

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkouška z Kombinatoriky a grafů I — písemná část, 24. 1. 2025

Čas: 90 minut

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit, pokud není řečeno jinak.*
- *Číselné výsledky (např. typu $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$) není nutno dále upravovat a dopočítávat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutné uvést, které tvrzení používáte.*

-
1. Napište, jak je definováno zobecněné kombinační číslo $\binom{r}{k}$ pro $r \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}_0$. Zformulujte a dokažte zobecněnou binomickou větu. [10 bodů]
 2. Napište definici pojmu *projektivní rovina*. Ukažte, že v každé projektivní rovině lze nalézt tři přímký p , q a r , které nemají žádný společný bod (tj. žádný bod nepatří do $p \cap q \cap r$). Jestli vám to pomůže, smíte se v důkazu omezit jen na konečné projektivní roviny. [5 bodů]
 3. Definujte, co je *párování* v grafu. Zformulujte a dokažte Hallovu větu ve verzi, která mluví o párováních v bipartitních grafech. [10 bodů]
 4. V této úloze uvažujeme pouze kódy nad abecedou $\mathbb{Z}_2$. Napište, jak je definována *generující matice* lineárního kódu a co to je *minimální vzdálenost* kódu. Nechť C je kód, který má následující generující matici:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jaká je minimální vzdálenost kódu C ? Kolik slov obsahuje tento kód? [5 bodů]