

# 1 Logika, množiny a základní číselné obory

## 1.1 Logika

**Výrokem** nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

**Definice.** Negací  $\neg A$  výroku  $A$  rozumíme výrok:

*Není pravda, že platí  $A$ .*

$A$	$\neg A$
0	1
1	0

**Definice.** Konjunkcí  $A \wedge B$  výroků  $A$  a  $B$  nazveme výrok:

*Platí  $A$  i  $B$ .*

**Definice.** Disjunkcí  $A \vee B$  výroků  $A$  a  $B$  nazveme výrok:

*Platí  $A$  nebo  $B$ .*

**Definice.** Implikací  $A \Rightarrow B$  nazýváme výrok:

*Jestliže platí výrok  $A$ , potom platí výrok  $B$ .*

Výroku  $A$  v implikaci se říká **premise**, výrok  $B$  se nazývá **závěr**. Výrok  $A$  je **postačující podmínkou** pro platnost  $B$  a  $B$  je **nutnou podmínkou** pro platnost  $A$ .

**Definice.** Ekvivalencí  $A \Leftrightarrow B$  nazýváme výrok:

*Výrok  $A$  platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok  $B$ .*

(Platnost výroku)  $A$  je **nutnou a postačující podmínkou** (platnosti výroku)  $B$ .

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

**Výrokovou formou** budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků  $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$  z daných množin  $M_1, \dots, M_m$ .

**Definice.** Nyní necht'  $A(x)$ ,  $x \in M$ , je výroková forma. Výrok

*Pro všechna  $x \in M$  platí  $A(x)$ .*

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M : A(x).$$

Symbol  $\forall$  nazýváme **obecným (velkým) kvantifikátorem**.

**Definice.** Nyní necht'  $A(x)$ ,  $x \in M$ , je výroková forma. Výrok

*Existuje  $x \in M$ , pro které platí  $A(x)$ .*

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M : A(x).$$

Symbol  $\exists$  nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

————— Konec 1. přednášky, 30. 9. 2021 —————

Pro pořadí kvantifikátorů platí

$$\begin{aligned}(\forall x \in M_1 \forall y \in M_2 : V(x, y)) &\Leftrightarrow (\forall y \in M_2 \forall x \in M_1 : V(x, y)), \\(\exists x \in M_1 \exists y \in M_2 : V(x, y)) &\Leftrightarrow (\exists y \in M_2 \exists x \in M_1 : V(x, y)), \\(\exists x \in M_1 \forall y \in M_2 : V(x, y)) &\Rightarrow (\forall y \in M_2 \exists x \in M_1 : V(x, y)).\end{aligned}$$

Pro negaci kvantifikátorů platí

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \in M : V(x)) &\Leftrightarrow (\exists x \in M : \neg V(x)), \\ \neg(\exists x \in M : V(x)) &\Leftrightarrow (\forall x \in M : \neg V(x)).\end{aligned}$$

**Označení.** Necht'  $V, P$  jsou výrokové formy s proměnnou  $x \in M$ . Zápis

$$\forall x \in M, P(x) : V(x)$$

značí

$$\forall x \in M : (P(x) \Rightarrow V(x)).$$

**Označení.** Zápis

$$\exists x \in M, P(x) : V(x)$$

značí

$$\exists x \in M : (P(x) \wedge V(x)).$$

## 1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz: Pro každé  $a, b \in \mathbf{R}$  platí  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .
- nepřímý důkaz: Necht'  $p \in \mathbf{N}$  splňuje, že  $p^2$  je sudé. Pak  $p$  je sudé.
- důkaz sporem: Číslo  $\sqrt{2}$  není racionální.
- důkaz rozbořem případů
- důkaz matematickou indukcí: Necht'  $n \in \mathbf{N}$ . Pak existuje  $k \in \mathbf{N}$  takové, že  $n = 2k$ , nebo  $n = 2k - 1$ , přičemž oba případy nemohou nastat zároveň.
- důkaz úplnou matematickou indukcí

————— Konec 2. přednášky, 1. 10. 2021 —————

## 1.3 Množiny

G. Cantor: **Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku.

Množinu definujeme výčtem prvků nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme

$$\{x \in M; V(x)\},$$

kde  $M$  je množina a  $V(x)$ ,  $x \in M$ , je výroková forma.

### Definice.

- Řekneme, že množina  $A$  je **částí množiny**  $B$  (nebo  $A$  je **podmnožinou**  $B$ ), jestliže každý prvek množiny  $A$  je rovněž prvkem množiny  $B$ . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme  $A \subset B$ .
- Množiny  $A$  a  $B$  jsou si **rovny** ( $A = B$ ), jestliže mají stejné prvky.
- **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem  $\emptyset$ .

**Definice. Sjednocení** množin  $A$  a  $B$  nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin  $A$  či  $B$ . Sjednocení množin  $A$  a  $B$  značíme symbolem  $A \cup B$ .

Je-li  $\mathcal{A}$  systém množin, pak jeho **sjednocení**  $\bigcup \mathcal{A}$  definujeme jako množinu všech prvků  $a$ , pro které existuje  $A \in \mathcal{A}$  takové, že  $a \in A$ .

**Definice. Průnik** množin  $A$  a  $B$  nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do  $A$  i do  $B$ . Průnik množin  $A$  a  $B$  značíme symbolem  $A \cap B$ . Mají-li množiny  $A$  a  $B$  prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li  $\mathcal{A}$  neprázdný systém množin, pak jeho **průnik**  $\bigcap \mathcal{A}$  definujeme jako množinu všech prvků  $a$ , které pro každé  $A \in \mathcal{A}$  splňují  $a \in A$ .

**Definice.** **Rozdílem** množin  $A$  a  $B$  nazveme množinu prvků, které patří do množiny  $A$  a nepatří do množiny  $B$ . Rozdíl množin  $A$  a  $B$  značíme  $A \setminus B$ .

**Definice.** **Kartézským součinem** množin  $A_1, \dots, A_n$  nazveme množinu všech uspořádaných  $n$ -tic

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n]; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

**Věta 1.1** (de Morganova pravidla). *Necht'  $X$  je množina a  $\mathcal{A}$  je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

## 1.4 Relace uspořádání a zobrazení

**Definice.** Necht'  $A$  a  $B$  jsou množiny. **Binární relací**  $R$  mezi prvky množin  $A$  a  $B$  rozumíme libovolnou podmnožinu  $R$  kartézského součinu  $A \times B$ . Pokud  $[a, b] \in R$ , pak říkáme, že prvek  $a$  je v relaci  $R$  s prvkem  $b$ . Píšeme  $a R b$ . Pokud  $A = B$ , říkáme, že  $R$  je **binární relace na  $A$** .

**Definice.** Necht'  $X$  je množina a  $R$  je relace na  $X$ . Řekneme, že  $R$  je

- **reflexivní**, jestliže pro každé  $x \in X$  platí  $[x, x] \in R$ ,
- **symetrická**, jestliže pro každé  $x, y \in X$  splňující  $[x, y] \in R$  platí  $[y, x] \in R$ ,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé  $x, y, z \in X$  splňující  $[x, y] \in R$  a  $[y, z] \in R$  platí  $[x, z] \in R$ ,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé  $x, y \in X$  splňující  $[x, y] \in R$  platí  $[y, x] \notin R$ ,
- **slabě antisymetrická**, jestliže pro každé  $x, y \in X$  splňující  $[x, y] \in R$  a  $[y, x] \in R$  platí  $x = y$ .

**Definice.** Necht'  $A$  je množina a  $R$  je relace na  $A$ . Řekneme, že  $R$  je

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání takové, že pro každé  $x, y \in A$  platí  $[x, y] \in R$  nebo  $[y, x] \in R$ .

**Definice.** Necht'  $\leq$  je relace uspořádání na množině  $X$  a  $A \subset X$ . Řekneme, že prvek  $x \in X$  je

- **horní závorou** množiny  $A$ , jestliže pro každé  $a \in A$  platí  $a \leq x$ ,

- **dolní závorou** množiny  $A$ , jestliže pro každé  $a \in A$  platí  $x \leq a$ .

Množina  $A$  je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek  $x \in X$ , který je horní závorou množiny  $A$ ,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek  $x \in X$ , který je dolní závorou množiny  $A$ ,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

**Definice.** Necht'  $\leq$  je relace uspořádání na množině  $X$  a  $M \subset X$ . Řekneme, že prvek  $G \in X$  je **supremem množiny**  $M$ , jestliže platí:

- $G$  je horní závorou množiny  $M$ ,
- je-li prvek  $G' \in X$  horní závorou množiny  $M$ , potom  $G \leq G'$ .

Řekneme, že prvek  $g \in X$  je **infimem množiny**  $M$ , jestliže platí

- $g$  je dolní závorou množiny  $M$ ,
- je-li prvek  $g' \in X$  dolní závorou množiny  $M$ , potom  $g' \leq g$ .

**Věta 1.2.** Necht'  $\leq$  je relace uspořádání na množině  $X$ ,  $M \subset X$  je neprázdná množina a necht' existuje infimum a supremum množiny  $M$ . Potom platí  $\inf M \leq \sup M$ .

**Definice.** Necht'  $A$  a  $B$  jsou množiny. Binární relaci  $F \subset A \times B$  nazýváme **zobrazením** (někdy také **funkcí**) z množiny  $A$  do množiny  $B$ , jestliže platí

$$\forall x \in A \forall y_1, y_2 \in B: (([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

**Definičním oborem** zobrazení  $F$  nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A; \exists y \in B: [x, y] \in F\}.$$

**Oborem hodnot** zobrazení  $F$  nazýváme množinu

$$\mathcal{R}(F) = \{y \in B; \exists x \in A: [x, y] \in F\}.$$

*Poznámka.* Necht'  $F$  je zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Pro každé  $x \in \mathcal{D}(F)$  existuje právě jedno  $y$  takové, že  $[x, y] \in F$ . Takové  $y$  značíme  $F(x)$ . **Grafem zobrazení**  $F$  rozumíme množinu  $\{[x, y] \in A \times B; x \in \mathcal{D}(F) \wedge y = F(x)\}$ .

**Označení.** Necht'  $A$  a  $B$  jsou množiny. Pak symbol  $F: A \rightarrow B$  znamená, že  $F$  je zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$  a  $\mathcal{D}(F) = A$ .

**Definice.** Necht'  $f: \mathcal{D}(f) \subset A \rightarrow B$  je zobrazení a necht'  $M$  a  $P$  jsou množiny.

- **Obrazem množiny**  $M$  při zobrazení  $f$  rozumíme množinu  $\{y \in B; \exists x \in \mathcal{D}(f) \cap M: f(x) = y\}$ , kterou značíme  $f(M)$ .

- **Vzorem množiny  $P$**  při zobrazení  $f$  rozumíme množinu  $\{x \in \mathcal{D}(f); f(x) \in P\}$ , kterou značíme  $f^{-1}(P)$ .

**Definice.** Řekneme, že zobrazení  $f: \mathcal{D}(f) \subset A \rightarrow B$  je

- **prosté (injektivní)**, jestliže platí

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f): (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y),$$

- **„na“ (surjektivní)**, jestliže platí

$$\forall y \in B \exists x \in \mathcal{D}(f): f(x) = y,$$

- **bijekce  $A$  na  $B$  (vzájemně jednoznačné zobrazení)**, jestliže  $\mathcal{D}(f) = A$  a  $f$  je prosté a „na“.

**Definice.** Necht'  $f: \mathcal{D}(f) \subset A \rightarrow B$  je zobrazení a  $C \subset A$ . Pak zobrazení  $g: \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(f) \cap C \rightarrow B$  definované předpisem  $x \mapsto f(x)$ ,  $x \in \mathcal{D}(f) \cap C$ , nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení  $f$  na množinu  $C$ . Zobrazení  $g$  značíme  $f|_C$ .

**Definice.** Necht'  $A$  a  $B$  jsou množiny a  $R \subset A \times B$  je binární relace. Pak relaci  $R^{-1} \subset B \times A$  definovanou předpisem

$$R^{-1} = \{[y, x] \in B \times A; [x, y] \in R\}$$

nazýváme **inverzní relací** k relaci  $R$ .

**Definice.** Necht'  $A$  a  $B$  jsou množiny a  $f: \mathcal{D}(f) \subset A \rightarrow B$  je prosté zobrazení. Pak **inverzní zobrazení** k  $f$  je definováno jako inverzní relace k  $f$ . Inverzní zobrazení k  $f$  značíme  $f^{-1}$ .

**Definice.** Necht'  $f$  a  $g$  jsou zobrazení. Pak zobrazení  $g \circ f$  je definováno předpisem  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  pro všechna  $x \in \mathcal{D}(f)$  taková, že  $f(x) \in \mathcal{D}(g)$ . Zobrazení  $g \circ f$  nazýváme **složeným zobrazením (složením zobrazení)**  $f$  a  $g$ , přičemž  $g$  nazýváme **vnějším** zobrazením a  $f$  nazýváme **vnitřním** zobrazením.

**Definice.** Necht'  $A$  je neprázdná množina.

- Konečnou posloupností** prvků  $A$  rozumíme každé zobrazení množiny  $\{1, \dots, n\}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , do množiny  $A$ . Pokud  $k \mapsto a_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme  $\{a_k\}_{k=1}^n$ . Prvek  $a_k$  nazýváme  **$k$ -tým členem** této posloupnosti.
- Nekonečnou posloupností** prvků  $A$  rozumíme každé zobrazení  $n \mapsto a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , množiny přirozených čísel  $\mathbb{N}$  do množiny  $A$ . Takovou posloupnost obvykle značíme  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , případně jen  $\{a_n\}$ . Prvek  $a_n$  nazýváme  **$n$ -tým členem** této posloupnosti.

————— Konec 3. přednášky, 7. 10. 2021 —————

## 1.5 Konečné a spočetné množiny

### Definice.

- Říkáme, že množiny  $A, B$  **mají stejnou mohutnost** a píšeme  $A \approx B$ , jestliže existuje bijekce  $A$  na  $B$ .
- Říkáme, že množina  $A$  **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny  $B$**  a píšeme  $A \preceq B$ , jestliže existuje prosté zobrazení  $A$  do  $B$ .
- Symbol  $A \prec B$  značí situaci, kdy  $A \preceq B$  a neplatí  $A \approx B$ .

**Definice.** Řekneme, že množina  $X$  je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $X$  má stejnou mohutnost jako množina  $\{1, \dots, n\}$ . Řekneme, že množina  $X$  je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina  $X$  je **spočetná**, jestliže je konečná, nebo má stejnou mohutnost jako  $\mathbb{N}$ . Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

*Poznámka.* Pro počet prvků konečné množiny  $X$  používáme často značení  $|X|$ . Dvě konečné množiny  $X, Y$  mají stejnou mohutnost právě tehdy, když  $|X| = |Y|$ .

**Věta 1.3** (Cantor–Bernstein). *Necht'  $A, B$  jsou množiny takové, že  $A \preceq B$  a zároveň  $B \preceq A$ . Pak  $A$  a  $B$  mají stejnou mohutnost.*

**Věta 1.4** (Cantor). *Necht'  $X$  je množina. Pak  $X \prec \mathcal{P}(X)$ , kde  $\mathcal{P}(X)$  je množina všech podmnožin množiny  $X$ .*

**Věta 1.5** (vlastnosti spočetných množin).

- Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
- Necht' zobrazení  $f: A \rightarrow \mathbb{N}$  je prosté. Potom je množina  $A$  spočetná.*
- Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
- Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*
- Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

**Příklad.** •  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  jsou spočetné množiny,

- $\mathbb{R}$  je nespočetná množina.

**Věta.** Výrok “každá podmnožina  $\mathbb{R}$  je buď to spočetná, nebo má mohutnost  $\mathbb{R}$ ” je ve standardní axiomatice matematiky (tj. v ZFC) nerozhodnutelný.

## 1.6 Reálná čísla

Množinu reálných čísel  $\mathbf{R}$  lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ( $\leq$ ), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

- I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
- II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení
- III. Vlastnost suprema: *Každá neprázdná shora omezená podmnožina  $\mathbf{R}$  má supremum.*

**Definice.** Necht'  $M \subset \mathbf{R}$ . Řekneme, že  $a$  je **největší prvek (maximum)** množiny  $M$ , jestliže  $a \in M$  a  $a$  je horní závorou množiny  $M$ . Analogicky definujeme **nejmenší prvek (minimum)**  $M$ . Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je  $\max M$  a  $\min M$ .

**Tvrzení.** Pro množinu  $M \subset \mathbf{R}$  platí, že  $G = \sup M$  právě tehdy, když platí:

- $G$  je horní závorou  $M$ ,
- pokud  $G' < G$ , pak existuje  $x \in M$  splňující  $G' < x$ .

————— Konec 4. přednášky, 8. 10. 2021 —————

**Věta 1.6.** Necht'  $M \subset \mathbf{R}$  je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny  $M$ .

**Věta 1.7.** Pro každé  $r \in \mathbf{R}$  existuje právě jedno číslo  $k \in \mathbf{Z}$  takové, že  $k \leq r < k + 1$ .

**Věta 1.8.** Ke každému  $x \in \mathbf{R}$  existuje  $n \in \mathbf{N}$  splňující  $x < n$ .

**Věta 1.9.** Necht'  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ . Pak existuje  $q \in \mathbf{Q}$  takové, že  $a < q < b$ .

## 1.7 Komplexní čísla

Množinu **komplexních čísel**  $\mathbf{C}$  definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic  $(a, b)$ , kde  $a, b \in \mathbf{R}$ , přičemž pro komplexní čísla  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$ ,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$ .

Necht'  $x = (a, b) \in \mathbf{C}$ . Prvek  $a$  nazýváme **reálnou částí**  $x$ , prvek  $b$  nazýváme **imaginární částí**  $x$ . **Absolutní hodnotou** komplexního čísla  $x$  rozumíme  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Dále definujeme  $0 = (0, 0)$ ,  $1 = (1, 0)$  (sic!) a  $i = (0, 1)$ . **Komplexně sdruženým číslem** k  $x$  rozumíme číslo  $\bar{x} = (a, -b)$ ; symbol  $-x$  značí číslo  $(-a, -b)$  a symbol  $1/x$  značí pro  $x \neq 0$  (jednoznačně určené) číslo splňující  $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ .



## 2 Limita posloupnosti

### 2.1 Úvod

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je

- **neklesající**, je-li  $a_n \leq a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,
- **rostoucí**, je-li  $a_n < a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,
- **nerostoucí**, je-li  $a_n \geq a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,
- **klesající**, je-li  $a_n > a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbf{N}$ .

Posloupnost  $\{a_n\}$  je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost  $\{a_n\}$  je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

### 2.2 Konvergence posloupnosti

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má **limitu** rovnou reálnému číslu  $A$ , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

**Věta 2.1** (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

**Definice.** Má-li posloupnost  $\{a_n\}$  limitu rovnou číslu  $A \in \mathbf{R}$ , pak píšeme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  nebo jenom  $\lim a_n = A$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je **konvergentní**, pokud existuje  $A \in \mathbf{R}$  takové, že  $\lim a_n = A$ . Jinak je **divergentní**.

————— Konec 5. přednášky, 14. 10. 2021 —————

**Věta 2.2.** *Necht'  $K \in \mathbf{R}, K > 0, A \in \mathbf{R}$ . Jestliže posloupnost  $\{a_n\}$  splňuje podmínku*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon.$$

*potom  $\lim a_n = A$ .*

**Věta 2.3.** *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

**Definice.** Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel. Jestliže  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  se nazývá **vybranou posloupností** z  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Věta 2.4.** Necht'  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  je vybraná posloupnost z posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Jestliže platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ , pak také  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$ .

**Věta 2.5** (limita a aritmetické operace). Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$  a  $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$ . Potom platí:

- (a)  $\lim (a_n + b_n) = A + B$ ,
- (b)  $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ ,
- (c) je-li  $B \neq 0$  a  $b_n \neq 0$  pro všechna  $n \in \mathbf{N}$ , je  $\lim (a_n/b_n) = A/B$ .

————— Konec 6. přednášky, 15. 10. 2021 —————

**Věta 2.6.** Necht'  $\lim a_n = 0$  a posloupnost  $\{b_n\}$  je omezená. Potom  $\lim a_n b_n = 0$ .

**Věta 2.7.** Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ . Potom  $\lim |a_n| = |A|$ .

**Věta 2.8** (limita a uspořádání). Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$  a  $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$ .

- (a) Necht' existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$  takové, že pro každé přirozené  $n \geq n_0$  je  $a_n \geq b_n$ . Potom  $A \geq B$ .
- (b) Necht'  $A < B$ . Potom existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$  takové, že pro každé přirozené  $n \geq n_0$  je  $a_n < b_n$ .

**Věta 2.9** (o dvou strážnících). Necht'  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  jsou dvě konvergentní posloupnosti a  $\{c_n\}$  je posloupnost splňující:

- (a)  $\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ ,
- (b)  $\lim a_n = \lim b_n$ .

Potom existuje  $\lim c_n$  a platí  $\lim c_n = \lim a_n$ .

### 2.3 Nevlastní limita posloupnosti

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu  $\infty$ , jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu  $-\infty$ , jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq K.$$

**Věta 2.10** (jednoznačnost limity podruhé). Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v  $\mathbf{R}^*$ .

**Věta 2.11** (aritmetika limit podruhé). Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$  a  $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^*$ . Potom platí:

- (i)  $\lim (a_n + b_n) = A + B$ , pokud je pravá strana definována,
- (ii)  $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ , pokud je pravá strana definována,
- (iii)  $\lim a_n/b_n = A/B$ , pokud je pravá strana definována.

————— Konec 7. přednášky, 21. 10. 2021 —————

**Věta 2.12.** *Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ ,  $A > 0$ ,  $\lim b_n = 0$  a existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$ , že pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_0$ , platí  $b_n > 0$ . Pak  $\lim a_n/b_n = \infty$ .*

## 2.4 Hlubší věty o limitě posloupnosti

**Věta 2.13.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

**Věta 2.14** (Cantorův princip vložených intervalů). *Necht'  $\{I_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N} : I_{n+1} \subset I_n$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{délka } I_n = 0$ .

*Potom  $\bigcap_{n=1}^\infty I_n$  je jednobodová množina.*

**Věta 2.15** (Bolzanova-Weierstrassova věta). *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

————— Konec 8. přednášky, 22. 10. 2021 —————

**Definice.** Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti  $\{a_n\}$ . Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti  $\{a_n\}$  předpisem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená.} \end{cases}$$

**Věta 2.16** (limita, limes superior a limes inferior). *Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost reálných čísel a  $A \in \mathbf{R}^*$ . Potom  $\lim a_n = A$  právě tehdy, když  $\limsup a_n = \liminf a_n = A$ .*

**Věta 2.17.** Necht'  $\{a_n\}, \{b_n\}$  jsou posloupnosti reálných čísel,  $n_0 \in \mathbf{N}$  a platí  $a_n \leq b_n$  pro každé  $n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$ . Pak platí

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \quad \text{a} \quad \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

**Definice.** Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost reálných čísel a  $A \in \mathbf{R}^*$ . Řekneme, že  $A$  je **hromadná hodnota** posloupnosti  $\{a_n\}$ , jestliže existuje vybraná posloupnost  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  taková, že platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$ . Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti  $\{a_n\}$  značíme  $H(\{a_n\})$ .

**Věta 2.18** (limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty). Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost reálných čísel. Potom  $\limsup a_n$  a  $\liminf a_n$  jsou hromadnými hodnotami posloupnosti  $\{a_n\}$  a pro každou hromadnou hodnotu  $A$  posloupnosti  $\{a_n\}$  platí  $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$ .

————— Konec 9. přednášky, 29. 10. 2021 —————

**Důsledek 2.19.** Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost reálných čísel a necht'  $A \in \mathbf{R}^*$ . Je-li  $\lim a_n = A$ , pak  $H(\{a_n\}) = \{A\}$ .

**Definice.** Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že  $\{a_n\}$  splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \\ \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

**Věta 2.20.** Posloupnost  $\{a_n\}$  má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

## 3 Limita a spojitost funkce

### 3.1 Základní pojmy

**Definice.** Funkce  $f$  jedné reálné proměnné (dále jen **funkce**) je zobrazení  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ , kde  $M$  je podmnožinou množiny reálných čísel.

**Definice.** Funkce  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  je **rostoucí** na intervalu  $J$ , jestliže pro každou dvojici  $x_1, x_2 \in J, x_1 < x_2$ , platí nerovnost  $f(x_1) < f(x_2)$ . Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu  $J$ .

**Definice.** **Monotónní funkcí** (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu  $J$  rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na  $J$ .

**Definice.** Necht'  $f$  je funkce a  $M \subset \mathcal{D}(f)$ . Řekneme, že funkce  $f$  je

- **lichá**, jestliže pro každé  $x \in \mathcal{D}(f)$  platí  $-x \in \mathcal{D}(f)$  a  $f(-x) = -f(x)$ ,

- **sudá**, jestliže pro každé  $x \in \mathcal{D}(f)$  platí  $-x \in \mathcal{D}(f)$  a  $f(-x) = f(x)$ ,
- **periodická s periodou**  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ , jestliže pro každé  $x \in \mathcal{D}(f)$  platí  $x + a \in \mathcal{D}(f)$ ,  $x - a \in \mathcal{D}(f)$  a  $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$ ,
- **shora omezená** na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbf{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $f(x) \leq K$ ,
- **zdola omezená** na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbf{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $f(x) \geq K$ ,
- **omezená** na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbf{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $|f(x)| \leq K$ ,
- **konstantní** na  $M$ , jestliže pro všechna  $x, y \in M$  platí  $f(x) = f(y)$ .

### 3.2 Limita funkce

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbf{R}$  a  $\varepsilon > 0$ . Potom definujeme

- **okolí bodu**  $c$  jako  $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ,
- **prstencové okolí bodu**  $c$  jako  $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$ ,

Okolí a prstencové okolí bodu  $\infty$  (resp.  $-\infty$ ) definujeme takto:

$$P(\infty, \varepsilon) = B(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty),$$

$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

**Definice.** Řekneme, že číslo  $A \in \mathbf{R}^*$  je **limitou funkce**  $f$  v bodě  $c \in \mathbf{R}^*$ , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ .

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbf{R}$  a  $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ . Potom definujeme

- **pravé okolí bodu**  $c$  jako  $B_+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$ ,
- **levé okolí bodu**  $c$  jako  $B_-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$ ,
- **pravé prstencové okolí bodu**  $c$  jako  $P_+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$ ,
- **levé prstencové okolí bodu**  $c$  jako  $P_-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$ .

**Definice.** Dále definujeme

- **levé okolí bodu**  $\infty$  jako  $B_-(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$ ,
- **pravé okolí bodu**  $-\infty$  jako  $B_+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$ ,
- **levé prstencové okolí bodu**  $\infty$  jako  $P_-(\infty, \varepsilon) = B_-(\infty, \varepsilon)$ ,
- **pravé prstencové okolí bodu**  $-\infty$  jako  $P_+(-\infty, \varepsilon) = B_+(-\infty, \varepsilon)$ .

**Definice.** Necht'  $A \in \mathbf{R}^*$ ,  $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ . Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $c$  **limitu zprava** rovnou  $A$  (značíme  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A$ ), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P_+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě  $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ . Pro limitu zleva funkce  $f$  v bodě  $c$  užíváme symbol  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ .

————— Konec 10. přednášky, 4. 11. 2021 —————

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f$  je **spojitá v bodě**  $c \in \mathbf{R}$ , jestliže  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbf{R}$ . Řekneme, že funkce  $f$  je v bodě  $c$  **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ ).

**Definice.** Necht'  $J \subset \mathbf{R}$  je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  je **spojitá na intervalu**  $J$ , jestliže platí:

- $f$  je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu  $J$ , pokud tento bod patří do  $J$ ,
- $f$  je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu  $J$ , pokud tento bod patří do  $J$ ,
- $f$  je spojitá v každém vnitřním bodě  $J$ .

### 3.3 Věty o limitách

**Věta 3.1.** Funkce  $f$  má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

**Věta 3.2.** Necht' funkce  $f$  má vlastní limitu v bodě  $c \in \mathbf{R}^*$ . Pak existuje  $\delta > 0$  takové, že  $f$  je na  $P(c, \delta)$  omezená.

**Věta 3.3** (aritmetika limit). Necht'  $c \in \mathbf{R}^*$ . Necht'  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$  a  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$ . Potom platí:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$ , pokud je výraz  $A + B$  definován,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$ , pokud je výraz  $AB$  definován,
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = A/B$ , pokud je výraz  $A/B$  definován.

**Věta 3.4.** *Necht'  $c \in \mathbf{R}^*$ . Necht'  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$  a  $A > 0$ . Jestliže existuje  $\eta > 0$  takové, že funkce  $g$  je kladná na  $P(c, \eta)$ , pak  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = \infty$ .*

**Věta 3.5** (limita funkce a uspořádání). *Mějme  $c \in \mathbf{R}^*$ .*

(i) *Necht'*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

*Pak existuje prstencové okolí  $P(c, \delta)$  takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) > g(x).$$

(ii) *Necht' existuje prstencové okolí  $P(c, \delta)$  takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \leq g(x).$$

*Necht' existují  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ . Potom platí*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

(iii) *(o dvou strážnících) Necht' na nějakém prstencovém okolí  $P(c, \delta)$  platí*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

*Necht'  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ . Potom existuje rovněž  $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$  a všechny tři limity jsou si rovny.*

**Věta 3.6** (limita složené funkce). *Necht'  $c, D, A \in \mathbf{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ ,  $\lim_{y \rightarrow D} f(y) = A$  a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P)  $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D$ ,

(S)  *$f$  je spojitá v  $D$ .*

*Potom  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$ .*

**Věta 3.7** (Heine). *Necht'  $c \in \mathbf{R}^*$ ,  $A \in \mathbf{R}^*$  a funkce  $f$  je definována na prstencovém okolí bodu  $c$ . Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.*

(i) *Platí  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ .*

(ii) *Pro každou posloupnost  $\{x_n\}$  splňující  $x_n \in \mathcal{D}(f)$ ,  $x_n \neq c$  pro všechna  $n \in \mathbf{N}$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ , platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .*

**Věta 3.8** (limita monotónní funkce). *Necht'  $a, b \in \mathbf{R}^*$ ,  $a < b$ , a funkce  $f$  je monotónní na intervalu  $(a, b)$ . Potom existují  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ , přičemž platí:*

(a) *Je-li  $f$  na  $(a, b)$  neklesající, pak*

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup f((a, b)).$$

(b) *Je-li  $f$  na  $(a, b)$  nerostoucí, pak*

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

### 3.4 Funkce spojité na intervalu

**Věta 3.9** (Bolzano). *Necht' funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $[a, b]$  a předpokládejme, že  $f(a) < f(b)$ . Potom pro každé  $C \in (f(a), f(b))$  existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že platí  $f(\xi) = C$ .*

**Lemma 3.10.** *Necht'  $M \subset \mathbf{R}$  a platí*

$$\forall x, y \in M \forall z \in \mathbf{R} : x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

*Pak  $M$  je interval.*

**Věta 3.11** (zobrazení intervalu spojitou funkcí). *Necht' funkce  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá na intervalu  $J$ . Potom je  $f(J)$  interval.*

**Věta 3.12.** *Necht'  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $[a, b]$ . Potom je  $f$  na  $[a, b]$  omezená.*

**Definice.** *Necht'  $M \subset \mathbf{R}$ ,  $x \in M$  a funkce  $f$  je definována alespoň na  $M$  (tj.  $M \subset \mathcal{D}(f)$ ). Řekneme, že  $f$  nabývá v bodě  $x$  **maxima** (resp. **minima**) na  $M$ , jestliže platí*

$$\forall y \in M : f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M : f(y) \geq f(x)).$$

Bod  $x$  pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce  $f$  na množině  $M$ . Symbol  $\max_M f$  (resp.  $\min_M f$ ) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce  $f$  na množině  $M$  nabývá (pokud taková hodnota existuje).

**Definice.** *Necht'  $M \subset \mathbf{R}$ ,  $x \in M$  a funkce  $f$  je definována alespoň na  $M$  (tj.  $M \subset \mathcal{D}(f)$ ). Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x$*

- **lokální maximum vzhledem k  $M$** , jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $y \in P(x, \delta) \cap M$ :  $f(y) \leq f(x)$ ,
- **lokální minimum vzhledem k  $M$** , jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $y \in P(x, \delta) \cap M$ :  $f(y) \geq f(x)$ ,

**Věta 3.13.** *Necht'  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ , a  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $[a, b]$ . Potom  $f$  nabývá na  $[a, b]$  svého maxima a svého minima.*

————— Konec 13. přednášky, 12. 11. 2021 —————

**Věta 3.14** (o inverzní funkci). *Necht'  $f$  spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu  $J$ . Potom funkce  $f^{-1}$  je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu  $f(J)$ .*



## 4 Elementární funkce

**Věta 4.1** (zavedení logaritmu). *Existuje právě jedna funkce (značíme ji  $\log$  a nazýváme ji **přirozeným logaritmem**), která má tyto vlastnosti:*

(L1)  $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$  a na tomto intervalu je  $\log$  rostoucí,

(L2)  $\forall x, y \in (0, \infty): \log xy = \log x + \log y$ ,

(L3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$ .

**Definice. Exponenciální funkcí** budeme rozumět funkci inverzní k funkci  $\log$ . Budeme ji značit symbolem  $\exp$ .

**Definice.** Necht'  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ . **Obecnou mocninu**  $a^b$  definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

**Věta 4.2** (zavedení funkcí sinus a kosinus). *Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit  $\pi$ ) a právě jedna dvojice funkcí **sinus** ( $\sin$ ) a **kosinus** ( $\cos$ ), které mají následující vlastnosti:*

(G1)  $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbf{R}$ ,

(G2) pro všechna  $x, y \in \mathbf{R}$  platí

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \sin(-x) &= -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,\end{aligned}$$

(G3)  $\sin$  je rostoucí na  $[0, \frac{1}{2}\pi]$ ,  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$ ,

(G4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

————— Konec 14. přednášky, 18. 11. 2021 —————

**Definice.** Funkci **tangens** značíme  $\operatorname{tg}$  a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné  $x$ , pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D(\operatorname{tg}) = \mathbf{R} \setminus \{(2k + 1)\pi/2; k \in \mathbf{Z}\}.$$

Symbolem  $\operatorname{cotg}$  budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině  $D(\operatorname{cotg}) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$  předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

**Definice.** Cyklometrickými funkcemi budeme rozumět funkce **arkussinus** ( $\arcsin$ ), **arkuskosinus** ( $\arccos$ ), **arkustangens** ( $\arctg$ ), **arkuskotangens** ( $\operatorname{arccotg}$ ), které jsou definovány takto

$$\begin{aligned}\arcsin &= (\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}, & \arccos &= (\cos |_{[0, \pi]})^{-1}, \\ \arctg &= (\operatorname{tg} |_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}, & \operatorname{arccotg} &= (\operatorname{cotg} |_{(0, \pi)})^{-1}.\end{aligned}$$

**Věta 4.3.** Funkce  $\log$ ,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$ ,  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctg$  a  $\operatorname{arccotg}$  jsou spojité na svých definičních oborech.

## 5 Derivace

### 5.1 Definice a základní vztahy

**Definice.** Necht'  $f$  je reálná funkce a  $a \in \mathbf{R}$ . Pak

- **derivací funkce  $f$  v bodě  $a$**  budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

analogicky definujeme **derivaci funkce  $f$  v bodě  $a$  zleva**.

**Věta 5.1.** Necht' funkce  $f$  má v bodě  $a \in \mathbf{R}$  vlastní derivaci. Potom je  $f$  v bodě  $a$  spojitá.

**Věta 5.2** (aritmetika derivací). Necht'  $a \in \mathbf{R}$ ,  $f'(a) \in \mathbf{R}^*$  a  $g'(a) \in \mathbf{R}^*$ .

- (a) Pak platí

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

- (b) Je-li alespoň jedna z funkcí  $f$ ,  $g$  spojitá v bodě  $a$ , pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

- (c) Je-li funkce  $g$  spojitá v bodě  $a$  a navíc  $g(a) \neq 0$ , pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

**Věta 5.3** (derivace složené funkce). *Nechť funkce  $g$  je spojitá v bodě  $a \in \mathbf{R}$  a má v tomto bodě derivaci. Nechť funkce  $f$  má derivaci v bodě  $g(a)$ . Pak*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

*je-li výraz na pravé straně definován.*

**Věta 5.4** (derivace inverzní funkce). *Nechť  $I$  je nedegenerovaný interval a nechť  $a$  je vnitřním bodem  $I$ . Nechť  $f$  je spojitá a ryze monotónní funkce na  $I$ . Označme  $b = f(a)$ . Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Má-li  $f$  v bodě  $a$  nenulovou derivaci, pak*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) *Je-li  $f'(a) = 0$  a  $f$  je rostoucí na  $I$ , pak  $(f^{-1})'(b) = \infty$ .*

(c) *Je-li  $f'(a) = 0$  a  $f$  je klesající na  $I$ , pak  $(f^{-1})'(b) = -\infty$ .*

**Věta 5.5** (nutná podmínka lokálního extrému). *Nechť  $f$  je reálná funkce. Jestliže  $a$  je bodem lokálního extrému funkce  $f$ , potom buď  $f'(a)$  neexistuje nebo  $f'(a) = 0$ .*

## 5.2 Věty o střední hodnotě

**Věta 5.6** (Rolle). *Nechť funkce  $f$  má následující vlastnosti:*

- (i) *je spojitá na intervalu  $[a, b]$ ,*
- (ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu  $(a, b)$ ,*
- (iii) *platí, že  $f(a) = f(b)$ .*

*Potom existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že platí  $f'(\xi) = 0$ .*

**Věta 5.7** (Lagrange). *Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $[a, b]$  a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu  $(a, b)$ . Potom existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Věta 5.8 (Cauchy).** *Necht' funkce  $f, g$  jsou spojité na intervalu  $[a, b]$  a takové, že  $f$  má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu  $(a, b)$  a  $g$  má v každém bodě intervalu  $(a, b)$  vlastní a nenulovou derivaci. Potom  $g(a) \neq g(b)$  a existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že platí*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Věta 5.9** (vztah derivace a monotonie). *Necht'  $J \subset \mathbf{R}$  je nedegenerovaný interval. Necht'  $f$  je spojitá na  $J$  a v každém vnitřním bodě  $J$  (množinu vnitřních bodů intervalu  $J$  označme jako  $\text{int } J$ ) má derivaci.*

- (i) *Je-li  $f'(x) > 0$  pro všechna  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je rostoucí na  $J$ .*
- (ii) *Je-li  $f'(x) < 0$  pro všechna  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je klesající na  $J$ .*
- (iii) *Je-li  $f'(x) \geq 0$  pro všechna  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je neklesající na  $J$ .*
- (iv) *Je-li  $f'(x) \leq 0$  pro všechna  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je nerostoucí na  $J$ .*

————— Konec 17. přednášky, 26. 11. 2021 —————

**Věta 5.10** (l'Hospitalovo pravidlo). (i) *Necht'  $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ ,  $f$  a  $g$  mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu  $a$  vlastní derivaci a existuje  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Necht'  $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = \infty$ ,  $f$  a  $g$  mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu  $a$  vlastní derivaci a existuje  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Věta 5.11.** *Necht'  $f$  je spojitá zprava v bodě  $a \in \mathbf{R}$  a existuje  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ . Potom existuje  $f'_+(a)$  a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

**Definice.** *Necht'  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a \in \mathbf{R}$  a  $f$  má vlastní  $n$ -tou derivaci na okolí bodu  $a$ . Pak  $(n + 1)$ -ní derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  budeme rozumět*

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

### 5.3 Konvexní a konkávní funkce

**Definice.** Necht'  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $a \in \mathbf{R}$ . Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod  $[x, f(x)]$  **leží pod tečnou**  $T_a$ , jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod  $[x, f(x)]$  **leží nad tečnou**  $T_a$ .

**Definice.** Necht'  $f'(a) \in \mathbf{R}$ . Řekneme, že  $a$  je **inflexním bodem** funkce  $f$ , jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že platí

(i)  $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$  leží pod tečnou  $T_a$ ,

(ii)  $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$  leží nad tečnou  $T_a$

nebo

(i)  $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$  leží nad tečnou  $T_a$ ,

(ii)  $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$  leží pod tečnou  $T_a$ .

————— Konec 18. přednášky, 2. 12. 2021 —————

**Věta 5.12** (nutná podmínka pro inflexi). *Necht'  $a \in \mathbf{R}$  je inflexní bod funkce  $f$ . Potom  $f''(a)$  neexistuje nebo je rovna nule.*

**Věta 5.13** (postačující podmínka pro inflexi). *Necht' funkce  $f$  má spojitou první derivaci na intervalu  $(a, b)$  a  $z \in (a, b)$ . Necht' platí:*

- $\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0$ ,
- $\forall x \in (z, b) : f''(x) < 0$ .

*Potom  $z$  je inflexním bodem funkce  $f$ .*

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  je **konvexní na intervalu**  $I$ , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \forall \lambda \in [0, 1]: f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Řekneme, že funkce  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  je **ryze konvexní na intervalu**  $I$ , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

**Lemma 5.14.** Funkce  $f$  je na intervalu  $I$  konvexní, právě když

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

**Věta 5.15.** Necht'  $f$  je konvexní na intervalu  $J$  a necht'  $a \in \text{int } J$ . Pak existují  $f'_+(a) \in \mathbf{R}$ ,  $f'_-(a) \in \mathbf{R}$ .

**Věta 5.16.** Necht'  $f$  je konvexní na otevřeném intervalu  $J$ . Pak  $f$  je spojitá na  $J$ .

**Věta 5.17.** Necht'  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  spojitá a  $f'$  je spojitá na  $\text{int } J$ .

- (i) Jestliže  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je ryze konvexní na  $J$ .
- (ii) Jestliže  $f''(x) < 0$  pro každé  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je ryze konkávní na  $J$ .
- (iii) Jestliže  $f''(x) \geq 0$  pro každé  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je konvexní na  $J$ .
- (iv) Jestliže  $f''(x) \leq 0$  pro každé  $x \in \text{int } J$ , pak  $f$  je konkávní na  $J$ .

————— Konec 19. přednášky, 3. 12. 2021 —————

## 5.4 Průběh funkce

**Věta 5.18.** Necht'  $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) > 0$  (resp.  $f''(a) < 0$ ). Potom  $f$  má v  $a$  lokální minimum (resp. lokální maximum).

**Definice.** Řekneme, že funkce  $x \mapsto ax + b$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , je **asymptotou funkce**  $f$  v  $\infty$  (resp. v  $-\infty$ ), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

**Věta 5.19.** Funkce  $f$  má v  $\infty$  asymptotu  $x \mapsto ax + b$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , právě když

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

### Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicitu.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrém. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce  $f$  je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.

————— Konec 20. přednášky, 9. 12. 2021 —————

## 6 Taylorův polynom

### 6.1 Základní vlastnosti

**Definice.** Necht'  $f$  je funkce,  $a \in \mathbf{R}$  a  $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ . Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu  $n$  funkce  $f$  v bodě  $a$** .

**Lemma 6.1.** Necht'  $Q$  je polynom,  $\text{st } Q \leq n$  a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$ . Pak  $Q$  je nulový polynom.

**Věta 6.2** (Peanův tvar zbytku). Necht'  $a \in \mathbf{R}$ ,  $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$  a  $P$  je polynom stupně nejvýše  $n$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

**Věta 6.3.** Necht'  $a, x \in \mathbf{R}$ ,  $a < x$ . Předpokládejme, že

- $f$  je funkce, která má v každém bodě intervalu  $[a, x]$  vlastní  $(n+1)$ -ní derivaci,
- $\varphi$  je spojitá funkce na  $[a, x]$ , která má v každém bodě intervalu  $(a, x)$  vlastní nenulovou derivaci.

Pak existuje  $\xi \in (a, x)$  takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

————— Konec 21. přednášky, 10. 12. 2021 —————

**Věta 6.4** (Lagrangeův tvar zbytku). Necht'  $a, x, f$  jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje  $\xi \in (a, x)$  takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

**Věta 6.5** (Cauchyův tvar zbytku). Necht'  $a, x, f$  jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje  $\xi \in (a, x)$  takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

### 6.2 Symbol malé $o$

**Definice.** Necht'  $f$  a  $g$  jsou funkce,  $a \in \mathbf{R}^*$ . Řekneme, že funkce  $f$  je v bodě  $a$  **malé  $o$  od  $g$**  (píšeme  $f(x) = o(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$ ), jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

**Věta 6.6.** Necht'  $a \in \mathbf{R}^*$ .

(i) Jestliže

$$f_1(x) = o(g(x)), x \rightarrow a, \quad a \quad f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a,$$

potom

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a.$$

(ii) Jestliže

$$f_1(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a, \quad a \quad f_2(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a,$$

potom

$$f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)), x \rightarrow a.$$

(iii) Jestliže

$$f(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a, \quad a \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbf{R},$$

potom

$$f(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a.$$

**Věta 6.7.** Necht'  $a, b \in \mathbf{R}^*$ ,  $f(y) = o(g(y))$ ,  $y \rightarrow b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$  a existuje  $\delta \in \mathbf{R}$ ,  $\delta > 0$ , takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Potom  $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$ ,  $x \rightarrow a$ .

————— Konec 22. přednášky, 16. 12. 2020 —————



## Seznam definic a vět

Látka bude zkoušena v rozsahu odpřednesené látky. Níže uvedené seznamy slouží *pouze* k snadnější formulaci otázek v úvodu zkoušky. Na zkoušku je tedy třeba znát i formulace a důkazy tvrzení z přednášek, které se v seznamech nevyskytují.

### Klíčové pojmy

Neznalost některého z klíčových pojmů bude mít za následek ukončení zkoušky se známkou „neprospěl(a)“.

- supremum a infimum
- limita posloupnosti
- okolí bodu, prstencové okolí bodu
- limita funkce
- limita funkce zprava (resp. zleva)
- spojitost funkce v bodě
- spojitost funkce v bodě zprava (resp. zleva)
- maximum a minimum funkce na množině
- derivace funkce v bodě
- derivace funkce v bodě zprava (resp. zleva)
- konvexní a konkávní funkce
- Taylorův polynom

### Definice

- negace výroku
- konjunkce výroků
- disjunkce výroků
- implikace výroků
- ekvivalence výroků
- kartézský součin množin
- binární relace a její vlastnosti (reflexivita, symetrie, tranzitivita, antisymetrie, slabá antisymetrie)
- uspořádání, ostré uspořádání, lineární uspořádání
- horní a dolní závora
- shora omezená množina, zdola omezená množina, omezená množina
- supremum a infimum
- zobrazení
- definiční obor
- obor hodnot
- obraz množiny
- vzor množiny
- injektivní zobrazení

- surjektivní zobrazení
- bijektivní zobrazení
- restrikce zobrazení
- složené zobrazení
- inverzní relace a zobrazení
- konečná a nekonečná posloupnost
- mohutnost množin
- konečná a nekonečná množina
- spočetná množina
- potenční množina
- množina reálných čísel
- maximum množiny
- minimum množiny
- komplexní čísla
  
- posloupnost reálných čísel
- shora omezená posloupnost, zdola omezená posloupnost, omezená posloupnost
- monotonie posloupnosti a její typy
- vlastní limita posloupnosti
- konvergentní posloupnost
- vybraná posloupnost
- rozšířená reálná osa
- nevlastní limita posloupnosti
- limes inferior a limes superior
- hromadná hodnota posloupnosti
- Bolzanova-Cauchyova podmínka
  
- funkce jedné reálné proměnné
- monotonie funkce a její typy
- ryze monotónní funkce
- symetrie funkce
- shora omezená funkce, zdola omezená funkce, omezená funkce
- konstantní funkce
- okolí bodu, prstencové okolí bodu a jeho typy
- limita funkce v bodě
- limita funkce v bodě zprava (resp. zleva)
- funkce spojitá v bodě
- funkce spojitá v bodě zleva (resp. zprava)
- funkce spojitá na intervalu
- maximum a minimum funkce na množině
- lokální maximum a minimum funkce vzhledem k množině
  
- exponenciální funkce
- obecná mocnina
- goniometrické funkce

- cyklometrické funkce
- derivace funkce v bodě
- derivace funkce v bodě zleva (resp. zprava)
- $(n + 1)$ -ní derivace funkce v bodě
- inflexní bod
- (ryze) konvexní a konkávní funkce na intervalu
- asymptota funkce
- Taylorův polynom
- symbol malé  $o$

## Věty

B ..... bez důkazu, jinak jsou všechna tvrzení vyžadována i s důkazem

T ..... věta je zařazena do kategorie „těžké“

- de Morganova pravidla (Věta 1.1)
- vztah suprema a infima (Věta 1.2)

T Cantorova-Bernsteinova věta (Věta 1.3)

T Cantorova věta (Věta 1.4)

B vlastnosti spočetných množin (Věta 1.5)

- existence infima (Věta 1.6)

T celá část čísla (Věta 1.7)

- neomezenost množiny přirozených čísel (Věta 1.8)
- hustota  $\mathbb{Q}$  (Věta 1.9)

- jednoznačnost limity posloupnosti (Věta 2.1, Věta 2.10)
- omezenost konvergentní posloupnosti (Věta 2.3)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 2.4)

T aritmetika limit posloupností (Věta 2.5, Věta 2.11)

- limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou (Věta 2.6)
- limita a absolutní hodnota (Věta 2.7)
- limita posloupnosti a uspořádání (Věta 2.8)
- dva strážníci pro posloupnosti (Věta 2.9)
- limita posloupnosti typu „ $A/0$ “ (Věta 2.12)
- limita monotónní posloupnosti (Věta 2.13)

T Cantorův princip vložených intervalů (Věta 2.14)

T Bolzanova-Weierstrassova věta (Věta 2.15)

- vztah  $\lim$ ,  $\lim \sup$  a  $\lim \inf$  (Věta 2.16)
- $\lim \sup$ ,  $\lim \inf$  a uspořádání (Věta 2.17)

T vztah  $\lim \sup$  a množiny hromadných hodnot (Věta 2.18)

T limita posloupnosti a Bolzanova-Cauchyova podmínka (Věta 2.20)

- jednoznačnost limity funkce (Věta 3.1)
- limita a omezenost funkce (Věta 3.2)
- T aritmetika limit funkcí (Věta 3.3)
- limita funkce „ $A/0$ “ (Věta 3.4)
- limita funkce a uspořádání (Věta 3.5)
- T limita složené funkce (Věta 3.6)
- T Heineova věta (Věta 3.7)
- limita monotónní funkce (Věta 3.8)
- T Bolzanova věta (Věta 3.9)
- zobrazení intervalu spojitou funkcí (Věta 3.11)
- T omezenost a spojitost na intervalu (Věta 3.12)
- T spojitost funkce a nabývání extrémů (Věta 3.13)
- T o inverzní funkci (Věta 3.14)
  
- T zavedení logaritmu a jeho vlastnosti (Věta 4.1) – *důkazy budou požadovány pro odvození vlastností, ne pro větu samotnou*
- T zavedení funkcí sinus a kosinus (Věta 4.2) – *důkazy budou požadovány pro odvození vlastností, ne pro větu samotnou*
- spojitost elementárních funkcí (Věta 4.3)
  
- vztah derivace a spojitosti (Věta 5.1)
- T aritmetika derivací (Věta 5.2)
- T derivace složené funkce (Věta 5.3)
- T derivace inverzní funkce (Věta 5.4)
- nutná podmínka lokálního extrému (Věta 5.5)
- Rolleova věta (Věta 5.6)
- T Lagrangeova věta (Věta 5.7)
- T Cauchyova věta (Věta 5.8)
- vztah derivace a monotonie (Věta 5.9)
- T l'Hospitalovo pravidlo (Věta 5.10)
- derivace a limita derivace (Věta 5.11)
- T nutná podmínka pro inflexi (Věta 5.12)
- T postačující podmínka pro inflexní bod (Věta 5.13)
- T konvexita a jednostranné derivace (Věta 5.15)
- konvexita a spojitost (Věta 5.16)
- T druhá derivace a konvexita (Věta 5.17)
- T postačující podmínka pro lokální minimum (Věta 5.18)
- existence asymptoty (Věta 5.19)
  
- T Peanův tvar zbytku (Věta 6.2)
- T abstraktní tvar zbytku Taylorova polynomu (Věta 6.3)
- T Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.4)
- T Cauchyův tvar zbytku (Věta 6.5)
- aritmetika malého 0 (Věta 6.6)
- malé 0 pro složenou funkci (Věta 6.7)