Druhé kvantování
Šárka Gregorová, 2013

Druhé kvantování je procedura používaná v kvantové teorii pole, při níž popisujeme pole pomocí „částic“ nebo taky „kvant“. Představit si můžeme například elektromagnetické pole a fotony, viz též otázku *Kvantování elektromagnetického pole,* ale (prý) se to dá použít pro různá další pole.

Formálně vypadá druhé kvantování stejně jako řešení lineárního harmonického oscilátoru ve Fockově reprezentaci, viz například Skálovu učebnici QM.

Reprezentace druhého kvantování

Mějme systém *N* stejných částic s *v* stupni volnosti. V běžné souřadnicové reprezentaci tento systém popisujeme vlnovou funkcí závisející na *Nv* proměnných. Protože jsou částice zcela totožné, nesmí vlnová funkce záviset na pomyslném „očíslování“ částic, musí být tedy symetrická vůči záměně částic (pro bosony, např. fotony) resp. antisymetrická (pro fermiony, např. elektrony). Antisymetrie se pro elektrony dosahuje např. pomocí Slaterových determinantů.

V reprezentaci druhého kvantování naproti tomu všechny operátory vyjádříme pomocí kreačních a anihilačních operátorů, které mají počet stupňů volnosti stejný jako jedna částice. Vlnová funkce v této reprezentaci závisí pouze na počtu částic v jednotlivých jednočásticových stavech. Počet částic v jednom stavu pro bosony může být libovolné přirozené číslo nebo nula, pro fermiony pouze 0 nebo 1. Reprezentace druhého kvantování automaticky pracuje s vlnovými funkcemi s požadovanou symetrií vůči záměně částic.

Vakuum, kreační a anihilační operátory

Existuje stav bez jakékoliv částice v kterémkoliv stavu, nazývaný **vakuum**. Tento stav budeme značit $|0\rangle$. Stav *vakuum* je normalizovaný, neboli $\langle 0|0\rangle = 1$.

Pro každý jednočásticový stav existuje **kreační operátor**, který zvyšuje o jedničku počet částic v daném stavu. Kreační operátor pro stav *m* budeme značit a_m^+, pokud se daná věc týká bosonů i fermionů, b_m^+ pro bosony a f_m^+ pro fermiony. Stav s jednou částicí ve stavu *m* pak zapíšeme jako $a_m^+|0\rangle$. Obecně působí kreační operátor stavu *m* na stav s N_i částicemi ve stavu *i* $|N_1, N_2, \ldots\rangle$ takto:

$$b_m^+|N_1, N_2, \ldots, N_m, \ldots\rangle = \sqrt{N_m + 1}|N_1, N_2, \ldots, N_m + 1, \ldots\rangle$$
$$f_m^+|N_1, N_2, \ldots, N_m, \ldots\rangle = (-1)^{\sum_{i<j} N_i}\left(1 - N_j\right)|N_1, N_2, \ldots, N_m + 1, \ldots\rangle$$

Divné koeficienty na pravé straně u fermionů zajišťují antisymetrii a to, že v žádněm stavu nebude více než jeden fermion (Pauliho vylučovací princip). Záměna pořadí dvou bosonů neudělá nic, záměna pořadí dvou fermionů změní znaménko, neboli

$$b_m^+ b_k^+ = b_k^+ b_m^+$$
$$f_m^+ f_k^+ = -f_k^+ f_m^+$$

To můžeme přepsat ve formě komutátoru resp. antikomutátoru:

$$[b_m^+, b_k^+] = 0,\ \{f_m^+, f_k^+\} = 0$$

Anihilační operátor je definován jako operátor hermitovsky sdružený ke kreačnímu, značíme ho a_m resp. b_m resp. f_m. Platí, že anihilační operátor snižuje o jedničku počet částic v daném stavu:

$$b_m b_m^+ |N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle \stackrel{?}{=} |N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle \ \ / \langle N_1, N_2, ..., N_m, ...|$$
$$L = \langle N_1, N_2, ..., N_m, ... | b_m b_m^+ | N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle = \left| b_m^+ | N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle \right|^2 = 1 (normalizace)$$
$$P = \langle N_1, N_2, ..., N_m, ... | N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle = 1 \qquad QED$$

Anihilační operátor použitý na vakuum dá nulu. Platí

$$[b_m, b_k] = 0, \{f_m, f_k\} = 0, [b_m, b_k^+] = \delta_{mk}, \{f_m, f_k^+\} = \delta_{mk}$$
$$b_m |N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle = \sqrt{N_m} |N_1, N_2, ..., N_m - 1, ...\rangle$$
$$f_m |N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle = (-1)^{\sum_{i<j} N_i} (N_j) |N_1, N_2, ..., N_m - 1, ...\rangle$$

Operátor počtu částic $N_i = a_i^+ a_i$ nám dá počet částic ve stavu *i*. Důkaz pro bosony:

$$\langle N_1, N_2, ..., N_m, ... | b_m^+ b_m | N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle = \sqrt{N_m} \langle N_1, N_2, ..., N_m, ... | b_m^+ | N_1, N_2, ..., N_m - 1, ...\rangle$$
$$= N_m \langle N_1, N_2, ..., N_m, ... | N_1, N_2, ..., N_m, ...\rangle = N_m$$

Zdroje: Davydov: Kvantová mechanika (Úvod kapitoly X), anglická a německá wikipedie (http://en.wikipedia.org/wiki/Second_quantization, http://de.wikipedia.org/wiki/Zweite_Quantisierung), http://www.aldebaran.cz/studium/kvantovka.pdf