

I. MECHANIKA

8. Pružnost



Obsah

- Zobecněný Hookeův zákon.
- Interpretace invariantů.
- Rozklad tenzorů na izotropní část a deviátor.
- Křivka deformace.
- Základní úloha teorie pružnosti.
- Elementární Hookeův zákon pro jednoosý tah.
- Youngův modul pružnosti v tahu.
- Smyk. Modul pružnosti ve smyku.
- Všestranný tlak. Objemová pružnost.
- Torze.
- Průhyb trámku.

Základní pojmy nauky o pružnosti

reologie

- stanovení souvislosti mezi napětím buzeným v kontinuu vnějšími silami a deformacemi resp. rychlostí deformace , které tato napětí vyvolají

elastické látky (napětí ~ deformace)

- lineární závislost – Hookeův (Hookův) zákon
 - izotropní – klasická teorie pružnosti
 - anizotropní
- nelineární závislost

kapaliny (napětí ~ rychlost deformace)

- lineární závislost – Newtonův viskózní zákon (newtonovské kapaliny)
- nelineární – nenewtonovské kapaliny

viskoelastické látky

- kombinace elastické látky a viskózní kapaliny

klasická teorie pružnosti – lineární vztahy mezi napětím a deformací izotropních elastických látek

Zobecněný Hookeův zákon

vztah mezi napětím a deformací elastické látky

$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$... nejobecnější tvar Hookeova zákona

C_{ijkl} ... elastické koeficienty, v homogenní látce všude stejné

σ_{ij} a e_{kl} ... tenzory $\Rightarrow C_{ijkl}$... tenzor 4. řádu (81 složek)

symetrie:

σ_{ij} a e_{kl} ... symetrické tenzory - jen 6 nezávislých složek $\Rightarrow 9 \times 9 \rightarrow 6 \times 6$

kontrakce indexů $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6 \Rightarrow$ matice 6×6

$\sigma_a = C_{ab} e_b$... energetické úvahy \Rightarrow tenzor C_{ab} symetrický $C_{ab} = C_{ba}$

\Rightarrow 21 složek – v případě systému s nejmenším možným počtem symetrií (trojklonná krystalografická soustava)

\Rightarrow další symetrie snižují počet nezávislých koeficientů

- jednoklonná soustava – 13 koeficientů
- kubická soustava – 3 koeficienty
- izotropní látka – 2 elastické koeficienty

Zob. Hookeův zákon pro izotropní látku

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}$$

λ a μ ... Laméovy koeficienty

e_I ... 1. invariant tenzoru malých deformací

při použití kontrahovaných indexů lze zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix}$$

Význam 1. invariantu tenzoru deformací

víme, že $\frac{l_1 - l_{10}}{l_{10}} = e_{11} \Rightarrow l_1 = l_{10}(1 + e_{11})$ a analogicky $l_2 = l_{20}(1 + e_{22})$ a $l_3 = l_{30}(1 + e_{33})$

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= l_{10}(1 + e_{11}) \\ l_2 &= l_{20}(1 + e_{22}) \\ l_3 &= l_{30}(1 + e_{33}) \end{aligned} \right\} V = l_1 l_2 l_3 = \underbrace{l_{10} l_{20} l_{30}}_{V_0} (1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33}) =$$
$$= V_0 \left(1 + \underbrace{(e_{11} + e_{22} + e_{33})}_{e_I} + \underbrace{(e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33}) + e_{11}e_{22}e_{33}}_{\text{malé v eličiny v y šší cčřádů zanedbáme}} \right)$$

neboli $V = V_0(1 + e_I)$ takže $\frac{V - V_0}{V_0} = e_I$

**závěr: 1. invariant tenzoru malých deformací je roven relativní změně objemu
neboli tzv. objemové deformaci**

Jak funguje zobecněný Hookeův zákon?

rozklad tenzoru deformace $e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}e_I\delta_{ij}}_{e_{ij}^{(i)} \text{ izotropní část}} + \underbrace{(e_{ij} - \frac{1}{3}e_I\delta_{ij})}_{e_{ij}^{(d)} \text{ deviator}}$

konstantu volíme 1/3, aby platilo jednak

izotropní část

- jen diagonální složky $e_{11}^{(i)} = e_{22}^{(i)} = e_{33}^{(i)} = \frac{e_I}{3}$
- smykové úhly nulové
- ve všech směrech stejná deformace (izotropní deformace)
 - relativní prodloužení o $\frac{e_I}{3}$
 - relativní změna objemu o e_I
- 1. invariant izotropní části roven 1. invariantu tenzoru $e_I^{(i)} = e_I$
- popisuje objemovou změnu bez změny tvaru elementu kontinua

Jak funguje zobecněný Hookeův zákon?

rozklad tenzoru deformace $e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}e_I\delta_{ij}}_{e_{ij}^{(i)} \text{ izotropní část}} + \underbrace{\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_I\delta_{ij}\right)}_{e_{ij}^{(d)} \text{ deviátor}}$

konstantu volíme 1/3, aby zároveň platilo

deviátor

- 1. invariant deviátoru

$$e_I^{(i)} = \underbrace{e_{11} + e_{22} + e_{33}}_{e_I} - 3\left(\frac{1}{3}e_I\right) = 0$$

- \Rightarrow relativní objemová změna nulová
- \Rightarrow úhly smyku obecně nenulové – tvar elementu se deformací mění
- popisuje tvarovou deformaci odpovídající tenzoru e_{ij}

Jak funguje zobecněný Hookeův zákon?

analogicky rozložíme tenzor napětí $\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}\sigma_I\delta_{ij}}_{\sigma_{ij}^{(i)} \text{ izotropní část}} + \underbrace{\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_I\delta_{ij}\right)}_{\sigma_{ij}^{(d)} \text{ deviátor}}$

izotropní část

- na plošce s normálou ν_i je vektor napětí $T_i^{\nu} = \sigma_{ij}^{(i)}\nu_j = \frac{1}{3}\sigma_I\delta_{ij}\nu_j = \frac{1}{3}\sigma_I\nu_i$
- \Rightarrow vektor napětí má směr normály k plošce a velikost $\frac{1}{3}\sigma_I$
- \Rightarrow **napětí je čistý tlak** $p = -\frac{1}{3}\sigma_I$ (pro $\sigma_I < 0$) nebo čistý izotropní tah

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_I \text{ (pro } \sigma_I > 0 \text{ má zobecněný tlak } p \text{ zápornou hodnotu)}$$

deviátor

- $\sigma_{ij}^{(d)} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_I\delta_{ij}$ představuje obecné smykové napětí
- nemusí jít o čisté smykové napětí, protože diagonální elementy nutně nemusí být nulové, jen je nulový jejich součet

Co z předchozího rozboru plyne?

- nabízí se představa, že izotropní části tenzoru napětí a tenzoru deformace by měly být úměrné $\sigma_{ij}^{(i)} = K_1 e_{ij}^{(i)}$
 - pak totiž pro všechny nenulové složky dostáváme stejnou rovnici mezi prvními invarianty obou tenzorů $\sigma_I = K_1 e_I$
 - to představuje **lineární závislost relativní změny objemu elementu kontinua na čistém tlaku/izotropním tahu**, která je v souladu s pozorováním na řadě látek
- v případě deviátorů se jeví také rozumným předpokládat, že mezi nimi platí úměrnost $\sigma_{ij}^{(d)} = K_2 e_{ij}^{(d)}$
 - víme, že pro čistou smykovou deformaci v rovině kolmé ke třetí souřadnicové ose s úhlem smyku α má tenzor deformace nenulovou jen složku $e_{12} = \frac{\alpha}{2}$
 - pak $e_I = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_{ij}^{(i)} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij}^{(i)} = 0 \\ e_{ij}^{(d)} = e_{ij} \Rightarrow \sigma_{ij}^{(d)} = K_2 e_{ij} \end{array} \right\} \sigma_{12} = K_2 e_{12} = K_2 \frac{\alpha}{2}$, což opět v souladu s řadou pozorování znamená, že **úhel smyku je úměrný smykovému napětí**

Formulace Hookeova zákona

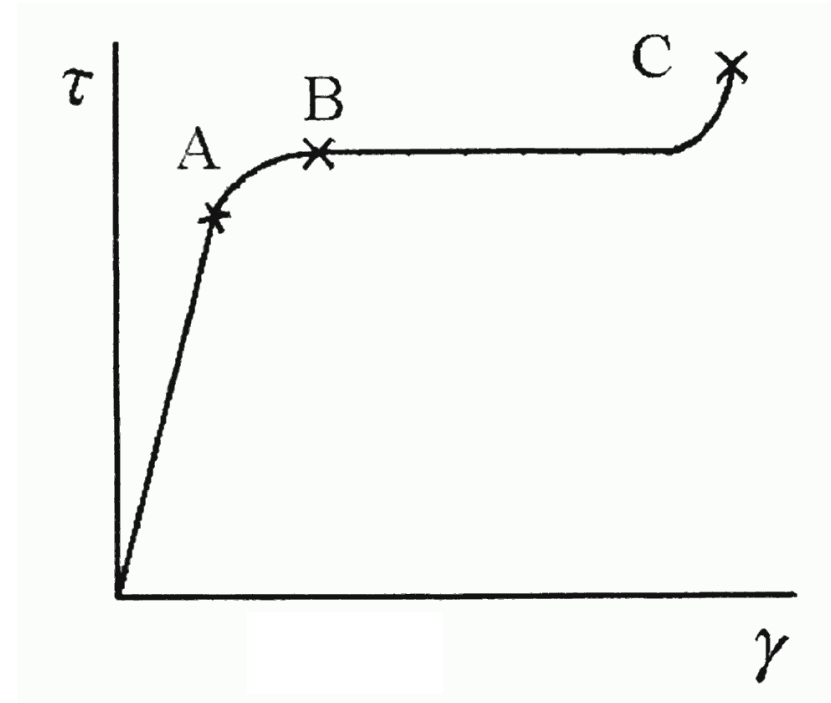
- izotropní lineárně elastická látka, která oběma materiálovým úměrnostem vyhovuje, se nazývá **hookovská látka** nebo **klasická elastická látka**
- po dosazení do celkového tenzoru napětí dostaneme zobecněný Hookeův zákon pro izotropní látku charakterizovaný dvěma konstantami

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(i)} + \sigma_{ij}^{(d)} = K_1 e_{ij}^{(i)} + K_2 e_{ij}^{(d)} = \frac{1}{3} K_1 e_I \delta_{ij} + K_2 \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_I \delta_{ij} \right) = \underbrace{\frac{1}{3} (K_1 - K_2) e_I \delta_{ij}}_{\lambda} + \underbrace{K_2}_{2\mu} e_{ij}$$

- jednoduchou substitucí dostaneme známější tvar $\sigma_{ij} = \lambda e_I \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$

Křivka deformace

- graf závislosti napětí na prodloužení
 - stroj řídí deformaci a měří napětí
- A - **mez úměrnosti**
 - potud platí Hookeův zákon
- B - **mez pružnosti**
 - odtud se látka vrátí do stavu před deformací
- C – **přetržení** vzorku
- oblast B-C
 - zde materiál plasticky teče
 - závislost nejen na deformaci, ale i na rychlosti deformace
- pokud mez úměrnosti tak nízká, že nelze stanovit → nelineární chování → nehookovská látka



Základní úloha teorie pružnosti

- najít napětí a deformaci v každém bodě tělesa, známe-li rozložení deformace nebo napětí na jeho povrchu
- předpokládáme, že izotropní hookeovské těleso je v rovnováze
- objemové síly (vnější) pokládáme za známé
- rovnice rovnováhy kontinua
$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0$$
- Hookeův zákon
$$\sigma_{ij} = \lambda e_I \delta_{ij} + 2\mu e_{ij},$$
- kde
$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
- celkem 9 rovnic pro 9 neznámých funkcí $u_i(x_l)$ a $\sigma_{ij}(x_l)$
- pro jednoznačné řešení nutno zadat okrajové podmínky, tj. hodnoty funkcí na okrajích tělesa (oblast řešení)
- 2 základní úlohy
 - jsou dána posunutí $u_i(x_l)$ na povrchu tělesa
 - je známo rozložení napětí $T_i(x_l)$ na povrchu tělesa
- při získávání experimentálních dat je důležitý Saint-Venantův princip

Vzorek namáhaný tahem

zanedbává se vlastní tíha vzorku - objemová síla nulová

⇒ rovnice rovnováhy kontinua $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$

⇒ $\sigma_{ij}(x_l) = \sigma_{ij}$ konstantní v celém vzorku

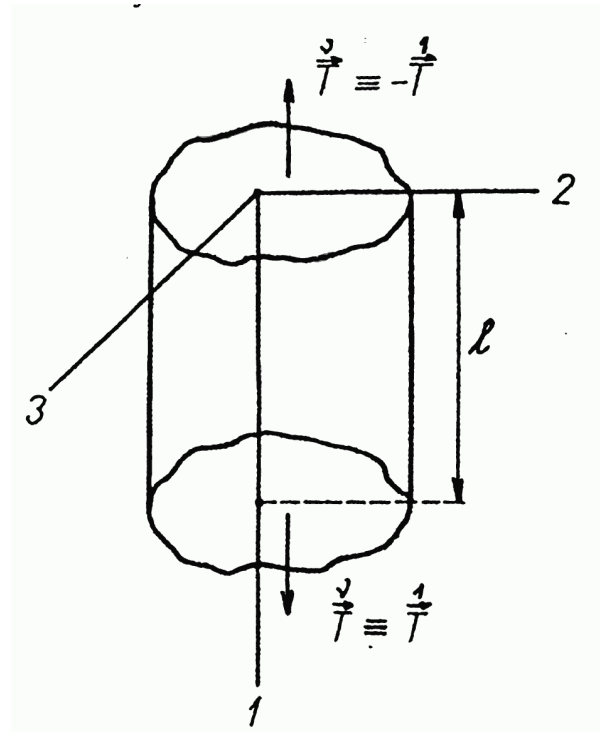
normála na horní podstavě $\vec{\nu}^{-1} = (-1, 0, 0)$

napětí na horní podstavě $\vec{T}^{-1} = (-F/S, 0, 0)$

normála na dolní podstavě $\vec{\nu}^1 = (1, 0, 0)$

napětí na dolní podstavě $\vec{T}^1 = (F/S, 0, 0)$

okrajové podmínky $T_i^{\nu} = \sigma_{ij} \nu_j$



Vzorek namáhaný tahem

pro horní podstavu platí

$$\begin{aligned} -F/S &= T_1 = \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 = -\sigma_{11} \\ 0 &= T_2 = \sigma_{21} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3 = -\sigma_{21} \\ 0 &= T_3 = \sigma_{31} v_1 + \sigma_{32} v_2 + \sigma_{33} v_3 = -\sigma_{31} \end{aligned}$$

pro dolní podstavu platí

$$\begin{aligned} F/S &= T_1 = \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 = \sigma_{11} \\ 0 &= T_2 = \sigma_{21} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3 = \sigma_{21} \\ 0 &= T_3 = \sigma_{31} v_1 + \sigma_{32} v_2 + \sigma_{33} v_3 = \sigma_{31} \end{aligned}$$

v obou případech tedy vychází

$$\sigma_{11} = F/S$$

$$\sigma_{21} = 0$$

$$\sigma_{31} = 0$$

Vzorek namáhaný tahem

v libovolně vybraném bodě na válcové ploše má vektor normály $\vec{\nu}^{23}$ nulovou první složku $\nu_1^{23} = 0$, druhé dvě musí splňovat vztah $\nu_2^{23} + \nu_3^{23} = 1$ (aspoň jedna nenulová)

napětí na povrchu pláště je nulové

$$0 = T_1^{23} = \sigma_{12}^{23} \nu_2^{23} + \sigma_{13}^{23} \nu_3^{23}$$

v každém bodě musí platit

$$0 = T_2^{23} = \sigma_{22}^{23} \nu_2^{23} + \sigma_{23}^{23} \nu_3^{23}$$

$$0 = T_3^{23} = \sigma_{32}^{23} \nu_2^{23} + \sigma_{33}^{23} \nu_3^{23}$$

platí pro všechny body, pokud

$$\sigma_{12}^{23} = \sigma_{13}^{23} = \sigma_{22}^{23} = \sigma_{23}^{23} = \sigma_{32}^{23} = \sigma_{33}^{23} = 0$$

dosazení do Hookeova zákona

$$\left\{ \begin{array}{l} F/S = \sigma_{11} = \lambda e_I + 2\mu e_{11} \quad (1) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{22} \quad (2) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{33} \quad (3) \\ 0 = 2\mu e_{12} \quad (4) \\ 0 = 2\mu e_{13} \quad (5) \\ 0 = 2\mu e_{23} \quad (6) \end{array} \right.$$

Poissonův poměr

dosazení do Hookeova zákona

$$\left\{ \begin{array}{l} F/S = \sigma_{11} = \lambda e_I + 2\mu e_{11} \quad (1) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{22} \quad (2) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{33} \quad (3) \\ 0 = 2\mu e_{12} \quad (4) \\ 0 = 2\mu e_{13} \quad (5) \\ 0 = 2\mu e_{23} \quad (6) \end{array} \right.$$

řádky (4) až (6) \Rightarrow

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$$

odečtením (2) a (3) \Rightarrow

$$e_{22} = e_{33}$$

dosadit za 1. invariant do (2) \Rightarrow

$$0 = \lambda \underbrace{(e_{11} + 2e_{22})}_{e_I} + 2\mu e_{22}$$

\Rightarrow vztah mezi e_{11} , e_{22} a e_{33}

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11}$$

záporná hodnota e_{22} a e_{33} znamená, že ve směrech kolmých ke směru tahu dochází k relativnímu zkrácení

Poissonův poměr

$$\nu_P = \left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Elementární Hookeův zákon pro tah

Poissonův poměr

$$\nu_P = \left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

pro nestlačitelný materiál

$$e_I = e_{11} + 2e_{22} = 0 \Rightarrow \nu_P = \left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| = \frac{1}{2}$$

pro stlačitelný materiál

$$e_I = e_{11} + 2e_{22} > 0 \Rightarrow \nu_P = \left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| < \frac{1}{2}$$

pro běžné materiály

$$\frac{1}{4} < \nu_P < \frac{1}{2}$$

1. invariant pak bude

$$e_I = e_{11} + 2 \underbrace{\frac{-\lambda}{2(\lambda + \mu)}}_{-\nu_P} e_{11} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) e_{11} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e_{11}$$

dosadit za 1. invariant do (1) \Rightarrow

$$\frac{F}{S} = \sigma_{11} = \lambda \frac{\mu}{\lambda + \mu} e_{11} + 2\mu e_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11}$$

připomeňme

$$e_{11} \approx \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

takže

$$\frac{F}{S} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\Delta l}{l_0}$$

Elementární Hookeův zákon pro tah

takže

$$\frac{F}{S} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\Delta l}{l_0}$$

běžně se uvádí Hookeův zákon v elementárním tvaru pro jednoosý tah

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

kde E je **Youngův modul pružnosti**

porovnáním vyjádření pomocí Laméových koeficientů

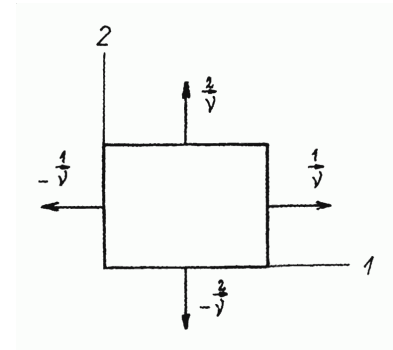
$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Smyk

kvádr ve smyku – tečné napětí působí na levou a pravou stěnu

normálové vektory

$$\begin{cases} \vec{v}^1 = (1,0,0) \\ \vec{v}^2 = (0,1,0) \\ \vec{v}^3 = (0,0,1) \end{cases}$$



pro pravou stěnu

$$\begin{aligned} 0 &= T_1 = \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 = \sigma_{11} \\ F/S &= T_2 = \sigma_{21} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3 = \sigma_{21} \\ 0 &= T_3 = \sigma_{31} v_1 + \sigma_{32} v_2 + \sigma_{33} v_3 = \sigma_{31} \end{aligned}$$

pro levou stěnu platí

$$\begin{aligned} 0 &= T_1 = \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 = -\sigma_{11} \\ -F/S &= T_2 = \sigma_{21} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3 = -\sigma_{21} \\ 0 &= T_3 = \sigma_{31} v_1 + \sigma_{32} v_2 + \sigma_{33} v_3 = -\sigma_{31} \end{aligned}$$

$$\sigma_{11} = 0$$

v obou případech tedy vychází

$$\sigma_{21} = F/S$$

$$\sigma_{31} = 0$$

Smyk

kvůli symetrii tenzoru napětí musí na obou podstavách také působit tečné napětí podle předpisu

$$\begin{aligned}
 F/S &= T_1 = \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 = \sigma_{12} \\
 0 &= T_2 = \sigma_{21} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3 = \sigma_{22} \\
 0 &= T_3 = \sigma_{31} v_1 + \sigma_{32} v_2 + \sigma_{33} v_3 = \sigma_{32}
 \end{aligned}$$

na plochách rovnoběžných s nákresem musí být kvůli symetrii tečná napětí nulová a normálové se neaplikuje \Rightarrow

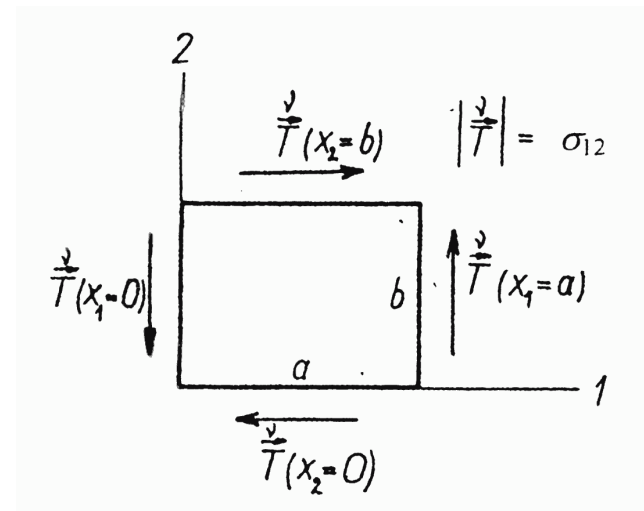
$$\sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{33} = 0$$

dosazení do Hookeova zákona

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 0 &= \lambda e_I + 2\mu e_{11} & (1) \\
 0 &= \lambda e_I + 2\mu e_{22} & (2) \\
 0 &= \lambda e_I + 2\mu e_{33} & (3) \\
 F/S = \sigma_{12} &= 2\mu e_{12} & (4) \\
 0 &= 2\mu e_{13} & (5) \\
 0 &= 2\mu e_{23} & (6)
 \end{array} \right.$$



Elementární Hookeův zákon pro smyk

dosazení do Hookeova zákona

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{11} \quad (1) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{22} \quad (2) \\ 0 = \lambda e_I + 2\mu e_{33} \quad (3) \\ F/S = \sigma_{12} = 2\mu e_{12} \quad (4) \\ 0 = 2\mu e_{13} \quad (5) \\ 0 = 2\mu e_{23} \quad (6) \end{array} \right.$$

(5) a (6) \Rightarrow

$$e_{13} = e_{23} = 0$$

(1), (2) a (3) \Rightarrow

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0$$

pro úhel smyku α platí

$$e_{12} = \frac{\alpha}{2}$$

takže

$$\frac{F}{S} = \mu\alpha$$

běžně se uvádí Hookeův zákon v elementárním tvaru pro smyk ve tvaru

$$\alpha = \frac{1}{G} \frac{F}{S}$$

kde G je **modul pružnosti ve smyku** (modul torze)
porovnáním vyjádření pomocí Laméových koeficientů

$$G = \mu$$

(pozor na záměnu s hustotou objemové síly \vec{G} nebo jejími složkami G_i)

Všestranný tlak

vzorek pod všestranným tlakem

dosazení do Hookeova zákona

$$\left\{ \begin{array}{l} -p = \lambda e_I + 2\mu e_{11} \quad (1) \\ -p = \lambda e_I + 2\mu e_{22} \quad (2) \\ -p = \lambda e_I + 2\mu e_{33} \quad (3) \\ 0 = 2\mu e_{12} \quad (4) \\ 0 = 2\mu e_{13} \quad (5) \\ 0 = 2\mu e_{23} \quad (6) \end{array} \right.$$

(4) až (6) \Rightarrow

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$$

pomocí (1), (2) a (3) \Rightarrow

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}$$

připomeňme

$$e_I = \frac{V - V_0}{V_0}$$

pak

$$\frac{V - V_0}{V_0} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu}$$

pro **objemovou pružnost** K platí

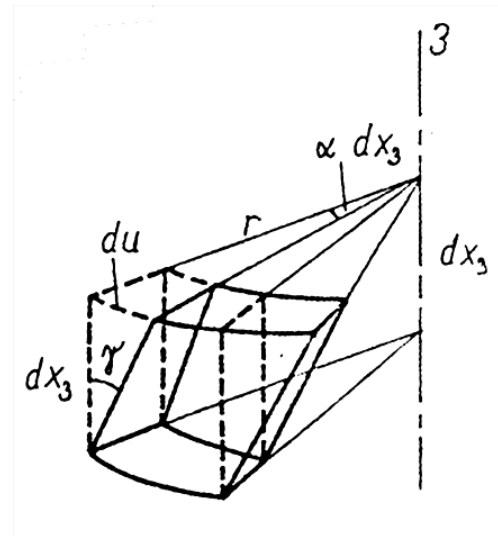
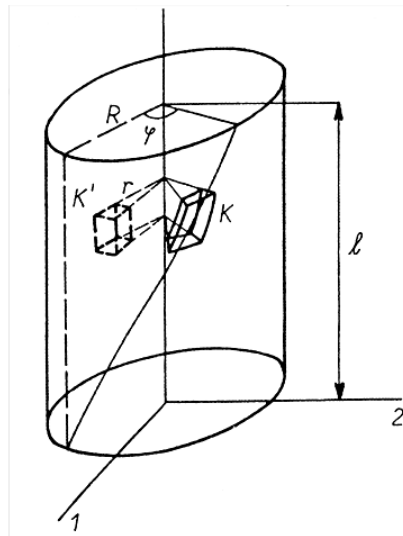
$$\frac{V - V_0}{V_0} = -\frac{p}{K}$$

porovnáním

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

Torze tyče

elementy torzně namáhané tyče jsou smykově deformovány



moment síly nutný ke stočení válce o poloměru R a délce l o úhel φ

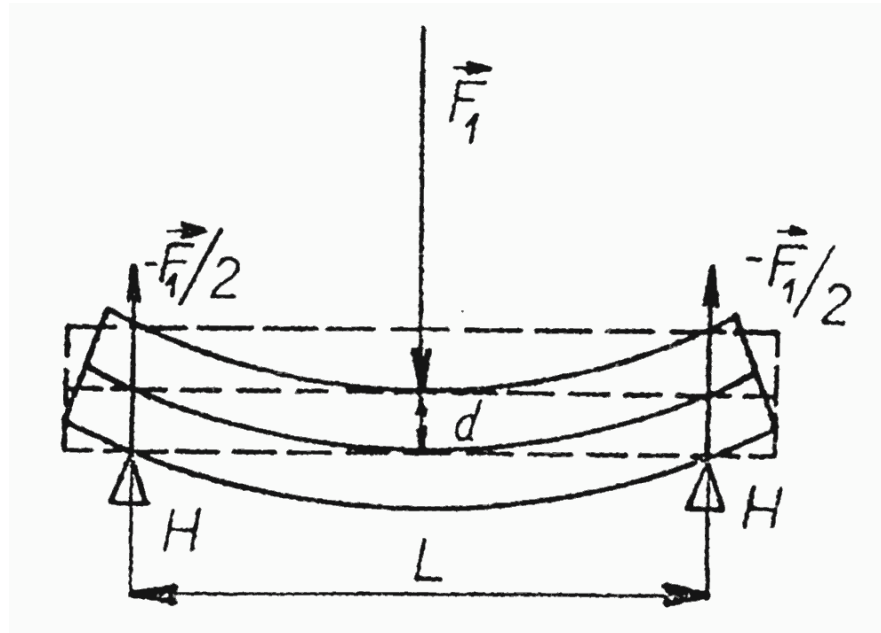
$$M = \frac{G\pi R^4}{\underbrace{2l}_D} \varphi$$

- veličina D (direkční moment) – koeficient úměrnosti mezi momentem síly a úhlem stočení (pro dlouhou tyč/vláknem nemusí jít o malé úhly)
- užití jako vratná síla při generování harmonických kmitů
- torzní váhy

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = D \varphi$$

Průhyb trámku

- nosník uložený na dvou oporách



- průhyb d působením síly F_1 na nosník délky l , šíře a a výšky b

$$d = \frac{F_1 l^3}{4Eab^3}$$