Lineární algebra I (pro fyziky)

Hodnost matice

Dalibor Šmíd

MFF UK

Mějme matici $A = (\mathbf{a}_1 | \dots \mathbf{a}_n) \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Máme pro ni definovány čtyři vektorové podprostory v $\mathbb{F}^m$ a $\mathbb{F}^n$:

- jádro $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{o}\} \leq \mathbb{F}^n$
- obraz (či též *sloupcový prostor*) $\operatorname{Im} A = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle \leq \mathbb{F}^m$
- *řádkový prostor* $\operatorname{Im} A^T \leq \mathbb{F}^n$, čili lineární obal řádků A
- *jádro transponované matice* $\operatorname{Ker} A^T \leq \mathbb{F}^m$.

Elementární řádkovou úpravu matice lze realizovat násobením maticí úpravy R zleva: $A \sim RA$. Matice úpravy je vždy regulární.

Podobně *elementární sloupcová úprava* (ESÚ) odpovídá násobení regulární maticí Q zprava: $A \sim AQ$.

Bude nás zajímat, jak se při těchto úpravách mění zmíněné čtyři vektorové podprostory.

Tvrzení

Nechť $A = (\mathbf{a}_1 | \dots \mathbf{a}_n) \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $R \in \mathbb{F}^{m \times m}$ *regulární. Pak*

1. $\operatorname{Ker}(RA) = \operatorname{Ker} A$
2. $\operatorname{Im}(RA)^T = \operatorname{Im} A^T$

Důkaz.

Pokud $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, pak $RA\mathbf{x} = R\mathbf{o} = \mathbf{o}$, tedy $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} RA$. Každý řádek matice RA vznikne jako LK řádků matice A, tedy $\operatorname{Im}(RA)^T \subset \operatorname{Im} A^T$. Druhá inkluze plyne v obou případech z $A = R^{-1}(RA)$. $\square$

Tvrzení je vlastně obecnější verzí našich dřívějších pozorování, že EŘÚ nemění množinu řešení homogenní soustavy rovnic a lineární obal řádků matice. Zadarmo máme i obdobné tvrzení týkající se ESÚ: $\operatorname{Ker}(AQ)^T = \operatorname{Ker} A^T$, $\operatorname{Im} AQ = \operatorname{Im} A$ pro $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ regulární.

Zkuste si najít protipříklady, že mezi $\operatorname{Ker}(RA)^T$ a $\operatorname{Ker}(A)$, případně mezi $\operatorname{Im}(RA)$ a $\operatorname{Im} A$ rovnost být nemusí ♣.

Situace ale není zcela beznadějná! Sloupcové prostory se rovnat nemusejí, ale musejí se rovnat jejich dimenze.

Lemma

Nechť $A = (\mathbf{a}_1 | \ldots \mathbf{a}_n) \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $R \in \mathbb{F}^{m \times m}$ *regulární. Označme* $RA =: A' = (\mathbf{a}'_1 | \ldots \mathbf{a}'_n)$. *Je-li* $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{F}^n$, *pak* $\sum_{i=1}^n s_i \mathbf{a}_i = \mathbf{o}$, *právě když* $\sum_{i=1}^n s_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{o}$.

Důkaz.

Stačí si uvědomit, že $\mathbf{a}'_i = R\mathbf{a}_i$ a $\mathbf{a}_i = R^{-1}\mathbf{a}'_i$. $\square$

Důsledek

Nechť A, A' *jsou dvě matice,* $A \sim A'$. *Pak* $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A'$.

Důkaz.

Z lemmatu plyne, že nějaká podposloupnost sloupců matice A je LN, právě když je LN odpovídající podposloupnost sloupců A'. Maximální takové LN podposloupnosti jsou bázemi $\operatorname{Im} A$, resp. $\operatorname{Im} A'$. $\square$

VĚTA

Pro každou matici $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ *platí* $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T$.

DŮKAZ.

Matici A lze převést posloupností EŘÚ na redukovaný odstupňovaný tvar A'. Posloupnost všech nenulových řádků A' je lineárně nezávislá, a je tedy bází $\operatorname{Im} A'^T$. Množina všech pivotních sloupců A' je lineárně nezávislá a nepivotní sloupce jsou LK pivotních. Tedy posloupnost všech pivotních sloupců je bází $\operatorname{Im} A'$. Pivotních sloupců i nenulových řádků A' je stejně, tedy $\dim \operatorname{Im} A' = \dim \operatorname{Im} A'^T$. Protože řádkové úpravy $A \sim A'$ zachovávají řádkový prostor, platí $\operatorname{Im} A^T = \operatorname{Im} A'^T$. Z předchozího důsledku máme $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A'$, celkově tedy $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T$. $\square$

Na tvrzení je zajímavé, že nám dává rovnost dimenzí dvou podprostorů ve dvou obecně různých aritmetických vektorových prostorech $\mathbb{F}^m$, $\mathbb{F}^n$.

Definice

Nechť $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Číslo $\dim \operatorname{Im} A \equiv \dim \operatorname{Im} A^T$ nazýváme *hodnost* matice A, značíme $\operatorname{rank}(A)$.

Tvrzení

Nechť $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $R \in \mathbb{F}^{p \times m}$, *Nechť* $Q \in \mathbb{F}^{n \times q}$. *Pak*

1. $\operatorname{rank}(RA) \leq \operatorname{rank}(A)$ *a pokud* $p = m$ *a* R *je regulární,* $\operatorname{rank}(RA) = \operatorname{rank}(A)$
2. $\operatorname{rank}(AQ) \leq \operatorname{rank}(A)$ *a pokud* $n = q$ *a* Q *je regulární,* $\operatorname{rank}(AQ) = \operatorname{rank}(A)$
3. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$

Důkaz.

Protože řádky RA patři do lineárního obalu řádků A, musí být $\operatorname{rank}(RA) \leq \operatorname{rank}(A)$. Regularita R znamená, že $\operatorname{rank}(R^{-1}A) \leq \operatorname{rank}(A)$, z čehož plyne druhá inkluze. Druhý bod se dokáže analogicky, třetí plyne z předchozí věty. $\square$

Věta

Nechť $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní

1. *A je regulární*
2. $\operatorname{rank}(A) = n$
3. *množina všech řádků (sloupců) A je LN*
4. *množina všech řádků (sloupců) A generuje $\mathbb{F}^n$*
5. *posloupnost všech řádků (sloupců) A je bází $\mathbb{F}^n$*
6. $\operatorname{Im} A = \mathbb{F}^n$
7. $\operatorname{Ker} A = 0$
8. *zobrazení F_A je prosté*
9. *zobrazení F_A je na*

Důkaz.

Je-li A regulární, pak existuje regulární matice A^{-1} splňující $A^{-1}A = E$. Násobení regulární maticí nemění hodnost a $\operatorname{rank}(E) = n$, tedy $\operatorname{rank}(A) = n$. Zbytek ♣. $\square$

Věta (O dimenzi jádra a obrazu)

Nechť $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. *Pak* $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n$

Nástin důkazu: Převeďme A do redukovaného odstupňovaného tvaru, přeuspořádejme sloupce tak, že pivotní přesuneme na začátek, a vynechejme nulové řádky. Jádro matice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rp} \end{pmatrix}$$

je generováno množinou

$$\begin{aligned} M = \{ & (-c_{11}, -c_{21}, \dots, -c_{r1}, 1, 0, \dots, 0) \\ & (-c_{12}, -c_{22}, \dots, -c_{r2}, 0, 1, \dots, 0) \\ & \qquad \vdots \\ & (-c_{1p}, -c_{2p}, \dots, -c_{rp}, 0, 0, \dots, 1) \} \end{aligned}$$

Protože M je LN, je $\dim \operatorname{Ker} A = p$. Ze zavedení a z tvaru matice A' vidíme, že $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A' = r$ a že $p + r = n$.

Dimenze jádra A se nazývá *nulita* (též *defekt*) matice, značí se $n(A)$. Věta o dimenzi jádra a obrazu je proto známá též pod názvem věta o hodnosti a nulitě:

$$\forall A \in \mathbb{F}^{m \times n} : \operatorname{rank}(A) + n(A) = n$$

Plyne z ní například

Tvrzení

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $\operatorname{Ker} A^T A = \operatorname{Ker} A$ *a* $\operatorname{rank} A^T A = \operatorname{rank} A$*.*

Důkaz.

Pokud $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, pak jistě $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, tedy $\operatorname{Ker} A \leq \operatorname{Ker} A^T A$. Pokud $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, pak $\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = 0$. Označme $\mathbf{y} := A\mathbf{x}$, pak $\mathbf{y}^T = \mathbf{x}^T A^T$ a tedy $0 = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m y_i^2$. Musí tedy být $\mathbf{y} = 0$, neboli $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A$. Tím je dokázána druhá inkluze. Protože počet sloupců $A^T A$ je stejný jako počet sloupců A, plyne odsud rovnost hodností. $\square$

Tvrzení platí jen pro **reálné** matice. Kde selže důkaz pro $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$? Jak by se muselo upravit tvrzení, aby důkaz prošel?

Pomocí hodnosti matice se dá také formulovat kritérium řešitelnosti SLR:

Věta (Frobeniova)

Nechť $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^m$. *Soustava* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má řešení, právě když* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$.

Důkaz.

Soustava má řešení, právě když je $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} A$, což nastává právě když $\operatorname{Im}(A|b) = \operatorname{Im}(A)$. Protože $\operatorname{Im} A \leq \operatorname{Im}(A|b)$, nastane toto právě když se rovnají dimenze. □

Pomocí hodnosti se dá formulovat i to, kolik řešení soustava má. Víme, že množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je afinní podprostor $\mathbb{F}^n$ ve tvaru

$$\mathbf{x}_P + \operatorname{Ker} A$$

Z věty o hodnosti a nulitě víme, že dimenze $\operatorname{Ker} A$ je $n - \operatorname{rank}(A)$.