frac{(2)}{(1)}$: $\frac{\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}}{\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}} = -\frac{g_{tt}}{g_{rr}} \Rightarrow \frac{1}{g_{tt}}\, g_{tt,r} = -\frac{1}{g_{rr}}\, g_{rr,r}$

$(\ln|g_{tt}|)_{,r} + (\ln|g_{rr}|)_{,r} = 0$

tzn. $g_{tt}\, g_{rr}$ nezávisí na r

$\Rightarrow -g_{tt}\, g_{rr} = f(t)$

$$\Rightarrow \boxed{g_{tt} = \frac{-f(t)}{g_{rr}} = -f(t)\left(1 - \frac{\text{konst.}}{r}\right)}$$

tedy máme $ds^2 = -\left(1 - \frac{\text{konst.}}{r}\right) f(t)\, dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{\text{konst.}}{r}}\, dr^2 + r^2\, d\Omega^2$

můžeme přejít k $f(t)\, dt^2 = d\bar{t}^2$, takže můžeme zvolit rovnou $f(t) = 1$

co je konst.? newtonovská limita: z porovnání známe $g_{tt} = -1 - 2\Phi$, gravitační potenciál v geometrizovaných jednotkách $\Phi = -\frac{M}{r}$

chci dosáhnout konst. $= 2M$, aby newtonovská limita fungovala

resp. M označíme pro daný parametr

tedy $\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right) c^2\, dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{c^2 r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}$

Birkhoffův teorém: každý sféricky symetrický problém má Schwarzschildovu metriku (důkaz je jednoznačnost tohoto tvaru)

(poznámka o pulsaci hvězd)

co je t? pozorovatel stojící na místě: $d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right) dt^2 \to 0$ pro $r \to \infty$

$d\tau^2 = -c^2\, dt^2$

pro stojícího pozorovatele je t v limitě $r \to \infty$ vlastní čas

$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2\, d\Omega^2$

když se změní znaménko, změní se dost povaha prostoru (jaký matematicky, ale ne je platný v souřadnicích)

známe se tedy můžeme: $r = 0$; $r = \frac{2M}{c^2}$ ... místní poloměr

$\frac{2GM}{c^2}$ tato vzdálenost jaká tam může být (1 mm), ale ono to znamená, že při určitém poloměru to může zkolabovat na černou díru

Symetrie

$g_{\mu\nu,0} = 0$ stacionarita, pokud navíc platí $g_{0i} = 0$, statičnost (není to vyjádřeno v souřadnicích)

geometricky: $\exists \xi^\mu \Rightarrow \exists t$: Killingovo vektorové pole $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$, $\xi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} = \delta^\mu_t = (1, 0, 0, 0)$ – tím definujeme souřadnice t, x^μ

axiální symetrie $g_{\mu\nu,3} = 0$

$\exists \psi^\mu \Rightarrow \exists \varphi$: $\psi^\mu = \frac{dx^\mu}{d\varphi} = \delta^\mu_\varphi = (0, 0, 0, 1)$ azimutální souřadnice φ

Světelné kužely

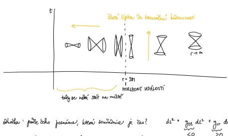
(světelný kužel: lokální struktura prostoročasu)

radiální paprsky: $ds^2(d\theta = 0, d\varphi = 0) = 0$

$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} = 0$

$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}$

směrnice pomocí sklonu kužele v t–r diagramu



v $r \to \infty$ je směrnice 1 ... kužely jako v STR

pro klesající r se kužely zužují

důvod: která souřadnice je čas? $ds^2 = g_{tt}\, dt^2 + g_{rr}\, dr^2$; $g_{tt} < 0$ čas, $g_{rr} > 0$ prostor

pod horizontem událostí se znaménko prohodí

$\Rightarrow r$ bude mít charakter času, t prostoru

... jde pouze o souřadnice, pozorovatel nemůže stát na místě

padání r je čas $\Rightarrow$ metrika závisí na čase, my se ale bavíme o statické metrice

takže oblast pod horizontem událostí není popisována v dosavadním pojmu, tzn. dynamická

v $r = 0$ je singularita

Přednáška 11

Thursday, 15 May 2025 15:44

Schwarzschild $\quad ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$

singularity: $r=0$ ale taky $r=2M$

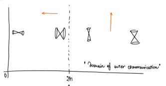
něčí?

invariant $\quad R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda} = \frac{48M^2}{r^6}$ … tady problém v $r=2M$ není

je možné (tohle není důkaz, jen náznak) že singularita v $r=2M$ je souřadnicová

důkaz by byl nalézt takové souřadnice, že v nich tato singularita zmizí

prostoročasový diagram: (opak.)



ač to na tom obrázku není dobře vidět, horizont je světelná nadplocha

Další obrázek – prostorový

máme nějakou nadplochu, fixujeme jednu prostorovou souřadnici

budeme zkoumat normálu této nadplochy

v minkowském prostoročasu: normála k prostorupodobné nadploše je časupodobná (tečny jsou prostorupodobné)

normála k časupodobné nadploše je prostorupodobná (tečny některé času-, některé prostorupodobné, některé dokonce světelné)

normála ke světelné nadploše je světelná

takže tedy zkoumejme normálu k nadploše $r=2M$

gradient: $r_{,\alpha} \longrightarrow g^{\alpha\beta} r_{,\alpha} r_{,\beta} = g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} = 1 - \frac{2M}{r}$

použití Schwarzschildovy metriky $\qquad g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu$

horizont je nejmenší r, na němž se může pozorovatel nacházet na konst. r (být v klidu vůči nekonečnu)

takový fyzikální pozorovatel je ten, pro nějž platí $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 \Rightarrow g_{tt}(u^t)^2 = -1$ … to jde jen pro $g_{tt} < 0$

$\Rightarrow$ můžeme horizont taky označovat jako <u>statickou mez</u>

$g_{tt} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)$ … z toho je vidět speciální role horizontu

taktéž horizont = <u>plocha nekonečného redshiftu</u> – když něco vysílá fotony a přibližuje se k horizontu, pro druhého pozorovatele přijímajícího fotony se nekonečně redshiftují

Geodetický pohyb ve Schwarzschildově prostoročasu

podobně jako u Keplerovy úlohy přechod od rovnice geodetiky k integrálům pohybu

τ affinní parametr $\Rightarrow$ rovnice geodetiky má tvar $\frac{du_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} u^\mu u^\nu$ kde $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

u_α je konst. když $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$

Killingova pole: $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \iff \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$

$\xi^\mu u_\mu = \text{konst.}$

z tvaru Schwarzschildovy metriky vidíme, že nezávisí na t ani φ

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

čekali bychom ZZE & ZZMH

Killingova pole: $t^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \quad \varphi^\mu = \frac{dx^\mu}{d\varphi}$

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}_{t\,r\,\theta\,\varphi} \quad \begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}_{t\,r\,\theta\,\varphi}$

$\Rightarrow$ zachovávající se veličiny jsou u_t, u_φ

$$E = -p_t = -g_{t\alpha}p^\alpha = -g_{tt}p^t = -m g_{tt}\frac{dt}{d\tau} = -\frac{m g_{tt}}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}}$$

Sch. metrika je diagonální

$$= -\frac{m g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt} - g_{ij}v^i v^j - v^2(r)}} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{m}{\sqrt{1-v^2(\infty)}} = m\gamma$$

označení, na jakém poloměru to počítáme

$\frac{dx^i}{dt}$ není čtyřrychlost!

v ∞ jde t k τ, takže tohle jde k čtyřrychlosti

takhle se řídí energie vůči nekonečnu / energie v nekonečnu

$$L = p_\varphi = g_{\varphi\varphi}p^\varphi = g_{\varphi\varphi}\, m u^\varphi = \frac{m g_{\varphi\varphi} v^\varphi}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}}$$

úhlová rychlost

$u^\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{d\tau}$

$r\to\infty \quad \lim_{r\to\infty}\left(r^2\sin^2\theta\, v^\varphi\right)E$ … (azimutální) moment hybnosti v nekonečnu

+ pohyb je rovinný — představa: podél roviny procházející vektorem směru pohybu a centrem symetrie je pole rovinně symetrické $\Rightarrow$ nemá to důvod z této roviny utíkat

— vychází z rovnice geodetiky $\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\Gamma^\theta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$

třetí integrál pohybu $u^\theta = 0$

potřebujeme 4 integrály pohybu

my už teď ale máme 3 složky čtyřrychlosti – z normalizace čtyřrychlosti získáme čtvrtou

je lepší to celé řešit pomocí čtyřhybnosti $g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = -m^2$ … čtvrtým integrálem pohybu je klidová hmotnost

máme diagonální metriku

$$g^{tt}(p_t)^2 + \underbrace{g^{rr}(p_r)^2}_{} + g^{\theta\theta}\cancel{(p_\theta)^2} + g^{\varphi\varphi}(p_\varphi)^2 = -m^2$$

$(p_t)^2 = E^2$, $(p_\theta)^2 = 0$, $(p_\varphi)^2 = L^2$

$= g^{rr}(g_{rr}p^r)^2$

$= g^{rr}g_{rr}g_{rr}(p^r)^2 = g_{rr}(p^r)^2$

$$(p^r)^2 = -\frac{m^2}{g_{rr}} - \frac{E^2}{g_{tt}g_{rr}} - \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}g_{rr}} = -\frac{E^2}{g_{rr}g_{tt}} - \frac{1}{g_{rr}}\left(m^2 + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}}\right) = E^2 - V^2$$

$-g_{rr}g_{tt} = 1$ pro Schw.

V^2 … <u>efektivní potenciál</u> $\quad V^2 := \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)$

v ekvatoriální rovině

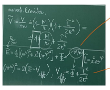
newtonovská limita: malé gravitační pole & pomalé rychlosti

$\Rightarrow$ ve Schw. pro velké $r \Rightarrow \frac{2M}{r}$ malé a $\frac{L^2}{r^2}$ taky malé

$$\tilde{V} := \frac{V}{m} \doteq \left(1-\frac{M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right) \doteq 1 - \frac{M}{R} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}$$

(rovnou aproximace odmocniny)

klidová energie

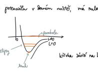


shrnutí: $\quad p^t = \frac{E}{-g_{tt}} \qquad p^\varphi = \frac{L}{g_{\varphi\varphi}} \qquad p^\theta = 0 \qquad (p^r)^2 = E^2 - V^2$

odsud význam efektivního potenciálu V $\quad (p^r)^2$ je kvadrát $\Rightarrow V^2 \le E^2$

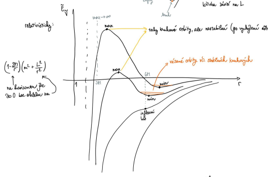
když je energie částice rovná zrovna efektivnímu potenciálu v daném místě, má nulovou p^r radiální složku — bod obratu / kruhová orbita

klasický newtonovský efektivní potenciál:



křivka závisí na L

relativisticky:



$p^r = 0 \ \wedge \ \frac{dV^2}{dr} = 0$

Jak identifikovat kruhové orbity? – mají $p^r = 0$ a mají to věčně, ne jen v okamžiku obratu

… lokální extrémy ef. potenciálu

$$\frac{dV^2}{dr} = +\frac{2M}{r^2}\left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(-2\frac{L^2}{r^3}\right) \qquad /\cdot\frac{r^4}{2}$$

$$= Mm^2r^2 + ML^2 - L^2r + 2ML^2 = Mm^2r^2 + (3M-r)L^2 = 0$$

$$L^2 = \frac{-Mm^2r^2}{3M-r}$$

charakteristiky kruhových orbit

jestliže $E^2 = V^2$ pak $= \frac{r-2M}{r}\cdot\left(m^2 + \frac{Mm^2}{r-3M}\right)$

$$E^2 = \frac{r-2M}{r}\,\frac{rm^2 - 2Mm^2}{r-3M} = m^2\frac{(r-2M)^2}{r(r-3M)}$$

Vsuvka: lokálně měřená rychlost

pozorovatel na konst. r měří rychlost:

černá díra

$$\hat{v}^i = \frac{d\hat{l}}{d\hat{t}} = \frac{\sqrt{g_{ii}}\,dx^i}{d\hat{t}} = \sqrt{g_{ii}}\;\underbrace{\frac{dx^i}{d\tau}}_{u^i}\;\underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{\frac{1}{u^t}}\;\underbrace{\frac{dt}{d\hat{t}}}_{\hat{u}^t}$$

vlastní vzdálenost / vlastní čas

už souřadnicové i je konkrétní, ne sčítací

τ … vlastní čas částice

časová složka čtyřrychlosti pozorovatele

stojí-li pozorovatel*ka na místě, tak $u^\mu = (u^t, 0, 0, 0) \Rightarrow u^t = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}$

když dosadíme

$$= \sqrt{g_{ii}}\;\frac{-g_{tt}}{E}\cdot\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}\;u^i = \sqrt{-g_{ii}g_{tt}}\;\frac{u^i}{E}$$

speciálně nás zajímá $i=r$ a $i=\varphi$

$$(\hat{v}^{\hat{r}})^2 = -g_{rr}g_{tt}\frac{(u^r)^2}{\tilde{E}^2} = -g_{rr}g_{tt}\frac{\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2}{\tilde{E}^2} = -g_{rr}g_{tt}\left(1 - \frac{\tilde{V}^2}{\tilde{E}^2}\right)$$

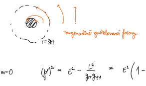
$$(\hat{v}^{\hat{\varphi}})^2 = -g_{\varphi\varphi}g_{tt}\frac{(u^\varphi)^2}{\tilde{E}^2} = -\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\frac{\tilde{L}^2}{\tilde{E}^2}$$

$\tilde{L} = \frac{L}{m}, \tilde{E} = \frac{E}{m}$ … zde se to pokrátí

Kruhové orbity: $\quad (\hat{v}^{\hat{r}})^2 = 0$

$$(\hat{v}^{\hat{\varphi}})^2 = \frac{1-\frac{2M}{r}}{\cancel{r^2}}\;\frac{\cancel{m^2}M\cancel{r^2}}{\cancel{r-3M}}\;\frac{1}{\cancel{m^2}}\;\frac{r\cancel{(r-3M)}}{(r-2M)^2} = M\frac{r-2M}{(r-2M)^2} = \frac{M}{r-2M}$$

$r \to 3M$ … $(\hat{v}^{\hat{\varphi}})^2 \to 1$ což je ale jednička značící c^2 … odpovídá nejmenší možné kruhové geodetice



$l^2 = \frac{L^2}{E^2}$, l má roli záměrného parametru (impact parametr)

fotony $m=0 \qquad (p^r)^2 = E^2 - \frac{L^2}{g_{rr}g_{\varphi\varphi}} = E^2\left(1 - \frac{l^2}{\lambda^2}\right)$

$\lambda^2 = g_{rr}g_{\varphi\varphi} = \frac{r^2}{1-\frac{2M}{r}}$ $\quad$ nezávislé na momentu hybnosti

λ má význam maximálního impact parametru

Přednáška 12

Thursday, 22 May 2025 15:41

Kosmologie (FLRW modely)

Friedmann, Lemaître, Robinson, Walker

frekvenční posuny ... měření 10.-20. léta 20. století

– převážně do červena – dopplerovská interpretace: vesmír se zřejmě rozpíná

budeme dnes dělat model vesmíru vyplněného ideální kapalinou

na rozdíl od Schwarzschildova řešení nebudeme mít vakuová místa

náš vesmír bude mít nějaké symetrie ... ještě před řešením Einsteinových rovnic si pomocí symetrií zjednodušíme metriku

předpokládáme tyhle dvě věci na téhle škále

kosmologický princip: homogenita & izotropie $(\sim 250 \text{ Mpc})$

představujeme si vesmír z „buněk" o rozměru 250 Mpc (>> galaxie)
v rámci „buňky" vystředované veličiny
ve viditelném vesmíru řádově tisíce „buněk"
představujeme si to jako „kosmickou tekutinu"

pojmy homogenita a izotropie je třeba konkretizovat

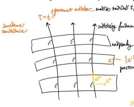
izotropie: existuje nějaká třída pozorovatelů, kteří v každém čase nemůžou rozlišit jednotlivé směry

= fundamental observers – je zřejmé, že to jsou pozorovatelé, kteří jsou vůči kosmické tekutině v klidu

homogenita: každým bodem prochází prostoropodobná nadplocha, na níž jsou jednotlivé události nerozlišitelné

$\tau \to t$ parametr světočar... značíme tradičně t, ale má význam vlastního času

zavedeme souřadnice



kdyby světočáry nebyly kolmé na nadplochy, byla by porušena izotropie (bylo by možné zjistit význačný směr)

$u^\mu = (1,0,0,0)$ protože $u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\tau}{d\tau} = 1$

s^μ ... tečný vektor k nadploše $s^\mu = (0, s^i)$

$$0 = g_{\mu\nu} u^\mu s^\nu = g_{ti} u^t s^i$$

$$g_{ti} = 0$$

podobná konstrukce lze udělat lokálně vždy, ale tento případ je speciální tím, že daná prostoropodobná nadplocha existuje globálně

$\Rightarrow$ souřadnice jsou zavést globálně

$$ds^2 = dt^2 + d\sigma^2$$

$d\sigma^2$ ↑ nadplochy homogenity

to, že jsou nadplochy nadplochy homogenity znamená, že nemáme jedno místo na nadploše

poznat od jiných $\Rightarrow$ na nadploše musí být konstantní křivost

$\Rightarrow$ nadplochy homogenity jsou jsou 3D variety konstantní křivosti

- kladná křivost – koule
- nulová křivost – plochá rovina
- záporná křivost – hyperboloidy

izotropie v každém bodě implikuje homogenitu

obecné geometrie, do níž je možná 3D varieta:

$$d\Sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2\right) \pm (dx^4)^2$$

(toto není nutně prostoročas)
(to je prostě nějaká metrika)

E^4 eukleidovská geometrie ... do eukleidovského prostoru nelze mořit plochy záporné křivosti, nelze si to představit

M^4 minkowského geometrie

nadplochy: $(x^4)^2 \pm \underbrace{\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2}_{=r^2} = a^2$ ($=$ konst.)

E^4, M^4

sférické souřadnice

$$x^1 = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$x^2 = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$x^3 = r \cos\theta$$

zdiferencujeme $x^4 dx^4 \pm r\,dr = 0$

$$(dx^4)^2 = \frac{r^2 dr^2}{(x^4)^2} = \frac{r^2 dr^2}{a^2 \mp r^2}$$

dosadíme do $d\Sigma^2 = \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 \pm (dx^4)^2$ tím se omezíme jen na 3D sféru/3D hyperboloid

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2\underbrace{(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}_{d\Omega^2} \pm \frac{r^2}{a^2 \mp r^2} dr^2$$

$$= \left(1 \pm \frac{r^2}{a^2 \mp r^2}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$= \frac{a^2 \mp r^2 \pm r^2}{a^2 \mp r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \frac{1}{1 \mp \frac{r^2}{a^2}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

3D sféra / 3D hyperboloid

když je tohle nula, je to ta chybějící rovina

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - K\frac{r^2}{a^2}} + r^2 d\Omega^2$$

$K = +1, 0, -1$ $\Rightarrow$ $ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - K\frac{r^2}{a^2}} + r^2 d\Omega^2$

dá se k tomu (nějak???) dojít z transformace $r = a\Sigma$, $\Sigma = \begin{cases}\sin\chi & \chi \in (0,\pi) \\ \chi & \\ \sinh\chi & \chi \in (0,\infty)\end{cases}$ $K = +1, 0, -1$

$$\Rightarrow ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2\right)$$

tady je na místě zdůraznit závislost na čase
$a(t)$ nějak určuje, jak je ta prostorová varieta velká
to nijak nenarušuje předpoklad, že má varieta konst. křivost

jak se v těch geometriích chovají objemy?

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\chi_{max}} \sqrt{g_{\chi\chi} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}}\, d\chi\, d\theta\, d\varphi$$

$\sqrt{g_{\chi\chi} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} = \sqrt{a^6 \Sigma^4 \sin^2\theta}$

$$= 4\pi a^3 \int_0^{\chi_{max}} \Sigma^2\, d\chi$$

$K = +1$ $\Sigma = \sin\chi$ $V = 4\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^2\chi\, d\chi = 2\pi^2 a^3$

$K = 0$ nebo -1 ... V vyjde ∞

Kosmická tekutina

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$$

ρ ... hustota energie
P ... tlak

představa: pro "pixel" o průměru 250 Mpc středujeme naše veličiny

člověk by čekal, že k energii kromě hmoty přispívá i vzájemný pohyb hmoty, magnetické pole apod.

ale ve skutečnosti se nějak ukáže, že tyhle příspěvky jsou zanedbatelné

a jediné, co se počítá, je látka & záření

do níž se počítají i relativistická neutrina

záření : látka $\doteq 10^{-4}$ většina z toho reliktní záření (všechno ostatní asi 10x menší než reliktní záření ... je totiž všudypřítomné)

cosmic microwave background radiation

tlak: zejména od záření, od látky zanedbatelné

$P = \frac{\rho}{3}$ pro záření (stejného řádu) ... nemůžeme tlak zanedbat, pokud nechceme úplně zanedbat záření

$$\rho = \rho_{látka} + \rho_{záření} \qquad P = P_{látka} + P_{záření} = 0 + \frac{\rho_{záření}}{3}$$

$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \Rightarrow$ Eulerovy rovnice / rovnice kontinuity $\frac{d\rho}{dt} + (\rho + P)\, u^\nu{}_{;\nu} = 0$

$$u^\nu = (1,0,0,0)$$

$$u^\nu{}_{;\nu} = \underbrace{u^\nu{}_{,\nu}}_{=0} + \Gamma^\nu{}_{\nu\sigma} u^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\iota}\left(\underbrace{g_{\iota\nu,\sigma}}_{\neq 0} + \underbrace{g_{\sigma\iota,\nu}}_{=0} - \underbrace{g_{\nu\sigma,\iota}}_{=0}\right) u^\sigma$$

tohle je nenulové jen pro $\sigma = t$

$$= \frac{1}{2} g^{\iota\nu} g_{\iota\nu,\sigma} u^\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{g^{\chi\chi}}_{=\frac{1}{g_{\chi\chi}}} g_{\chi\chi,t} + \underbrace{g^{\theta\theta}}_{=\frac{1}{g_{\theta\theta}}} g_{\theta\theta,t} + \underbrace{g^{\varphi\varphi}}_{=\frac{1}{g_{\varphi\varphi}}} g_{\varphi\varphi,t}\right)$$

ve všech je jediná věc závisející na čase to $a(t)$ ... zbytek se vykrátí

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \frac{2a\, a_{,t}}{a^2} = 3\frac{a_{,t}}{a} =: 3H$$

(Hubbleova konstanta – historický vztah $v = Hl$ pro rychlost rozpínání vesmíru)

je to fakt totéž?

$l = a\Delta\chi$ tohle je jasný

$$v := \frac{dl}{dt} = a_{,t}\Delta\chi = \underbrace{\frac{a_{,t}}{a}}_{H} \underbrace{a\Delta\chi}_{l}$$

definice vzájemná rychlost pouze kvůli rozpínání vesmíru

... H není konstanta ... závisí na čase

v současnosti se už dá říct, že záření s látkou neinteragují (nevyměňují si signifikantní množství energie)

$\Rightarrow$ můžeme napsat rovnici kontinuity $\frac{d\rho}{dt} + (\rho+P)\underbrace{u^\nu{}_{;\nu}}_{=3H} = 0$ zvlášť pro látku a zvlášť pro záření

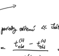
látka: $\rho_{,t} + 3\frac{a_{,t}}{a}\rho = 0 \quad / \cdot a^3 \Rightarrow \rho_{,t} a^3 + 3a^2 a_{,t}\rho = 0 \xrightarrow{\text{Leibniz obráceně}} \rho a^3 = \text{konst.}$

záření: $\rho_{,t} + 4\frac{a_{,t}}{a}\rho = 0 \quad / \cdot a^4 \Rightarrow \rho_{,t} a^4 + 4a^3 a_{,t}\rho = 0 \longrightarrow \rho a^4 = \text{konst.}$

záření a látka chladnou jinak rychle

Kosmologický posun frekvence

představme si foton

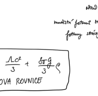


světelná světočára $0 = -dt^2 + a^2 d\chi^2$

$$\chi_{obs} = \chi_{em} - \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{a(t)}$$

napíšeme si tohle pro dvě po sobě následující maxima a odečteme χ_{obs} a χ_{em} se odečtou, jsou stejné

$$\int_{t_{em}^{(1)}}^{t_{obs}^{(1)}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{em}^{(2)}}^{t_{obs}^{(2)}} \frac{dt}{a(t)}$$



roztrhnu každé na 2 integrály

$$\int_{t_{em}^{(1)}}^{t_{em}^{(2)}} + \cancel{\int_{t_{em}^{(2)}}^{t_{obs}^{(1)}}} = \cancel{\int_{t_{em}^{(2)}}^{t_{obs}^{(1)}}} + \int_{t_{obs}^{(1)}}^{t_{obs}^{(2)}}$$

to se vykrátí

integrace přes krátký čas ... škála periody záření $\ll$ škála rozpínání vesmíru, tj. změny $a(t)$

$\Rightarrow$ (věta o střední hodnotě)

$$\frac{t_{em}^{(2)} - t_{em}^{(1)}}{a(t_{em})} = \frac{t_{obs}^{(2)} - t_{obs}^{(1)}}{a(t_{obs})} = \frac{\lambda_{em}}{a(t_{em})} = \frac{\lambda_{obs}}{a(t_{obs})} \Rightarrow \frac{\lambda}{a} = a\nu = \text{konst.}$$

odsud pochází rozdíl chladnutí látky a záření

množství fotonů se ředí stejně jako látka, ale navíc fotony ztrácejí energii jako $\frac{\text{konst.}}{a}$

Einsteinovy rovnice $\Rightarrow$

$$\boxed{H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho}$$

FRIEDMANNOVA ROVNICE

&

$$-2qH^2 + H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \Lambda c^2 - \frac{8\pi G}{c^2} P$$

decelerační rovnice (také plyne z Einsteinových rovnic)

q ... decelerační parametr $q := -\frac{a_{,tt}\, a}{(a_{,t})^2}$

$$q = \frac{d(H^{-1})}{dt} - 1 = -\frac{1}{H^2}\frac{dH}{dt} - 1$$

taky se dá decelerační odvodit z Friedmanna + rovnice kontinuity